SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN BRACONNIER

Sur les groupes de Lie compacts opérant dans une variété compacte

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 163, p. 367-378

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__367_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1958)

SUR LES GROUPES DE LIE COMPACTS OPÉRANT DANS UNE VARIÉTÉ COMPACTE

par Jean BRACONNIER

(d'après G.D. MOSTOW [8], [9] et E.E. FLOYD [3]).

On se propose ici de montrer que, pour un groupe de Lie compact opérant dans une variété compacte, il n'existe qu'un nombre fini de stabilisateurs qui ne soient pas deux à deux conjugués (conjecture due à D. MONTGOMERY). La démonstration fournit un grand nombre de sous-produits intéressants. Fixons d'abord quelques notations et terminologies utiles dans la suite.

On supposera toujours que G désigne un groupe de Lie compact, et on notera G^* la composante connexe de l'élément neutre e de G.

a. Soit $\mathfrak{S}$ une famille de sous-groupes fermés de G qui, avec chacun de ses termes, contient ses conjugués. La relation " K est conjugué d'un sous-groupe de H " est une relation de préordre dans $\mathfrak{S}$. La relation d'équivalence R qu'elle définit dans $\mathfrak{S}$ est " K et H sont conjugués" (car si $sHs^{-1} \subset K$ et $tKt^{-1} \subset H$, sHs^{-1} et K ont même nombre de composantes connexes et, comme H et K ont des algèbres de Lie isomorphes, on $sH^*s^{-1} = K^*$, d'où $sHs^{-1} = K$). Si l'ensemble quotient $\mathfrak{S}/R$ est fini, on dit que $\mathfrak{S}$ est semi-homogène.

b. Supposons maintenant que G opère dans un espace complètement régulier X, au moyen d'une application continue $(s, x) \longrightarrow sx$ de $G \times E$ dans E. Pour $x \in X$, on désignera par $G(x)$ le stabilisateur de x, et par Gx l'orbite de x, isomorphe à l'espace homogène $G/G(x)$; on a $G(sx) = sG(x)s^{-1}$ pour $s \in G$. On désigne par X/G l'espace des orbites (X/G est séparé et métrisable (resp. compact) si X l'est).

Soit $\mathfrak{S}$ la famille des stabilisateurs $G(x)$ $(x \in X)$. La relation de préordre : "il existe $t \in G$ tel que $t(G(y)t^{-1} = G(ty) \subset G(x)$ " induit dans X/G la relation de préordre : "il existe $t \in G$ tel que $sty \longrightarrow sx$ soit une application de Gy dans Gx " , qu'on lit : " Gy est en dessous de Gx " ; la relation d'équivalence qu'elle définit dans X/G est : "il existe $t \in G$ tel que $sty \longrightarrow sx$ soit un homéomorphisme de Gy sur Gx " et se lit : "les orbites Gy et Gx sont conjuguées". La classe de l'orbite d'un point $x \in X$ s'appelle le niveau de x. On dit que le niveau de x est en-dessous du niveau de y si l'orbite Gy est en dessous de l'orbite Gx. L'ensemble des niveaux est ordonné par

cette relation. Le niveau d'un point $x \in X$ est fibré (en un sens convenable) avec l'espace homogène $G/G(x)$ pour fibre. Si l'ensemble des niveaux est fini, c'est-à-dire s'il n'existe qu'un nombre fini d'orbites non mutuellement conjuguées ou si $\mathfrak{S}$ est semi-homogène, on dira que l'espace X/G est semi-homogène.

c. Soit X un espace où opère un groupe G, Y un espace où opère un groupe H, et T une représentation de G dans H. On dit qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une T-application si l'on a $f(sx) = T(s)\, f(x)$ pour tout $s \in G$ et tout $x \in X$. Soit f une T-application de X dans Y. f définit canoniquement une application continue $f' : X/G \longrightarrow Y/H$. Si $x \in X$ et si la restriction de f à Gx est injective, on a $T^{-1}(H(f(x)) = G(x)$ et, par passage aux quotients, T définit un isomorphisme de $G/G(x)$ dans $H/H(f(x))$. Si f est un T-homéomorphisme de X sur Y, f' est un homéomorphisme de X/G sur $Y/T(G)$ et f induit une bijection de l'ensemble des niveaux de X/G sur celui des niveaux de $Y/T(G)$: ces espaces sont en même temps semi-homogènes. Si, en outre, G opère fidèlement dans G, T est fidèle.

