SÉMINAIRE N. BOURBAKI

GORO SHIMURA

Fonctions automorphes et variétés abéliennes

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 167, p. 403-411

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__403_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1958)

FONCTIONS AUTOMORPHES ET VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Goro SHIMURA

On sait que toute fonction modulaire elliptique est une fonction rationnelle de la fonction

$$j(\tau) = \frac{g_2(\omega_1, \omega_2)^3}{g_2(\omega_1, \omega_2)^3 - 27\, g_3(\omega_1, \omega_2)^2}, \quad \tau = \omega_1/\omega_2,$$

qui représente, pour chaque τ, l'invariant birationnel (ou le module) de la courbe elliptique

$$Y^2 = 4X^3 - g_2(\omega_1, \omega_2)X - g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Le problème que nous voulons étudier est de généraliser cette relation au cas de variétés abéliennes de dimension > 1. Nous allons démontrer que les "modules" de variétés abéliennes, regardés comme fonctions des périodes, engendrent les fonctions modulaires de Siegel et que l'on obtient des fonctions modulaires par rapport aux "Hauptkongruenzgruppen" au moyen des points t sur les variétés abéliennes tels que $mt = 0$ pour un entier m.

Il faut naturellement introduire la notion du "module" d'une variété abélienne. Pour cela on a besoin de la notion de variété polarisée, donnée par WEIL [6]. En vertu de cette notion, on peut définir le corps du module d'une variété abélienne polarisée (MATSUSAKA [2]). Nous allons d'abord le donner d'une façon commode pour notre but.

Soient V une variété algébrique complète non-singulière en co-dimension 1, et X un diviseur positif sur V. On désignera par $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble de tous les diviseurs positifs X' sur V pour lesquels il existe deux entiers positifs m, m' tels que mX soit algébriquement équivalent à $m'X'$. L'ensemble $\mathcal{C}(X)$ s'appellera une <u>polarisation</u> de V si $\mathcal{C}(X)$ contient au moins un diviseur Y tel que le système linéaire déterminé par Y donne une immersion birationnelle birégulière de V dans un espace projectif ; un diviseur Y jouissant de cette propriété est dit ample. Nous entendrons par une <u>variété polarisée</u> un couple $(V, \mathcal{C})$ formé d'une variété algébrique V et d'une polarisation $\mathcal{C}$ de V. $(V, \mathcal{C})$ est dit défini sur un corps k, si k est un corps de définition pour V, et si $\mathcal{C}$ contient un diviseur X rationnel sur k. S'il en est ainsi, σ étant un isomorphisme de k sur un corps k', on désignera par $\mathcal{C}^\sigma$

la polarisation de V^{σ} contenant X^{σ}. Soient $(A, \mathcal{C})$, $(A', \mathcal{C}')$ deux variétés abéliennes polarisées et λ un isomorphisme de A sur A'. Nous appellerons λ un isomorphisme de $(A, \mathcal{C})$ sur $(A', \mathcal{C}')$ si λ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$. D'après notre définition et d'après WEIL [8], pour toute variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{C})$, il existe un isomorphisme de $(A, \mathcal{C})$ sur une variété abélienne polarisée $(A', \mathcal{C}')$ telle que A' soit une variété projective et $\mathcal{C}'$ contienne les sections hyperplanes de A' ; si k est un corps de définition pour $(A, \mathcal{C})$, il existe une telle $(A', \mathcal{C}')$ définie sur k.

Considérons maintenant une variété algébrique V dans l'espace projectif P^n de dimension n. Soit (u_{ij}) une matrice inversible de degré $n+1$; on désignera par $V[u]$ la transformée de V par la transformation projective

$$(x_j) \longrightarrow \left(\sum u_{ij}\, x_j\right) \quad \text{où} \quad (x_j) \in P^n .$$

Soient k un corps de définition pour V et (t_{ij}) une matrice dont les coordonnées sont $(n+1)^2$ variables indépendantes sur k. Soient z le point de Chow de $V[t]$ et F le lieu de z par rapport à k. Comme $k(z)$ est contenu dans $k(t)$, $k(z)$ est une extension régulière de k ; F est donc une variété définie sur k. On peut facilement vérifier que F ne dépend que de V et non du choix de k et de (t). La variété F s'appellera la <u>famille projective</u> de V.

