SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS KOSZUL

# Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques

*Séminaire N. Bourbaki*, 1958, exp. n° 154, p. 245-254

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__245_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1957)

# FIBRÉS VECTORIELS SUR LES COURBES ELLIPTIQUES

par Jean-Louis KOSZUL

(d'après M.F. ATIYAH [1], [2])

On désigne par $X$ une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Un fibré vectoriel $E$ de base $X$ est dit décomposable lorsqu'il est de dimension 0 ou somme directe de deux sous-fibrés de dimension $> 0$. Tout fibré vectoriel est somme directe d'une famille de sous-fibrés indécomposables. De plus, si $F$ est un fibré indécomposable de base $X$ et si dans une décomposition du fibré $E$ en somme directe d'une famille de sous-fibrés indécomposables il y a $p$ sous-fibrés isomorphes à $F$, alors il en est de même de toute décomposition (théorème du type Krull-Schmidt, cf. [1]). Dans [2], ATIYAH détermine l'ensemble des classes de fibrés indécomposables dont la base est une courbe elliptique non singulière et précise sa structure. Auparavant, seul le cas des courbes de genre 0 était bien connu (cf. [3]).

## 1. Ensembles $J(r, d)$.

On suppose que $X$ est non singulière. Pour tout fibré vectoriel $E$ de dimension $r$, on désigne par $\det E$ le fibré vectoriel de dimension 1, puissance extérieure $r$-ième de $E$ (ses fonctions de passage s'obtiennent en prenant le déterminant des fonctions de passage de $E$). Pour toute suite exacte $0 \to E \to E' \to E'' \to 0$, on a $\det E' \simeq \det E \otimes \det E''$. Si $E$ et $E'$ sont deux fibrés de dimensions $r$ et $r'$ respectivement, on a

$$\det(E \otimes E') \simeq (\det E)^{r'} \otimes (\det E')^{r}$$

les exposants désignant des puissances tensorielles. On appelle degré d'un fibré vectoriel $E$, et l'on note $\deg E$, le degré du fibré $\det E$ (c'est le degré du diviseur qui correspond à $\det E$).

On désignera par $J(r, d)$ l'ensemble des classes de fibrés vectoriels indécomposables de degré $d$ et de dimension $r$. En associant à la classe d'un fibré $E$ la classe du fibré $\det E$, on définit pour tout $r > 0$ et tout $d$ une application $\det : J(r, d) \to J(1, d)$.

Le produit tensoriel définit une structure de groupe abélien dans l'ensemble

$G = \bigcup_d J(1 , d)$ des classes de fibrés indécomposables de dimension 1 . L'inverse de la classe d'un fibré $L$ de dimension 1 est la classe du fibré dual ; l'unité est la classe du fibré trivial $I$ de dimension 1 . Ce groupe $G$ opère (par le produit tensoriel) dans l'ensemble des classes de fibrés indécomposables. On a

$$J(1 , d)\ J(r' , d') \subset J(r', dr' + d')$$

En particulier, $J(1 , 0)$ , qui est la variété de Picard de $X$ , opère dans chaque $J(r , d)$ . Le sous-groupe de stabilité de $G$ opérant dans $J(r , d)$ est constitué par des éléments d'ordre $r$ de $J(1 , 0)$. En effet, si $f \in G$ et si $e \in J(r , d)$ , pour que $fe = e$ , il est nécessaire que $\det(fe) = \det(e)$ , donc que

$$f^r \det(e) = \det(e)$$

et par suite $f^r = 1$ .

Si $a \in J(1 , 1)$ , l'application $e \longrightarrow ae$ est une bijection de $J(r , d)$ sur $J(r , d + r)$ quels que soient $r$ et $d$ . Cette remarque servira dans la suite à ramener la détermination de $J(r , d)$ à celle de $J(r , d')$ où $d'$ est le reste de la division de $d$ par $r$ .

2. Clivages.

Dans la suite on considère uniquement des fibrés vectoriels dont la base est une courbe non singulière $X$ de genre $g$ .