d. Si X est complètement régulier, on désignera par $\mathfrak{F}(X)$ l'ensemble des ensembles fermés de X. Si $\mathfrak{U}$ est le filtre des entourages d'une structure uniforme dans X, et si U décrit $\mathfrak{U}$, l'ensemble des couples A, B d'éléments de $\mathfrak{F}(x)$ tels que $A \subset U(B)$ et $B \subset U(A)$ décrit un système fondamental d'entourages dans une structure uniforme (séparée) sur $\mathfrak{F}(X)$. Si X est compact, $\mathfrak{F}(X)$ l'est aussi.

1. Un théorème d'immersion.

THÉORÈME 1. - Si G opère dans l'espace complètement régulier X, soit $x \in X$. Alors il existe une représentation orthogonale T de G dans un $\underset{\sim}{R}^n$ et une T-application de X dans $\underset{\sim}{R}^n$ dont la restriction à l'orbite Gx est injective.

LEMME 1. - Soit H un sous-groupe fermé de G. Il existe une représentation unitaire T de G dans un $\underset{\sim}{C}^n$ et un point $y \neq 0$ de $\underset{\sim}{C}^n$ tels que H soit le stabilisateur de y lorsque G opère dans $\underset{\sim}{C}^n$ par T.

Soit $F \supset H$ un sous-groupe fermé de G, avec $F \neq H$. Il existe (cf. C. CHEVALLEY, [1], p. 192) une représentation unitaire T_F de G dont la restriction à F contient une représentation irréductible U_F de F telle que $U_F(H)$ laisse fixe un point $y_F \neq 0$ de l'espace de U_F. Soit $S_F \supset H$ le stabilisateur de y_F lorsque G opère dans l'espace de T_F par T_F. On vérifie alors que $H = \bigcap_F S_F$. Par suite, il existe un nombre fini de sous-groupes $F(i)$ tels que $H = \bigcap_i S_{F(i)}$.

Si T est la somme directe des $T_{F(i)}$ et $y = \sum_i y_{F(i)}$, le couple T, y vérifie les conditions du lemme.

REMARQUE. - Si $H \neq G$, on peut choisir les T_F (semi-simples) de telle sorte qu'elles ne contiennent pas l'unité : alors $T(G)$ n'a pas de point fixe $\neq 0$.

LEMME 2. (GLEASON [4]). - Soient Y un compact de X stable par G, T une représentation orthogonale de G dans $\underset{\sim}{R}^n$, et g une T-application de Y dans $\underset{\sim}{R}^n$. Alors g se prolonge en une T-application f de X dans $\underset{\sim}{R}^n$.

Prendre $f(x) = T * \overline{g}(x) = \int_G T(s)\, \overline{g}(s^{-1} x)\, ds$, où $\overline{g}$ est un prolongement continu de g à X.

En appliquant le lemme 1 à $H = G(x)$, on obtient une représentation orthogonale T de G dans un $\underset{\sim}{R}^n$, et un $y \in \underset{\sim}{R}^n$ tels que $G(x)$ soit le stabilisateur de y lorsque G opère dans $\underset{\sim}{R}^n$ par T. Pour obtenir le théorème 1, on prolonge alors l'injection $sx \longrightarrow T(s)y$ de Gx dans $\underset{\sim}{R}^n$ comme il est dit au lemme 2.

2. Dissections.

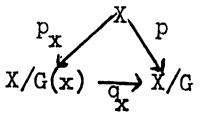
Soit X un espace dans lequel opère un groupe G, et soit x un point de X. On appelle dissection locale de X passant par x tout ensemble $K \subset X$ vérifiant les conditions suivantes :

a. K est fermé et contient x ;

b. si $s \in G$ et $y \in K$, la relation $sy \in K$ est équivalente à $s \in G(x)$;

c. il existe une section locale continue $\sigma : U \longrightarrow G$ de $G/G(x)$ au-dessus d'un voisinage U de $G(x)$ telle que l'application $(u, y) \longrightarrow \sigma(u)y$ (injective et continue dans $U \times K$) soit un homéomorphisme de $U \times K$ sur un voisinage de x.

