SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ WEIL

Sur le théorème de Torelli

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 151, p. 207-211

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__207_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1957)

SUR LE THÉORÈME DE TORELLI

par André WEIL.

Une courbe algébrique de genre $g>1$ dépend, dit-on, de $3g-3$ "modules" (quel que soit le sens qu'il faille attribuer à cette phrase !). Mais ses intégrales de 1e espèce, normalisées comme il est d'usage dans la théorie classique au moyen d'un système de "rétrosections", admettent une matrice de périodes qui est symétrique et contient donc $g(g+1)/2$ coefficients indépendants. Rien n'interdit de conjecturer que ceux-ci déterminent entièrement les "modules" de la courbe, et qu'il y a entre eux $\frac{g(g+1)}{2} - 3g+3 = \frac{(g-2)(g-3)}{2}$ relations ; et on ne s'en est pas fait faute depuis 100 ans que la théorie existe.

Le but du théorème de Torelli est de démontrer la première assertion après lui avoir donné un sens précis. En réalité, il s'agit d'un théorème de géométrie algébrique abstraite. Cela apparaîtrait déjà chez TORELLI, s'il avait énoncé clairement ce qu'il démontre. La démonstration de TORELLI a d'ailleurs de nombreux points obscurs, et il pourrait être intéressant de la tirer au clair. ANDREOTTI a esquissé une démonstration fondée sur un principe différent, mais qui laisse subsister des difficultés techniques sérieuses. Ce qui suit constitue une variante de l'idée d'ANDREOTTI ; une autre variante, récemment développée par ANDREOTTI, promet de donner une démonstration nettement plus simple lorsqu'elle aura été mise au point.

Pour formuler le théorème, on a besoin de la notion de variété abélienne <u>polarisée</u>. Dans le cas classique, soit A un tore complexe, défini comme quotient d'un vectoriel E de dimension n sur les complexes par un sous-groupe discret G de rang $2n$; pour qu'il y ait, sur A, n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, il faut et il suffit qu'il y ait sur $E \times E$ une forme hermitienne positive non dégénérée dont la partie imaginaire induise sur $G \times G$ une forme alternée F à valeurs entières ; celle-ci s'appelle alors une forme de Riemann pour G ; on peut construire, au moyen de tout multiple entier de F, des fonctions thêta sur E, relatives à G ; on dit alors que A est une variété abélienne. On dit que A est <u>polarisée</u> si on l'a munie de la structure additionnelle définie par la donnée de F à un facteur près ; autrement dit, une variété abélienne polarisée est un "objet composite" (A,F), étant entendu qu'on identifie (A,F) et (A,F') si $F' = rF$, r rationnel $\neq 0$. En termes abstraits, on dira qu'une variété abélienne A est polarisée si on s'y est donné un diviseur positif

X non dégénéré (ce qui veut dire : invariant par un nombre fini de translations au plus), étant entendu que X et X' déterminent la même polarisation sur A s'il y a des entiers m , $m' > 0$ tels que $mX \equiv m'X'$ (ce qui peut se remplacer par : mX algébriquement équivalent à $m'X'$ sans changer le contenu de la définition).

En théorie classique, les périodes des intégrales normalisées d'une courbe C de genre g définissent une variété abélienne J , dite jacobienne de C ; le fait que la matrice des périodes est symétrique équivaut à dire que cette matrice admet une forme de Riemann F , qui se présente d'elle-même sous la forme $\sum (X_i Y_i' - X_i' Y_i)$ (topologiquement parlant, elle n'est autre que la forme bilinéaire donnant le nombre d'intersection pour les courbes sur la surface de Riemann de C), et a donc tous ses diviseurs élémentaires (sur C × C) égaux à 1 ; on exprime ce dernier fait en disant que J , polarisée par F , appartient à la "famille principale" des variétés abéliennes polarisées de dimension g . En théorie abstraite, la jacobienne J d'une courbe C de genre g peut de même être polarisée au moyen d'un diviseur Θ , défini canoniquement à une translation près, qui s'obtient comme suit : si φ est l'application canonique de C dans J (elle-même définie seulement à une translation près), Θ sera la variété ensemble des points $\varphi(M_1)+\ldots+\varphi(M_{g-1})$; dans le cas classique, la polarisation de J par Θ équivaut à la polarisation par la forme F mentionnée plus haut.