Toute section méromorphe d'un fibré $E$ de base $X$ engendre un sous-fibré de dimension 1 . Il existe donc toujours un clivage de $E$ , c'est-à-dire une suite de sous-fibrés emboités $E = E_r \supset E_{r-1} \cdots E_0 = (0)$ telle que $\dim E_i = i$ (un clivage correspond à une réduction du groupe de structure au groupe triangulaire). En appliquant l'égalité de Riemann-Roch aux quotients $E_i/E_{i-1}$ d'un clivage on obtient une égalité de Riemann-Roch pour la cohomologie de $X$ à valeurs dans le faisceau $\underline{E}$ des germes de sections régulières de $E$ :

$$\dim H^0(X , \underline{E}) - \dim H^1(X , \underline{E}) = dg\ E + \dim E(1 - g) .$$

On utilisera aussi la dualité de SERRE (cf.[4],) entre les espaces $H^0(X , \underline{E})$ et $H^1(X , \underline{E^* \otimes K})$ , où $K$ est le fibré canonique de la courbe $X$ .

3. Degrés des sous-fibrés de dimension 1 .

Soit $E_i (i = 0 , 1 , \ldots , r)$ un clivage du fibré vectoriel $E$ et soit $L$ un sous-fibré de dimension 1 de $E$ . Pour un indice $i$ , il existe un homomorphisme non nul de $L$ dans $E_i/E_{i-1}$ , donc $dg\ L \leq dg\ E_i/E_{i-1}$ . Le degré des sous-fibrés

de dimension 1 de E est donc borné supérieurement.

LEMME 1. - Soient E un fibré vectoriel et L un sous-fibré de dimension 1 et de degré maximal dans E . Tout sous-fibré de dimension 1 de E/L est de degré au plus égal à 2g + dg L .

Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où dim E = 2 . La suite exacte

$$0 \to I \to L^* \otimes E \to L^* \otimes E/L \to 0$$

donne

$$g - \dim H^0 (X , \underline{L^* \otimes E/L}) + \dim H^0(X , \underline{L^* \otimes E}) - 1 \geqslant 0 .$$

D'autre part (égalité de Riemann-Roch pour $L^* \times E/L$) :

$$\dim H^0(X , L^* \otimes E/L) - \dim H^1(X , L^* \otimes E/L) = dg\, E/L - dg\, L + 1 - g .$$

Par suite, $\dim H^0(X , L^* \otimes E) \geqslant 2(1 - g) + dg\, E/L - dg\, L$ . Si $dg\, E/L - dg\, L - 2g > 0$, alors $\dim H^0(X , L^* \otimes E) \geqslant 3$ . Puisque $L^* \otimes E$ est de dimension 2 , il existerait donc une section de degré $>0$ dans $L^* \otimes E$ . Soit M le sous-fibré engendré par cette section ; E contiendrait un sous-fibré isomorphe à $L \otimes M$ , donc de degré égal à $dg\, L + dg\, M > dg\, L$ , contrairement à l'hypothèse.

LEMME 2. - Soient E un fibré vectoriel et L un sous-fibré de dimension 1 de E . Si E est indécomposable, et si $E/L \neq (0)$ , il existe dans E/L un sous-fibré L' de dimension 1 tel que

$$dg\, L' \geqslant dg\, L - 2(g - 1) .$$

Puisque E est indécomposable, l'extension $0 \to L \to E \to E/L \to 0$ n'est pas triviale. Or on démontre que, comme dans la théorie homologique des extensions de modules, les classes d'extensions de E/L par L sont en correspondance bijective avec les éléments de $H^1(X , \underline{Hom(E/L , L)})$. Par conséquent, $H^1(X , \underline{Hom(E/L , L)}) \neq (0)$ d'où, par dualité, $H^0(x , \underline{Hom(L \otimes K^*, E/L)}) \neq (0)$ , K désignant le fibré canonique de X . Soit alors f un homomorphisme non nul de $L \otimes K^*$ dans E/L . Son image engendre un sous-fibré L' de dimension 1 tel que $dg\, L' \geqslant dg(L \otimes K^*) = dg\, L - 2(g - 1)$.