Soit K une dissection locale passant par x. Pour tout $y \in B$, on a $G(y) \subset G(x)$ et $Gy \cap K = G(x)y$ (condition équivalente à b.) et K est stable par $G(x)$. La restriction de la projection $q_x : X/G(x) \longrightarrow X/G$ est un homéomorphisme de l'espace $K/G(x)$ dans le voisinage GK/G de l'orbite de x. Si l'espace $K/G(x)$ est semi-homogène, il en est de même de l'espace GK/G. En outre, si $s \in G$, sK est une dissection locale passant par sx. Se donner une dissection locale passant par x, c'est se donner une section locale λ de la projection q_x au dessus d'un voisinage W de l'orbite de x dans X/G : si $p_x : X \longrightarrow X/G(x)$, on a $W = GK/G$ et $K = \overline{p}_x^{-1}(\lambda(W))$.



LEMME 3. - Soit K une dissection locale passant par le point $x \in X$. L'ensemble des $y \in X$ tels que $G(sy) \subset G(x)$ pour un $s \in G$ (i.e. dont le niveau est au-dessous de celui de x) est un voisinage ouvert de x. L'ensemble des $y \in Y$ dont le niveau est au-dessus de celui de x est fermé.

Cela résulte immédiatement de la définition de K.

Une section locale de $p : X \longrightarrow X/G$ passant par le point $x \in X$ peut se définir par un ensemble fermé $K \subset X$, contenant x, tel que les points de K aient même stabilisateur $G(x)$ et des orbites mutuellement distinctes et que GK soit un voisinage de x.

LEMME 4. - Si le niveau de x est un voisinage de x, toute dissection locale passant par x est une section locale passant par x (et réciproquement).

C'est une conséquence facile des définitions.

On a le résultat bien connu suivant (cf. [5], [8] et aussi D. MONTGOMERY, H. SAMELSON and C.T. YANG [7]) :

PROPOSITION 1. - Soit X une variété différentiable dans laquelle opère différentiablement un groupe G, et soit $x \in X$. Alors il passe par x une dissection locale K pour laquelle il existe une représentation orthogonale T de $G(x)$ dans un $\underset{\sim}{R}^m$ et un T-homéomorphisme différentiable c de K sur une boule de $\underset{\sim}{R}^m$ de centre $c(x) = 0$.

D'après BOCHNER, il existe un système c de coordonnées locales défini dans un voisinage V de x stable par $G(x)$ et une représentation orthogonale T de $G(x)$ telle que c soit un T-homéomorphisme. L'espace tangent à Gx est stable par $T(G(x))$ donc aussi son orthogonal $\underset{\sim}{R}^m$. On obtient alors la dissection K en réduisant convenablement par le théorème des fonctions implicites l'application régulière $(u , y) \longrightarrow \sigma(u)y$ de $U_o \times K_o$ dans V, où σ est une section locale de $G \longrightarrow G/G(x)$ au-dessus d'un voisinage assez petit U_o et où $c(K_o)$ est une boule de $\underset{\sim}{R}^m$ de centre $0 = c(x)$.

REMARQUE. - Avec les notations de la proposition 1, soit $G' = T(G(x))$. G' opère dans la sphère $\underset{\sim}{S}_{m-1}$ avec les mêmes stabilisateurs que s'il opère dans $\underset{\sim}{R}^m$. Si donc l'espace $\underset{\sim}{S}_{m-1}/G'$ est semi-homogène, il en est de même de $\underset{\sim}{R}^m/G'$, donc de $K/G(x)$, et par suite de GK/G (cf. théorème 4, a.).

THÉORÈME 2. - Soit X un espace complètement régulier dans lequel opère un groupe G. Par tout point de X passe une dissection locale.