PROPOSITION 1. — <u>Soient A, A' deux variétés abéliennes dans un espace projectif et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ respectivement les polarisations de A et de A' définies par les sections hyperplanes. Supposons que A, A' ne soient contenues dans aucun hyperplan et que les systèmes linéaires des sections hyperplanes de A et A' soient complets. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes l'une à l'autre :</u>

1° <u>$(A, \mathcal{C})$ est isomorphe à $(A', \mathcal{C}')$.</u>

2° <u>A est une transformée de A' par une transformation projective.</u>

3° <u>Les familles projectives de A et A' coincident.</u>

Il vaudrait mieux donner une raison pour laquelle 1° entraîne 2°, puisque ce n'est pas nécessairement le cas pour une variété quelconque. Soient Y et Y' des sections hyperplanes de A et A' respectivement, et λ un isomorphisme de $(A, \mathcal{C})$ sur $(A', \mathcal{C}')$. D'après notre définition, il y a deux entiers positifs r, s tels que $r\lambda(Y)$ soit algébriquement équivalent à sY'. On voit facilement, en vertu de notre hypothèse, que les dimensions des systèmes linéaires complets déterminés par Y, Y' sont égaux à la dimension de l'espace

ambiant pour A , A' ; il en résulte que $\lambda(Y)$ est algébriquement équivalent à Y' . Comme Y' est un diviseur non-dégénéré sur une variété abélienne, il existe un point a de A' tel que $\lambda.(Y)$ soit linéairement équivalent à la transformée de Y' par une translation $x \longrightarrow x + a$ dans A' ; on peut en déduire que A est une transformée de A' par une transformation projective.

PROPOSITION 2. - Soient A une variété abélienne dans un espace projectif, $\mathcal{C}$ la polarisation de A définie par les sections hyperplanes et F la famille projective de A . Supposons que A ne soit contenue dans aucun hyperplan et que le système linéaire des sections hyperplanes de A soit complet. Soient k un corps de définition pour A et σ un isomorphisme de k sur un corps k' . Alors, pour que l'on ait $F = F^{\sigma}$, il faut et il suffit que $(A , \mathcal{C})$ soit isomorphe à $(A^{\sigma} , \mathcal{C}^{\sigma})$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1 .

Soit $(A , \mathcal{C})$ une variété abélienne polarisée, et soit $\mathcal{C}^*$ l'ensemble de tous les diviseurs amples de $\mathcal{C}$. Pour chaque élément X de $\mathcal{C}^*$, on obtient une famille projective $F(A , X)$ d'une immersion de A définie par X . D'après la proposition 1 , si X est algébriquement équivalent à X' , on a $F(A , X) = F(A , X')$. Dans le cas de caractéristique 0 , on voit, en vertu de la proposition 2 , qu'il existe un corps K qui est le corps minimum de définition pour $F(A , X)$, pour tout X de $\mathcal{C}^*$; K est le sous-corps maximum de k dont les éléments sont fixés par tout isomorphisme σ de k tel que $(A , \mathcal{C})$ soit isomorphe à $(A^{\sigma} , \mathcal{C}^{\sigma})$, k étant un corps de définition pour $(A , \mathcal{C})$. K est engendré sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par le point de Chow de $F(A , X)$ pour chaque $X \in \mathcal{C}^*$, et s'appellera le corps du module de $(A , \mathcal{C})$. On peut regarder, sans restriction pour la caractéristique, le point de Chow de $F(A , X)$ comme le "module de degré r " de la variété abélienne polarisée $(A , \mathcal{C})$, où r est la dimension du système linéaire complet défini par X . En effet, d'après la proposition 1 , si $(A , \mathcal{C})$ est isomorphe à $(A' , \mathcal{C}')$, les modules de degré r de $(A , \mathcal{C})$, $(A' , \mathcal{C}')$ sont les mêmes pour tout r , et réciproquement, si pour au moins un r , les modules de degré r de $(A , \mathcal{C})$, $(A' , \mathcal{C}')$ coïncident, $(A , \mathcal{C})$ est isomorphe à $(A' , \mathcal{C}')$.