THÉORÈME 1 (GROTHENDIECK [3]). - Si X est une courbe de genre 0 , tout fibré vectoriel indécomposable de base X est de dimension 1 .

Résulte immédiatement des lemmes 1 et 2.

Un clivage $E_i$ (i = 0 , 1 , ... , r) du fibré vectoriel E est dit maximal

lorsque, pour tout $i$, $E_i/E_{i-1}$ est un sous-fibré de degré maximal dans l'ensemble des sous fibrés de dimension 1 de $E_i/E_{i-1}$. Tout fibré vectoriel possède évidemment un clivage maximal.

LEMME 3. - Soient $E$ un fibré vectoriel indécomposable et $E_i$ $(i = 0, 1, \dots, r)$ un clivage maximal de $E$ : on a pour tout $i > 0$

$$dg(E_i/E_{i-1}) \geqslant dg\, E_1 + 2(1 - g)(i - 1) .$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur $i$ en appliquant le raisonnement du lemme 2 aux suites exactes $0 \to E_i \to E \to E/E_i \to 0$.

THÉORÈME 2. - Soit $E$ un fibré vectoriel indécomposable de dimension $r$ et de degré $d$ et soit $L$ un sous-fibré de dimension 1 de $E$. On a :

$$dg\, L \leqslant d/r + (r - 1)(g - 1)$$

Résulte du lemme 3 par sommation.

COROLLAIRE. - Soit $X$ une courbe elliptique et soit $E$ un fibré vectoriel indécomposable de base $X$, de degré $d$ et de dimension $r$ :

- si $d < r$, alors les sections de $E$ engendrent un sous-fibré trivial maximal de dimension égale à $\dim H^0(X, \underline{E})$
- si $d > 0$, alors $\dim H^0(X, \underline{E}) = d$.

En effet, si $d < r$ et si $g = 1$, le théorème montre que toutes les sections de $E$ sont de degré 0. Si $d > 0$, alors $dg\, E^* = -d < 0$ donc d'après le théorème, $E^*$ n'a pas de section $\neq 0$ et, par dualité, on en déduit que $H^1(X, \underline{E}) = (0)$. L'égalité de Riemann-Roch donne alors $\dim H^0(X, \underline{E}) = d$.

4. Fibrés indécomposables de degré 0 sur une courbe elliptique.

On considère dans la suite des fibrés vectoriels dont la base est une courbe elliptique $X$.

LEMME 4. - Soit $F$ un fibré indécomposable de degré 0 tel que $H^0(X, \underline{F}) \neq (0)$ et soit $F'$ le sous-fibré de $F$ orthogonal au sous-fibré trivial maximal de $F^*$. Si $\dim F > 1$, alors

- $F'$ est indécomposable et de degré 0,
- $\dim H^0(X, \underline{F}) = \dim H^0(X, \underline{F'})$.

Posons $s = \dim H^0(X, \underline{F})$. La dualité et l'égalité de Riemann-Roch donnent :

dim $H^0(X , \underline{F}^*) = \dim H^1(X , \underline{F}) = s$ . Le fibré $T = F/F'$ est trivial et de dimension $s$ , car isomorphe au dual du sous-fibré trivial maximal de $F^*$ . Par suite dg $F' = 0$ . L'homorphisme $d : H^0(X , \underline{T}) \to H^1(X , \underline{F}')$ défini par la suite exacte $0 \to F' \to F \to T \to 0$ est surjectif. En effet dim $H^1(X , \underline{F}) = s = \dim H^1(X , \underline{T})$. Il est injectif, car son noyau est l'espace des sections d'un sous-fibré de $T$ image d'un facteur direct de $F$ qui ne peut être $F$ lui même puisque dim $F > 1$ . Si $F'$ se décomposait en $F' = F'_1 + F'_2$ , l'espace $H^0(X , \underline{T})$ se décomposerait en $d^{-1} H^1(X , \underline{F}'_1) + d^{-1} H^1(X , \underline{F}'_2)$ et cette décomposition donnerait une décomposition de $T$ en $T = T_1 + T_2$ telle que $F$ soit somme directe d'une extension de $T_1$ par $F'_1$ et d'une extension de $T_2$ par $F'_2$ . Puisque $F$ est indécomposable, ceci démontre la première assertion. La seconde résulte de ce que $d$ est injectif.