Soit en effet $x \in X$. D'après le théorème 1, il existe une représentation orthogonale T de G dans $\underset{\sim}{R}^n$ et une T-application continue f de X dans $\underset{\sim}{R}^n$ dont la restriction à Gx est un homéomorphisme. Soit $G' = T(G)$ et $y = f(x)$ On a $G(x) = \bar{T}^1(G'(y))$ et, par passage aux quotients, T définit un isomorphisme $\varphi : G/G(x) \longrightarrow G'/G'(y)$. D'après la proposition 1, il existe une dissection locale L passant par le point y de l'espace $\underset{\sim}{R}^n$ où opère G' . Soit σ' une section locale de $G' \longrightarrow G'(y)$ définie dans un petit voisinage U' de $G(y)$, telle que $\sigma'(U')L$ soit un voisinage de y . Soit alors $K = \bar{f}^1(L)$ et τ une section locale de T définie dans un voisinage de l'élément neutre de G' contenant $\sigma'(U')$: $\sigma = \tau . \sigma' . \varphi$ est une section locale de $G \longrightarrow G/G(x)$ définie dans le voisinage $U = \bar{\varphi}^1(U')$ de $G(x)$ et on vérifie immédiatement que $\sigma(U)K = \bar{f}^1(\sigma'(U')L)$ est un voisinage de x . K est ainsi une dissection locale passant par le point $x \in X$.

Il existe une autre démonstration du théorème 2 due à D. MONTGOMERY et YANG [6] dans le cas où X est soumis à des conditions subversives de métrisabilité et de dénombrabilité ; cette démonstration s'appuie d'ailleurs sur un théorème de Michael dont la démonstration est très affreuse.

COROLLAIRE [4]. - Soit x un point de X tel que le niveau de x soit un voisinage de x . Il passe par x une section locale de $X \longrightarrow X/G$.

C'est une conséquence du lemme 4. Parmi les importantes conséquences du théorème 2, citons la suivante dont on aura besoin plus loin :

PROPOSITION 2.-Soit H un sous-groupe fermé de G . Il existe un voisinage V de H tel que tout sous-groupe fermé $K \subset V$ soit conjugué d'un sous-groupe de H .

En effet G opère dans l'espace compact $\mathfrak{F}(G)$ au moyen des translations à gauche et on a $H = G(H)$ pour le sous-groupe fermé H de G . Comme il existe, dans $\mathfrak{F}(G)$ une dissection locale passant par H , l'ensemble des ensembles fermés A de G tels que $G(sA) \subset H$ pour un $s \in G$ est un voisinage $\mathfrak{V}$ de H . Il existe un voisinage U de e dans G tel que, si K est un sous-groupe fermé contenu dans UH (donc tel que $KH \subset UH$ et $H \subset UKH$), on ait $KH \in \mathfrak{V}$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in G$ tel que $sKs^{-1} \subset G(sKH) \subset H$,

C.Q.F.D.

REMARQUE. - La proposition 2 reste exacte lorsque H est un sous-groupe compact d'un groupe de Lie G quelconque (MONTGOMERY).

3. Groupes abéliens opérant dans une variété compacte.

Si le groupe G opère dans l'espace X, on désignera par $X(G)$ l'ensemble fermé formé des points de X fixes par G.

PROPOSITION 3. - Soit G un groupe opérant dans un espace compact X. Si (G_n) est une suite de sous-groupes fermés de G qui, dans $\mathcal{F}(G)$, converge vers G, la suite $(X(G_n))$ converge vers $X(G)$ dans $\mathcal{F}(X)$.

En effet, soient U un voisinage de e dans G, et x un point de X fixe par tous les G_n ; on a $G = UG_n \subset UG(x)$ si n est assez grand. D'où $X(G) = \bigcap_n X(G_n)$. Si $(X(G_n))$ ne converge pas vers G, on peut trouver un voisinage V de $X(G)$ et une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$, avec $x_{\varphi(n)} \in X(G_{\varphi(n)}) \cap \complement V$; cette suite posséderait une valeur d'adhérence $x \in X(G) \cap \complement V$, ce qui est très absurde.

On a alors le théorème capital suivant :

THÉORÈME 3 [3]. - Soit G un groupe abélien opérant dans une variété compacte et orientable X. Si (G_n) est une suite de sous-groupes fermés de G qui converge vers G, la suite $(X(G_n))$ est stationnaire.