Or nous considérons la variété de Kummer de $(A , \mathcal{C})$ (WEIL [7], MATSUSAKA [2]). Soit G le groupe des automorphismes de $(A , \mathcal{C})$. On peut démontrer que G est d'ordre fini. Nous entendrons par une variété de Kummer de A une variété quotient de A par rapport à G , c'est-à-dire un couple (W , f) formé d'une variété W et d'une application rationnelle f de A sur W

jouissant des propriétés suivantes :

1° f est définie partout sur A ;

2° $f = f \circ \xi$ pour tout $\xi \in G$;

3° si f' est une application rationnelle de A sur une variété W' satisfaisant à $f' = f' \circ \xi$ pour tout $\xi \in G$, il existe une application rationnelle g de W sur W' telle que l'on ait $f' = g \circ f$ et que g soit définie en tout point $f(a)$ pour lequel f' est définie en a.

Il existe toujours un tel (W, f) (SERRE [4]) ; on peut construire W comme une variété projective. De plus, on peut démontrer, en vertu des résultats dans WEIL [6], qu'il existe une variété de Kummer (W, h) satisfaisant aux conditions suivantes :

(W1) W est défini sur le corps K du module de $(A, \mathcal{C})$.

(W2) h est défini sur tout corps de définition pour $(A, \mathcal{C})$.

(W3) si σ est un isomorphisme d'un corps de définition pour $(A, \mathcal{C})$ sur un corps, et si λ est un isomorphisme de $(A, \mathcal{C})$ sur $(A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma)$, on a $h = h^\sigma \circ \lambda$.

Nous allons maintenant nous occuper d'un certain système analytique de variétés abéliennes. Nous nous bornons, pour simplifier, au cas du groupe modulaire de Siegel, quoiqu'on puisse obtenir les mêmes résultats pour d'autres cas.

Soit $E = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$, où 1_n est la matrice unité de degré n ; et soit Γ le groupe composé des matrices T de degré $2n$ à coefficients entiers telles qu'on ait ${}^tTET = E$. Soit S_n l'ensemble des matrices complexes symétriques z de degré n telles que $\mathrm{Im}(z)$ soit positive non-dégénérée. Chaque élément T de Γ donne une transformation analytique de S_n définie par

$$T(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

où a, b, c, d, sont quatre matrices de degré n telle que $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soient z un élément de S_n et $D(z)$ le réseau dans C^n formé des éléments $\sum_{i=1}^{2n} \gamma_i v_i$ où les γ_i sont des entiers et les v_i sont les colonnes de la matrice $(z \; 1_n)$. La matrice E donne une forme R-bilinéaire alternée dans C^n dont les valeurs sur $D(z)$ sont entières ; et $z \in S_n$ entraîne que $C^n/D(z)$ est analytiquement isomorphe à une variété abélienne $A(z)$. La variété $A(z)$ est réalisée par les fonctions thêta correspondant à la forme alternée obtenue à partir de mE pour un entier m suffisamment grand. Nous fixons un tel entier m, et désignons par $F(z)$ la famille projective de $A(z)$ pour chaque z. En réalité, $A(z)$ dépend du choix d'une base pour l'espace vectoriel formé des

fonctions thêta correspondant à mE ; mais F(z) ne dépend que de z . Notre premier théorème s'énonce :

THÉORÈME 1. - Il existe des fonctions méromorphes $\varphi_1 , \dots , \varphi_\alpha$ sur S_n et un sous-ensemble analytique Y de S_n de codimension 1 jouissant des propriétés suivantes.

1° Les F(z) pour tous les points $z \in S_n - Y$ sont de même dimension et de même degré.

2° Le point de Chow de F(z) est $(1 , \varphi_1(z) , \dots , \varphi_\alpha(z))$ pour chaque $z \in S_n - Y$.