LEMME 5. - Les hypothèses étant celles du lemme 6, dim $H^0(X , \underline{F}) = 1$ et $F$ possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux.

Cela résulte facilement du lemme 4 par récurrence sur la dimension.

THÉORÈME 3. - Soit $E$ un fibré indécomposable, de degré $0$ et de dimension $r$ . Il existe dans $E$ un sous-fibré et un seul de dimension $1$ et de degré $0$ . L'application qui associe à la classe de $E$ la classe de son sous-fibré de dimension $1$ et de degré $0$ est une bijection $\mu_{r,0}$ de $J(r , 0)$ sur $J(1 , 0)$ .

Démontrons la première assertion :

- Existence. - Soit $A$ un fibré de degré $1$ et de dimension $1$ . Le fibré $E \otimes A$ est de degré $r$ et de dimension $r = \dim E$ . Du lemme 4 résulte que dim $H^0(X , E \otimes A) = r$ . Mais d'après le théorème 2, les sections de $E$ sont de degré $0$ ou $1$ . Si elles étaient toutes de degré $0$ , le fibré $E \otimes A$ serait trivial, ce qui n'est pas puisque son degré est $r$ . Soit $M$ le sous-fibré de dimension $1$ engendré par une section de degré $1$ dans $E \otimes A$ . Le fibré $E$ contient un sous-fibré isomorphe à $A^* \otimes M$ qui est de degré $0$ .

- Unicité. - Soit $L$ un sous-fibré de dimension $1$ et de degré $0$ dans $E$ . En appliquant le lemme 5 à $L^* \otimes E$ , on voit que $E$ possède un clivage dont tous les quotients sont isomorphes à $L$ . Si $L'$ est un sous-fibré de dimension $1$ et de degré $0$ dans $E$ , il existe donc un homomorphisme non nul de $L'$ dans $L$ . Donc $H^0(X , \underline{L'^* \otimes L}) \neq 0$ et puisque $L'^* \otimes L$ est de degré $0$ , on a $L' \simeq L$ . Or d'après le lemme 5, $H^0(X , \underline{L^* \otimes E})$ est de dimension $1$ . Donc $L' = L$ .

La seconde assertion se démontre par récurrence sur la dimension.

COROLLAIRE. - Si $F_r$ est un fibré indécomposable de dimension $r$ et de degré 0 tel que $H^0(X , F_r) \neq (0)$ , alors $F_r^* \simeq F_r$ .

En effet $F_r$ possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux, (lemme 5), donc $F_r^*$ contient un sous-fibré trivial de dimension 1 , ce qui entraîne $F_r^* \simeq F_r$ d'après le théorème.

5. Bijections $\mu_{r,d} : J(r , d) \to J(1 , 0)$ .

On a vu au n° 1 que la détermination des $J(r , d)$ se ramenait au cas où $0 \leq d < r$ . Le cas $d = 0$ a été traité au n° 4 ; il reste donc le cas $0 < d < r$. On dispose alors d'un processus diminuant la dimension qui est donné par le lemme suivant.

LEMME 6. - Soit $E$ un fibré indécomposable de degré $d$ , de dimension $r$ avec $0 < d < r$ et soit $T$ le sous-fibré trivial maximal de $E$ .

- le fibré $E/T$ est indécomposable,
- l'application $\lambda_{r,d}$ de $J(r , d)$ dans $J(r - d , d)$ qui associe à la classe de $E$ la classe de $E/T$ est une bijection.

La démonstration repose sur les mêmes méthodes que celles du théorème 3.