a. Considérons d'abord un espace compact X qui soit une variété homologique (au sens de P.A. SMITH, précisé par FLOYD [3] et YANG) : ceci suppose en particulier que X est de dimension finie r et que tout voisinage compact V' d'un point $x \in X$ contient un voisinage compact W de x tel que l'homomorphisme naturel $H_q(W ; \underset{\sim}{Z}_p) \to H_q(V ; \underset{\sim}{Z}_p)$ soit 0 pour tout $q \geqslant 0$ et tout entier premier p (si cette propriété a lieu pour un p, on dit que X est une variété homologique mod p). On dit que X est orientable (resp. orientable mod p) si, pour toute composante connexe Y de X, on a $H_r(Y ; \underset{\sim}{Z}_p) = \underset{\sim}{Z}_p$ pour tout p (resp. pour le p envisagé). Si X est connexe et orientable et si $Y \subset X$ est un ensemble fermé $\neq X$, on a $H_r(Y ; \underset{\sim}{Z}_p) = 0$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $Y_n \subset X$ une variété homologique mod p_n ; on dit que la suite (Y_n) converge régulièrement vers une variété homologique $Y \subset X$ si (Y_n) converge vers Y dans $\mathcal{F}(X)$ et si tout voisinage compact V d'un point $x \in Y$ contient un voisinage compact W de x tel que, pour tout n assez grand et tout $q \geqslant 0$, les homomorphismes naturels $H_q(W \cap Y_n ; \underset{\sim}{Z}_{p_n}) \to H_q(V \cap Y_n ; \underset{\sim}{Z}_{p_n})$ et $H_q(W \cap Y ; \underset{\sim}{Z}_{p_n}) \to H(V \cap Y ; \underset{\sim}{Z}_{p_n})$ soient nuls. Alors, si Y et les Y_n sont connexes et orientables mod p_n et si $Y \subset Y_n$ pour tout n assez grand, la suite (Y_n) est stationnaire : en effet, d'après un théorème de E.E. FLOYD ([2] p. 321), l'homomorphisme naturel

$H_q(Y ; Z_{p_n}) \longrightarrow H_q(Y_n ; Z_{p_n})$ est bijectif pour tout n assez grand et pour tout $q \geqslant 0$; or, si $Y_n \neq Y$, on a $H_q(Y_n ; Z_{p_n}) = Z_{p_n}$ et $H_q(Y ; Z_{p_n}) = 0$ pour $q = \dim(Y_n)$.

Supposons maintenant que G soit un tore opérant dans la variété homologique orientable X et que (G_n) soit une suite de p_n-groupes qui converge vers G. On montre alors que $X(G)$ est une variété homologique orientable et que pour chaque n, $X(G_n)$ est une variété homologique mod p_n orientable mod p_n, et que la suite $(X(G_n))$ converge régulièrement vers $X(G)$. Soient alors $x \in X(G)$ et $C(x)$ (resp. $C_n(x)$) la composante connexe de x dans $X(G)$ (resp. $X(G_n) \supset X(G)$) ; il existe alors un voisinage W_x de $C(x)$ tel que $C_n(x) = W_x \cap X(G_n)$ pour tout n assez grand (considérer l'homomorphisme nul $H_0(W \cap X(G_n) ; Z_{p_n}) \longrightarrow H_0(V \cap X(G_n) ; Z_{p_n})$ où V et $W \subset V$ sont des voisinages de $y \in C(x)$ et recouvrir $X(G)$ par un nombre fini de tels W). Il en résulte que la suite $(C_n(x))$ converge régulièrement vers $C(x)$; d'après ce qui précède, elle est stationnaire. En recouvrant $X(G)$ par un nombre fini de W_{x_i}, on a $X(G_n) = \bigcup_i C_n(x_i)$ pour tout n assez grand, car $(X(G_n))$ converge vers $X(G)$. La suite $(X(G_n))$ est donc stationnaire, et le théorème est démontré dans le cas envisagé

b. Supposons maintenant que G soit un tore de dimension r et que les G_n soient des groupes finis. On va prouver le théorème 4 (trivial pour $r = 0$) par récurrence sur r. Lorsque n augmente indéfiniment, l'ordre de G_n tend vers $+\infty$: il existe donc un p_n-groupe $H_n \subset G_n$ dont l'ordre tend vers $+\infty$ avec n : on peut donc supposer que (H_n) converge vers un sous-groupe H de G et on a $H^* \neq 0$. La tore G/H^* est de dimension $< r$ et il opère sur la variété homologique compacte et orientable $Y = X(H^*)$; d'autre $(G_n H^*/H^*)$ tend vers G/H^*. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$X(G) = Y(G/H^*) = Y(G_n H^*/H^*) = X(G_n H^*) = X(G_n) \cap X(H^*)$$

pour tout n assez grand. D'autre part, la suite $(H_n \cap H^*)$ de p_n-groupes converge vers le tore H^* et, d'après a., on a $X(H^*) = X(H_n \cap H^*) \supset X(G_n)$ pour tout n assez grand ; d'où $X(G) = X(G_n)$.