Nous démontrons ce théorème au moyen des deux lemmes suivants.

LEMME 1. - Soient U un sous-ensemble ouvert connexe de C^n , $\{f_i(z) ; i = 1 , 2 , \dots\}$ une série de fonctions holomorphes sur U et k un sous-corps dénombrable de C . Alors, il existe un point z_0 de U et un isomorphisme σ du corps de fonctions $k(f_1 , \dots)$ sur le corps $k(f_1(z_0) , \dots)$ tel que $f_i^\sigma = f_i(z_0)$ et $a^\sigma = a$ pour tout a de k .

LEMME 2. - Soient U et S deux ensembles ouverts connexes respectivement dans C^n et C^m ; soient $f_i(u , z)$, pour $0 \leqslant i \leqslant N$, $N + 1$ fonctions holomorphes sur $U \times S$, où u et z désignent respectivement les points de U et de S . Supposons que les f_i satisfassent aux conditions suivantes.

1° Il n'y a aucun point (u , z) tel qu'on ait $f_i(u , z) = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant N$. (On peut alors regarder $(f_0(u , z) , \dots , f_N(u , z))$ comme un point de l'espace projectif P^N de dimension N ; on le désignera par f(u , z)) .

2° On a $\operatorname{rang} (\partial f_i / \partial u_j(u , z)) = n$ partout sur $U \times S$.

3° Pour chaque $z \in S$, il existe une variété algébrique V(z) dans P^N , de dimension n , tel que l'ensemble $B(z) = \{f(u , z) \mid u \in U\}$ est un sous-ensemble ouvert de V(z) au sens de la topologie de Zariski.

4° Le degré des variétés V(z) ne dépend pas du point $z \in S$.

Alors, il existe des fonctions méromorphes $\Psi_1(z) , \dots , \Psi(z)$ et un sous-ensemble analytique X de S de codimension 1 tels que le point de Chow de V(z) soit $(1 , \Psi_1(z) , \dots , \Psi_\beta(z))$ pour chaque $z \in S - X$.

On peut appliquer le lemme 2 au cas du système de fonction thêta, si

$$U = C^n , \quad S = S_n , \quad V(z) = B(z) = A(z) ;$$

on obtient alors des fonctions méromorphes Ψ_i sur S_n et un ensemble X jouissant de la propriété du lemme 2 . D'après le lemme 1 , il existe un point z_o de S_n tel que $(\Psi_i(z_o))$ soit une spécialisation générique de (Ψ_i) par rapport à Q . Comme la variété $A(z_o)$ est définie sur $Q(\Psi_i(z_o))$, la variété projective $F(z_o)$ de $A(z_o)$ est aussi définie sur $Q(\Psi_i(z_o))$; il existe donc des fonctions rationnelles g_j à coefficients dans Q , telles que le point de Chow de $F(z_o)$ soit $(1 , g_1(\Psi_i(z_o)) , \dots , g_\alpha(\Psi_i(z_o)))$. Posons alors

$$\varphi_j(z) = g_j(\Psi_i(z)) ;$$

les φ_j sont évidemment méromorphes sur S_n ; on peut démontrer, au moyen d'une technique de spécialisation, qu'il existe un sous-ensemble analytique Y de S_n pour lequel les φ_j jouissent de la propriété du théorème 1 .

Soit maintenant T un élément du groupe modulaire Γ . La relation ${}^tTET = E$ entraîne que les variétés abéliennes $A(z)$, $A(T(z))$ polarisées par les sections hyperplanes sont isomorphes ; d'où résulte, en vertu de la proposition 1 , qu'on a

$$F(z) = F(T(z)) .$$

Réciproquement, z , z' étant deux points de S_n , on voit que si l'on a $F(z) = F(z')$, il existe un élément $T \in \Gamma$ tel que $z' = T(z)$. On a ainsi démontré :

THÉORÈME 2. – Les notations φ_i , Y étant celles du théorème 1 , les fonctions φ_i sont invariantes par le groupe modulaire Γ . De plus, si l'on a $\varphi_i(z) = \varphi_i(z')$ $(1 \leqslant i \leqslant \alpha)$ pour deux points z , z' de $S_n - Y$, il existe un élément T de Γ tel que l'on ait $z' = T(z)$.