En combinant les bijections $\lambda_{r,d}$ avec les bijections $J(r , d) \to J(r , d + r)$ définies par une classe $a \in J(1 , 1)$ (cf. n° 1), on obtient une bijection de $J(r , d)$ sur $J(h , 0)$ où $h$ est le plus grand commun diviseur $(r , d)$ . En définitive :

THÉORÈME 4. - Soit une classe $a \in J(1 , 1)$ . Il existe une famille de bijections $\mu_{rd} : J(r , d) \to J(1 , 0)$ et une seule telle que

1. $\mu_{r,o}$ est l'application du théorème 3,
2. $\mu_{r,d}(e) = \mu_{r,d+nr}(a^n e)$ pour tout $e \in J(r , d)$ et tout entier $n$ .
3. si $0 < d < r$ , alors $\mu_{r,d} = \mu_{r-d,d} \lambda_{r,d}$

(où $\lambda_{r,d}$ est la bijection définie au lemme 6).

On raisonne par récurrence sur $r$ en s'appuyant sur le théorème 3 et le lemme 6.

On notera dans la suite $e_a(r , d)$ la classe appartenant à $J(r , d)$ telle que $\mu_{r,d}(e_a(r , d)) = 1$ (classe du fibré trivial de dimension 1). On a $e_a(1 , d) = a^d$ et pour tout $r > 0$ , $e_a(r , 0)$ est la classe des fibrés indécomposables de degré 0 de dimension $r$ ayant des sections $\neq 0$ .

6. Opérations de $J(1\ ,\ 0)$ dans $J(r\ ,\ d)$ .

THÉORÈME 5. - Le groupe $J(1\ ,\ 0)$ opère transitivement dans $J(r\ ,\ d)$ , le groupe de stabilité étant constitué par les éléments d'ordre $\frac{r}{(r\ ,\ d)}$ .

Pour $d = 0$ , cela résulte immédiatement du théorème 3. Le cas général exige une étude assez longue du comportement des bijections $\lambda_{r,d}$ vis-à-vis des opérations de $J(1\ ,\ 0)$ . Indiquons seulement comment on procède dans le cas $(r\ ,\ d) = 1$ . Dans ce cas, l'application $\det : J(r\ ,\ d) \to J(1\ ,\ d)$ est bijective. C'est évident pour $r = 1$ et $d = 0$ . Le cas général s'en déduit par récurrence sur $r$ en observant que $\det(ae) = a^r \det(e)$ et $\det(\lambda_{r,d})\ e) = \det(e)$ pour $e \in J(r\ ,\ d)$. Puisque pour $f \in J(1\ ,\ 0)$ et $e \in J(r\ ,\ d)$ on a $\det(fe) = f^r \det(e)$ , il en résulte que $fe = e$ équivaut à $f^r = 1$ .

7. Structure de l'anneau des classes de fibrés.

Soit $S$ le $Z$-module libre ayant pour base l'ensemble des classes de fibrés indécomposables dont la base est une courbe elliptique $X$ sur un corps de caractéristique 0 . Les classes de fibrés (décomposables ou non) s'identifient aux combinaisons linéaires à coefficients entiers $\geqslant 0$ de la base de $S$ . Il existe dans le groupe abélien $S$ une structure d'anneau et une seule telle que la classe du fibré $E \otimes E'$ soit le produit des classes de $E$ et de $E'$ . L'anneau $S$ est commutatif. On désignera par $S(r\ ,\ d)$ le $Z$-sous-module de $S$ ayant pour base $J(r\ ,\ d)$ . On pose $\Lambda = \sum_d S(1\ ,\ d)$ . C'est évidemment un sous-anneau de $S$ contenant l'unité $1 = e_a(1\ ,\ 0)$ . Pour tout entier $r > 0$ , on notera $\Lambda(r)$ l'idéal de $\Lambda$ engendré par les éléments de la forme $e - 1$ où $e$ parcourt l'ensemble des éléments d'ordre $r$ dans $J(1\ ,\ 0)$.