c. Supposons maintenant que G soit un tore et que les G_n soient quelconques. Soit (U_n) un système fondamental décroissant de voisinages de e dans G et, pour tout n, soit G'_n un sous-groupe fini tel que $G'_n \subset G_n \subset U_n G'_n$. Si $m \geqslant n$ est assez grand, on a $G = U_n G_m \subset U_n^2 G'_m$: (G'_n) converge vers G. On a donc,

si n est assez grand, $X(G) \subset X(G_n) \subset X(G_n') = X(G)$ d'après b. .

d. Supposons enfin G et les G_n quelconques. $(G_n \cap G^*)$ converge vers G^* et, d'après c., on a $X(G^*) = X(G_n \cap G^*) \supset X(G_n)$ pour tout n assez grand. Comme G^* est ouvert, on a $G^*G_n = G$ si n est assez grand et

$$X(G) = X(G^*G_n) = X(G^*) \cap X(G_n) = X(G_n)$$

C.Q.F.D.

4. Le théorème fondamental.

THÉORÈME 4 ([3], [9]). - Si G opère dans une variété compacte X, l'espace X/G est semi-homogène.

a. On va d'abord montrer le résultat lorsque G opère différentiablement dans une variété différentiable X, en raisonnant par récurrence sur la dimension n de X. Si $n = 0$, le résultat est trivial (X est fini). S'il est vrai pour toute variété X de dimension $m < n$ $(n > 0)$, soit X une variété de dimension n, dans laquelle G opère différentiablement. En vertu de l'hypothèse de récurrence et de la remarque faite après la proposition 1, par tout $x \in X$ passe une dissection locale K_x telle que $K_x/G(x)$ soit semi-homogène et il en résulte que GK_x/G l'est aussi. D'où l'assertion en recouvrant X par un nombre fini de voisinages GK_x (il existe une autre démonstration de ceci due à YANG [10] et un peu différente de la présente due à MOSTOW [8]).

COROLLAIRE 1. - Si G opère différentiablement dans une variété différentiable X, chaque point de X possède un voisinage V stable par G et tel que V/G soit semi-homogène.

COROLLAIRE 2. - L'ensemble des normalisateurs de sous-groupes analytiques de G est semi-homogène.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Si i est l'injection canonique de l'espace des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ dans l'espace projectif $P = P(\wedge \mathfrak{g})$, G opère projectivement dans P au moyen de $\mathrm{ad}(s)$ $(s \in G)$ et on a $si(F) = i(\mathrm{ad}(s)F)$. Si H est un sous-groupe analytique de G, $G(i(\mathfrak{h}))$ (formé des $s \in G$ tels que $\mathrm{ad}(s)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$) est le normalisateur de H. D'où le corollaire puisque l'espace P/G est semi-homogène.

COROLLAIRE 3. - L'ensemble des sous-groupes analytiques semi-simples de G est semi-homogène.

En effet, il n'existe qu'un nombre fini de sous-groupes semi-simples de G ayant le même normalisateur H (car dans $\mathfrak{h}$, il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux semi-simples).

b. Prouvons maintenant le théorème lorsque G est un groupe abélien opérant dans une variété compacte et orientable X. Supposons qu'il existe une suite (x_n) de points de X telle que les $G(x_n)$ soient distincts. On montre que la suite $G(x_n)$ possède une valeur d'adhérence H, où H est un sous-groupe de G. D'après la proposition 2 et le théorème 3 la suite $X(G(x_n))$ est stationnaire : il existe donc des couples d'entiers distincts m, n tels que $X(G(x_m)) = X(G(x_n))$, donc tels que $G(x_m) = G(x_n)$, ce qui est absurde.