SIEGEL a défini une fonction modulaire comme un quotient de deux formes automorphes de même poids ayant des développements de Fourier, et démontré que toutes les fonctions modulaires sur S_n forment un corps de fonctions de dimension $n(n + 1)/2$ sur C . BAILY [1] a démontré que si $n > 1$, toute fonction méromorphe sur S_n invariante par Γ s'exprime comme un quotient de deux formes automorphes ayant des développements de Fourier ; ce résultat est généralisé au cas de tout groupe commensurable à Γ [3] . D'après ces résultats et d'après le théorème 2 , on peut vérifier que

$$C(\varphi_1 , \dots , \varphi_\alpha)$$

est le corps des fonctions modulaires de Siegel. Nous avons pu ainsi construire les fonctions modulaires par les modules de variétés abéliennes, regardés comme

fonctions des périodes. On verra que cette méthode est applicable au cas des fonctions de Hilbert ou fonctions modulaires hermitiennes, etc. Mais le conférencier va seulement signaler un théorème qui serait important quand on applique les fonctions automorphes à la théorie des nombres.

Soit S un sous-ensemble ouvert connexe de C^m et soit $\{A(s) \mid s \in S\}$ un système de variétés abéliennes paramétrées par des fonctions thêta qui correspondent à une même forme alternée. On peut alors démontrer, de la même manière que ci-dessus, qu'il existe des fonctions méromorphes χ_i et un sous-ensemble analytique U de S de codimension 1 tels que le point de Chow de $F(s)$ soit

$$(1 , \chi_1(s) , \dots , \chi_\gamma(s))$$

pour chaque $s \in S - U$, où $F(s)$ désigne la famille projective de $A(s)$. Soit k un sous-corps dénombrable de C ; nous supposons que notre système $\{A(s) \mid s \in S\}$ satisfasse à la condition suivante :

Si B est une spécialisation générique de $A(s_1)$ par rapport à k, s_1 étant un point de S, il existe un point s_2 de S tel que les variétés abéliennes B et $A(s_2)$, polarisées par les sections hyperplanes, soient isomorphes.

THÉORÈME 3. - Avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses que ci-dessus, le corps $k(\chi_1 , \dots , \chi_\gamma)$ est une extension régulière de k et l'on a $\dim_k k(\chi_1 , \dots , \chi_\gamma) = \dim_C C(\chi_1 , \dots , \chi_\gamma)$.

En d'autres termes, le corps des fonctions $C(\chi_1 , \dots , \chi_\gamma)$ a un modèle défini par rapport à k. Dans le cas du corps des fonctions modulaires de Siegel, on peut poser $k = Q$.

On se propose maintenant d'étudier les fonctions obtenues à partir des points t (sur une variété abélienne variable) tels qu'on ait $qt = 0$ pour un entier q ; celles-ci sont l'analogue des "Teilwerte" des fonctions elliptiques qui engendrent les fonctions modulaires elliptiques de "Stufe" q. Désignons par $\theta(u , z)$ l'isomorphisme de $C^n/D(z)$ sur $A(z)$ où $u \in C^n$. Soit b un vecteur de R^{2n} (une matrice à 1 ligne et $2n$ colonnes) ; soit z_o un point de S_n qui est suffisamment générique (au sens du lemme 1). on considère une variété de Kummer (W , h) pour $A(z_o)$ jouissant des propriétés (W1-3).