(a) L'annulateur de $e_a(r\ ,\ d)$ considéré comme élément du $\Lambda$-module $S$ est $\Lambda(\frac{r}{(r\ ,\ d)})$

On désigne par $B$ la famille des $e_a(r\ ,\ d)$ tels que $0 \leqslant d < r$ .

(b) Considéré comme $\Lambda$-module , $S$ est somme directe des sous-modules monogènes engendrés par les éléments de $B$ .

On pose $$T_o = \sum_{r,m} S(r\ ,\ mr).$$

(c) Considéré comme $\Lambda$-module , $T_o$ est un module libre admettant pour base les éléments $f_r = e_a(r\ ,\ 0)$. De plus, $T_o$ est un sous-anneau de $S$ contenant $\Lambda$ et sa table de multiplication en tant qu'algèbre sur $\Lambda$ est :

$$f_r f_s = f_{r-s+1} + f_{r-s+3} + \dots + f_{r+s-1} \quad (r \geqslant s) .$$

Pour tout nombre premier $p$, on pose $T_p = \sum_{k,d} S(p^k, d)$, la somme étant étendue à tous les entiers $k \geqslant 0$ et à tous les entiers $d$ tels que $(p, d) = 1$.

(d) Pour tout premier $p$, $T_p$ est un sous-anneau de $S$ contenant $\wedge$.

Soit $\pi$ la suite des entiers premiers ou nul. On notera $T$ le produit tensoriel restreint de la famille des $\wedge$-algèbres $(T_i)_{i \in \pi}$. Les inclusions $T_i \to S$ définissent un homomorphisme canonique $\theta : T \longrightarrow S$.

(e) L'homomorphisme $\theta$ est bijectif.

L'algèbre $S$ est donc déterminée par $\theta$ et par les algèbres $T_i$. Pour $i = 0$, voir (c). Pour tout entier premier $p$, $T_p$ est somme directe des $\wedge$-sous-modules monogènes engendrés par les éléments $e_a(p^k, d)$ avec $(d, p) = 1$ et $0 \leqslant d < p^k$ c'est-à-dire les éléments de $B \cap T_p$. Comme on connait les annulateurs dans $\wedge$ de ces éléments, il suffit de connaitre les produits de deux éléments de $T_p \cap B$.

(f) Si $p \neq 2$ et si $k$, $k'$, $d$, $d'$ sont des entiers tels que $k, k' \geqslant 0$, $0 \leqslant d < p^k$, $0 \leqslant d' < p^{k'}$, $(p, d) = (p, d') = 1$, alors on a

$$e_a(p^k, d) e_a(p^{k'}, d') = \begin{cases} p^{k'} e_a(p^k, p^{k-k'} d' + d) & \text{si } k > k' \\ p^{s-k}(\sum e_i) e_a(p^k, \dfrac{d+d'}{p^s}) & \text{si } k = k' \\ & \text{et } p^s = (p^k, d + d') \end{cases}$$

(la somme $\sum e_i$ étant la somme des éléments d'ordre $p^k$ de $J(1, 0)$.

La dernière formule a un sens car $(\sum e_i)\, e_a(p^k, \frac{d+d'}{p^s})$ est dans $p^{k-s} S$. Pour $p = 2$, les formules (f) sont probablement encore vraies ; il est démontré qu'elles le sont à conditions d'ajouter aux seconds membres un facteur $e \in J(1, 0)$.

Indication sur les démonstrations. - (a) n'est qu'une nouvelle formulation du théorème 4, et (b) est évident.