c. Prouvons alors le théorème 4 lorsque G est un tore opérant sur une variété compacte non orientable X. On peut supposer X connexe et G opérant fidèlement dans X. Soit (Y, p) un double revêtement orientable de X. On peut recouvrir X par un nombre fini de voisinages $V(x_i)$ de points $x_i \in X$ tels que la restriction de p à chaque composante connexe de $p^{-1}(V(x_i))$ soit un homéomorphisme de celle-ci sur $V(x_i)$ et trouver un voisinage symétrique et connexe U de e dans G tel que, pour tout $x \in X$, Ux soit contenu dans un $V(x_i)$. Si $s \in U$ et $y \in Y$, soit sy le point de $p^{-1}(sp(y))$ appartenant à la composante connexe de y dans un $p^{-1}(V(x_i))$ tel que $Up(y) \subset V(x_i)$. Les $y \longrightarrow sy$ engendrent un groupe G' d'homéomorphismes de Y et il y a un épimorphisme $T : G' \longrightarrow G$ dont le noyau est d'ordre ≤ 2. G' est donc un groupe de Lie, d'après b., l'ensemble des $G'(y)$ est fini. Comme, pour $y \in Y$, $G'(y)$ est un sous-groupe distingué de $T^{-1}(G(p(y))$ d'indice ≤ 2, l'ensemble des $T^{-1}(G(p(y))$ est fini d'après le lemme suivant, et il en est de même de celui des $G(x)$.

C.Q.F.D.

LEMME 5. - Si p est un entier > 0, l'ensemble des sous-groupes fermés de G d'ordres $\leq p$ est semi-homogène.

Supposons en effet qu'il existe une suite (G_n) de sous-groupes fermés de G, mutuellement non conjugués et d'ordres p. On montre que la suite (G_n) possède, dans $\mathcal{F}(G)$, une valeur d'adhérence qui est un sous-groupe fini H de G. D'après la proposition 2, il existe des valeurs de n aussi grandes qu'on veut telles que G_n soit conjugué d'un sous-groupe de H. Par suite, il existe un couple m, n d'entiers distincts tel que G_m et G_n soient conjugués, ce qui est absurde.

d. Supposons enfin X et G quelconques.

LEMME 6. - Soit H un sous-groupe fermé et connexe de G. Les groupes $G(x)/H$, où $x \in X$ est tel que $G(x)^* = H$, sont d'ordre bornés.

On peut supposer que H est distingué en remplaçant au besoin G par le normalisateur de H. Si $G(x)^* = H$, on a $G^*(x) \supset H$, $G(x)/G^*(x) = (G(x)/H)/(G^*(x)/H)$, et $G(x)/G^*(x)$ est un sous-groupe du groupe fini G/G^* d'ordre g. Soit alors T un tore maximal de G^* ; d'après c., il n'existe qu'un nombre fini de sous-groupes $T(x)$, donc qu'un nombre fini de $T(x)H/H$ où x est tel que $G(x)^* = H$. Mais alors, comme $T(x)H/H \subset G(x)/H$ est fini, les $T(x)H/H$ sont d'ordres bornés par un entier h. Soit $x \in X$ avec $G(x)^* = H$ et soit $s \in G(x)$; on a $s^g \in G^*(x)$; comme les conjugués de T recouvrent G^*, il existe $t \in G^*$ tel que $ts^g t^{-1} \in T \cap G(tx) = T(tx)$ et $G(tx)^* = H$, d'où $(ts^g t^{-1})^h \in H$ et $s^{gh} \in H$. Dans le groupe de Lie G/H, soit U un voisinage de H tel que U^{2gh} ne contienne pas de sous-groupe non trivial. On a alors $\mathrm{ord}(G(x)/H)\ \mu(U) \leqslant \mu(G/H)$ où μ est une mesure de Haar sur G/H.

COROLLAIRE. - L'ensemble des $G(x)$ (contenus dans le normalisateur de H) tels que $G(x)^* = H$ est semi-homogène.

C'est une conséquence du lemme 5.

LEMME 7. - L'ensemble des $G(x)^*$ est semi-homogène.