Le point $h(\theta((z_o \ 1_n)b , z_o))$ est rationnel sur le corps

$$Q(\Psi_i(z_o) , \theta((z_o \ 1_n)b , z_o)) ;$$

il existe donc des fonctions rationnelles g_α à coefficients dans Q telles

que les coordonnées du point $h(\theta((z_0 \ 1_n)b , z_0))$ soient les

$$g_\alpha(\Psi_i(z_0) , \theta((z_0 \ 1_n)b , z_0)) .$$

Posons

$$\xi_\alpha(b , z) = g_\alpha(\Psi_i(z) , \theta((z \ 1_n)b , z)) ;$$

les $\xi_\alpha(b , z)$ sont méromorphes sur S_n . Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de Γ, et soit ${}^t(cz_0 + d) = M$. On a alors $M(T(z_0) \ 1_n) = (z_0 \ 1_n)^t T$; d'où

$$M[D(T(z_0))] = D(z_0) .$$

Il existe donc un isomorphisme $\mathcal{E}$ de $A(T(z_0))$ sur $A(z_0)$ qui conserve la polarisation et tel que l'on ait

$$\mathcal{E}[\theta(u , T(z_0))] = \theta(Mu , z_0)$$

pour tout $u \in C^n$. D'autre part, si z_0 est suffisamment générique, il existe un isomorphisme σ d'un corps de définition pour $A(z_0)$ tel que

$$A(T(z_0)) = A(z_0)^\sigma .$$

D'après la propriété (W3) , on a

$$h(\theta(Mu , z_0)) = h^\sigma(\theta(u , T(z_0))) .$$

En substituant $(T(z_0) \ 1_n)b$ à u , on a

$$\xi_\alpha(b , T(z_0)) = \xi_\alpha({}^tTb , z_0) ;$$

ce qui démontre le théorème suivant, car z_0 est "générique" .

THÉORÈME 4. – Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$\xi_\alpha(b , T(z)) = \xi_\alpha({}^tTb , z)$$

pour chaque $T \in \Gamma$.

Soit q un entier positif et $\Gamma(q)$ le sous-groupe de Γ constitué de tout élément T de Γ tel que $T \equiv \pm 1_{2n} \pmod q$. Soient a_i les vecteurs de R tels que les coordonnées de qa_i soient entières ; alors, on voit facilement qu'on a $\xi_\alpha(a_i , z) = \xi_\alpha(a_j , z)$ pour tout α si et seulement si l'on a $a_i \equiv \pm a_j \pmod Z$. On peut vérifier, en vertu du théorème 4 , que les $\xi_\alpha(a_i , z)$ sont invariants par le groupe $\Gamma(q)$; de plus, on peut démontrer que le corps $C(\varphi_j(z) , \xi_\alpha(a_i , z))$ est le corps de toutes les fonctions modulaires par rapport au groupe $\Gamma(q)$; ce qui est une généralisation du fait que le corps de toutes les fonctions modulaires elliptiques de "Stufe" q est engendré par $j(\tau)$ et $g_2 g_3^{-1} \wp(q^{-1}(a\omega_1 + b\omega_2) , \omega_1 , \omega_2)$ sur C , où (a , b) parcourent tous les couples de représentants des entiers modulo q .

Nous pourrions commencer de ce point de vue une théorie arithmétique des fonctions automorphes de plusieurs variables, comme dans [5] ; mais dans cet exposé, on s'arrête ici.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAILY (W. L.). - Satake's compactification of V_n , Amer. J. of Math. (à paraître).

[2] MATSUSAKA (Teruhisa). - Polarized varieties, fields of moduli and generalized Kummer varieties of polarized abelian varieties, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 45-82.

[3] SATAKE (Ichiro). - Compactification des espaces quotients de Siegel ; l'opérateur Φ , Séminaire H. Cartan, t. 10, 1957/58.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p , Symposium de Topologie algébrique [Mexico. 1956] (à paraître).

[5] SHIMURA (Goro). - Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques, Journ. math. Soc. Japan, t. 10, 1958, p. 1-28.

[6] WEIL (André). - The field of definition of a variety, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 509-524.

[7] WEIL (André). - On the theory of complex multiplication, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory [Tokyo-Nikko. 1955]. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 9-22.

[8] WEIL (André). - On the projective embedding of abelian varieties, Algebraic geometry and topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz. - Princeton, Princeton University Press, 1957 ; p. 177-181.