(c). La première assertion résulte de (b). La caractéristique nulle intervient dans la seconde. Si $F_r$ et $F_s$ sont deux fibrés appartenant respectivement aux classes $f_r$ et $f_s$, alors $F_r \otimes F_s$ possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux (cela résulte du lemme 5). Tout sous-fibré de dimension 1 et de degré $\geqslant 0$ dans $F_r \otimes F_s$ est donc trivial. Soit $E$ un sous-fibré de $F_r \otimes F_s$. On a

$dg\ E \leqslant 0$ , car si $dg\ E > 0$ alors pour tout fibré non trivial $L$ de dimension 1 et de degré 0 on aurait $dg\ (L^* \otimes E) > 0$ ce qui d'après l'égalité de Riemann-Roch entraînerait l'existence d'un homomorphisme non nul de $L$ dans $E$ dont l'image serait un sous-fibré non trivial de dimension 1 et de degré $\geqslant 0$ . Puisque $F_r \otimes F_s$ est isomorphe à son dual, tout sous-fibré facteur direct de $F_r \otimes F_s$ est donc somme directe d'une famille sous-fibrés indécomposables de degré 0 . Comme ces sous-fibrés ne contiennent pas de sous-fibré de dimension 1 de degré $\geqslant 0$ non trivial, $F_r \otimes F_s = \sum_{i=1}^{i=k} F_{r_i}$ où $F_{r_i}$ est de classe $f_{r_i}$ pour tout $i$ . Par récurrence sur $r$ , on voit facilement que, si $r \leqslant s$ , alors $H^0(X\ ,\ F_r \otimes F_s) = r$ . Puisque $\dim H^0(X\ ,\ F_{r_i}) = 1$ pour tout $i$ , on a $k = \min(r\ ,\ s)$ . Finalement, on voit que

$$(1) \qquad f_r f_s = \sum_{i=1}^{i=\min(r,s)} f_{r_i} \qquad rs = \sum_i r_i \ .$$

D'autre part, $F_r \otimes F_r \simeq \mathrm{Hom}(F_r\ ,\ F_r)$ contient un sous-fibré trivial de dimension 1 engendré par la bijection identique de $F_r$ . Puisque le corps de base est supposé de caractéristique 0 , ce sous-fibré est supplémentaire du sous-fibré des éléments de trace nulle dans $\mathrm{Hom}(F_r\ ,\ F_r)$ . Ainsi,

$$f_r^2 - 1 \text{ est combinaison linéaire à coefficients } \geqslant 0 \text{ des } f_i \ .$$

Un simple calcul permet alors de déduire (c) de cette dernière condition et de (1) . La formule donnée par (c) est liée aux formules donnant le produit tensoriel de deux puissances symétriques d'un espace vectoriel de dimension 2. En fait, on en déduit que $f_r$ est la classe de la $(r - 1)$-ième puissance symétrique d'un fibré de classe $f_2$ .

(d). La démonstration repose sur la formule :

$$(2) \qquad e_a(r\ ,\ d)\ e_a(r'\ ,\ d') = e_a\ (rr'\ ,\ rd' + r'd)$$

valable lorsque $(r\ ,\ d) = (r'\ ,\ d') = (r\ ,\ r') = 1$ .

(e). Soit $B'$ l'ensemble des éléments de $T$ de la forme

$$f_h \otimes e_a(2^k\ ,\ d_2) \otimes e_a(3^k\ ,\ d_3) \ldots \otimes e_a(p^k\ ,\ d_p) \otimes \ldots$$

avec $(d_p\ ,\ p) = 1$ ,

$0 \leqslant d_p < p^k$ et $k = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers premiers $p$ .. On vérifie que $T$ est somme directe des sous-modules monogènes engendrés par les éléments

de $B'$ . Puis on vérifie que $\theta : T \to S$ induit une bijection de $B'$ sur $B$ . Cela utilise (2) et la formule

$$f_h \, e_a(r , d) = e_a(rh , dh) \tag{3}$$

valable lorsque $(r , d) = 1$ . On montre alors que l'annulateur dans $\bigwedge$ d'un élément de $B'$ est le même que celui de son image par $\theta$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M.F.). - On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 307-317.

[2] ATIYAH (M.F.). - Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London math. Soc., t. 7, 1957, p. 414-452.

[3] GROTHENDIECK (A.). - Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 121-138.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Théorèmes de dualités pour les faisceaux algébriques cohérents, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57.