D'après le corollaire 2 de a., il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de $G(x)^*$ ayant même normalisateur. En remplaçant au besoin G par un tel normalisateur, il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes distingués de G de la forme $G(x)^*$ et on peut supposer G connexe puisque $G^*(x)^* = G(x)^*$. Mais, si $x \in X$, on a $G(x)^* = Z(G(x))^* D(G(x)^*)$ où $D(G(x)^*)$ est semi-simple et distingué et où $Z(G(x))^*$ est un tore distingué, donc central de G (car G est connexe). On a donc $Z(G(x))^* = (Z(G)^* \cap G(x))^*$ et, comme $Z(G)^*$ est un tore, il n'y a qu'un nombre fini de $Z(G)^* \cap G(x)$, donc de $Z(G(x))^*$ (d'après b.). D'autre part, il n'y a qu'un nombre fini de $D(G(x)^*)$ d'après le corollaire 3 de a. Il n'y a donc qu'un nombre fini de $G(x)^*$.

Le théorème 4 est alors conséquence immédiate du lemme 7 et du corollaire du lemme 6. En outre, en ajoutant ∞ à $\underset{\sim}{R}^n$, on voit que :

COROLLAIRE 4. - Si G opère dans $\underset{\sim}{R}^n$, l'espace $\underset{\sim}{R}^n/G$ est semi-homogène.

REMARQUE. - Le théorème 4 est inexact si G ou X ne sont pas compacts. On peut ainsi construire une variété analytique non compacte X dans laquelle opère

$\underset{\sim}{T}$ de telle sorte que les $G(x)$ soient tous les sous-groupes finis de $\underset{\sim}{T}$ [10]. Le corollaire (donc le théorème 4) est inexact lorsque G n'est pas compact : on peut fabriquer un sous-groupe algébrique abélien G de $\underset{\sim}{GL}(\underset{\sim}{R}, 3)$, donc opérant linéairement dans $\underset{\sim}{R}^3$, de telle sorte que les $G(\underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3)$ soient tous distincts [8].

5. Compléments.

MOSTOW démontre en outre les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5. - Si X est un espace métrisable, de type dénombrable et de dimension finie dans lequel opère un groupe G, alors pour chaque niveau $N \subset X$, il existe un nombre fini de dissections locales K_i passant par des points de N et telles que les GK_i recouvrent N.

La démonstration en est particulièrement astucieuse. Par recollement convenable des niveaux et utilisation du lemme 1, il prouve ensuite :

THÉORÈME 6. - Si X vérifie les hypothèses du théorème 5 et si X/G est semi-homogène, il existe une représentation orthogonale T de G dans un $\underset{\sim}{R}^n$ et un T-homéomorphisme de X dans $\underset{\sim}{R}^n$; si G opère sans points fixes, $T(G)$ ne laisse fixe que 0.

Inversement, il est clair que, si G est un groupe opérant fidèlement dans un espace X et s'il existe une représentation orthogonale de G dans un $\underset{\sim}{R}^n$ et un T-homéomorphisme de X dans $\underset{\sim}{R}^n$, alors T est fidèle, donc G est de Lie, X est métrisable, de type dénombrable et de dimension finie et X/G est semi-homogène d'après le théorème 4, a. En particulier, si X est une variété compacte où opère un groupe G, on voit que G y opère de la même manière qu'opère dans $\underset{\sim}{R}^n$ un groupe orthogonal. D'ailleurs, dans ce cas, il est facile de fabriquer (par régularisation) des T-plongements réguliers de X dans un $\underset{\sim}{R}^n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups, I. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series n° 8).

[2] FLOYD (E.E.). - Closed coverings in Čech homology theory, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 319-337.

[3] FLOYD (E.E.). - Orbits of torus groups operating on manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 505-512.

[4] GLEASON (A.M.). - Spaces with a compact Lie group of transformations, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 35-43.

[5] KOSZUL (Jean-Louis). - Sur certains groupes de transformations de Lie, Colloque international de Géométrie différentielle [Strasbourg. 1953]. - Paris, C.N.R.S., 1953 (Coll. intern. du C.N.R.S. n° 52) ; p. 137-141.

[6] MONTGOMERY (D.) and YANG (C.T.). - The existence of a slice, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 108-116.

[7] MONTGOMERY (D.), SAMELSON (H.) and YANG (C.T.). - Exceptional orbits of highest dimensions, Annals of Math., t. 64, 1956, p. 136-141.

[8] MOSTOW (G.D.). - Equivariant embeddings in euclidian space, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 432-446.

[9] MOSTOW (G.D.). - On a conjecture of Montgomery, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 513-516.

[10] YANG (C.T.). - On a problem of Montgomery, Proc. Amer. math. Soc., t. 8, 1957, p. 255-257.