Désormais, toute jacobienne sera considérée comme polarisée "canoniquement" c'est-à-dire au moyen du diviseur Θ .

On observera que, si A est une variété abélienne polarisée, l'application $u \to -u$ est un automorphisme de A . D'après un théorème de MATSUSAKA, les automorphismes d'une variété abélienne polarisée sont d'ailleurs toujours en nombre fini (ce qui n'est pas vrai si on ne polarise pas).

Le théorème de Torelli est alors le suivant : Soient C , C' deux courbes, φ et φ' leurs applications canoniques dans leurs jacobiennes J , J' . Alors, s'il y a un isomorphisme α de J sur J' (au sens : variétés polarisées !) , il y a une application $f = \pm \alpha + c$ (c = constante) de J sur J' qui amène $\varphi(C)$ sur $\varphi'(C')$. Comme on sait que φ est un isomorphisme de C sur $\varphi(C)$, et de même pour φ' , cela implique naturellement que C et C' sont isomorphes. La question d'unicité se résout trivialement ; f est unique, sauf si C est hyper-elliptique, le signe $\pm$ peut, pour des raisons évidentes, être choisi

arbitrairement, et son choix détermine c d'une manière unique.

Evidemment, tout se ramène, sachant qu'une variété polarisée J est la jacobienne d'une courbe C , à donner un procédé de construction de C et de φ qui se serve uniquement de données dépendant de la structure de J . On commence (ce qui est très facile) par montrer que la famille de variétés formée de Θ et de ses translatées est canoniquement déterminée par la polarisation de J . Cela liquide déjà la question pour $g = 2$, puisque dans ce cas on a $\Theta = \varphi(C)$. On notera que toute courbe de genre 2 est hyperelliptique. Pour $g = 2$, une analyse un peu plus poussée montre que toute variété polarisée de dimension 2 appartenant à la "famille principale" (définie plus haut seulement pour le cas classique ; on omet ici, pour abréger, l'extension de la définition au cas abstrait, qui soulève quelques difficultés) est, soit une jacobienne, soit un produit de deux courbes elliptiques. Le théorème analogue pour $g = 3$ est vraisemblable mais n'a jamais été complétement démontré. Dans tout ce qui suit, on supposera $g \geqslant 3$.

Pour expliquer le principe de la démonstration, on négligera complétement le cas des courbes hyperelliptiques (ce n'est pas de celles-ci que proviennent les principales difficultés). On notera X_a l'image par la translation $\underline{a}$ d'une variété X sur J . On notera W la variété ensemble des points $\varphi(M_1) + \ldots + \varphi(M_{g-2})$, et W' l'image de W par $u \to -u$. On constate sans aucune difficulté que, si P , Q sont deux points distincts sur C et qu'on pose $a = \varphi(P-Q)$, l'intersection (ensembliste) $\Theta \cap \Theta_a$ est réunion de deux variétés $W_{\varphi(P)}$ et $W'_{-\varphi(Q)}$; elle est donc réductible, car une translatée de W' ne peut coïncider avec une translatée de W si C n'est pas hyperelliptique.

Soit V la variété ensemble des points $\varphi(P-Q)$. Si on savait que $\Theta \cap \Theta_a$ est irréductible chaque fois que $a \notin V$, on pourrait raisonner comme suit.

La surface V est caractérisée (d'une manière invariante !) comme réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des points tels que $\Theta \cap \Theta_a$ soit réductible ; on notera en effet que cette dernière propriété ne change pas si on remplace Θ par une translatée de Θ , et dépend donc uniquement de la polarisation de J . De plus, considérons l'ensemble des variétés qui se présentent comme composantes d'une intersection $\Theta \cap \Theta_a$ lorsque $\underline{a}$ parcourt $V - \{0\}$ c'est l'ensemble des variétés $W_{\varphi(P)}$, $W'_{-\varphi(Q)}$. Comme d'autre part on constate (facilement aussi) que W n'est invariante par aucune translation, il s'ensuit que les translations appliquant une variété fixe de cet ensemble sur une variété quelconque du même

ensemble sont, soit toutes de la forme $\varphi(M) - \varphi(P)$, soit toutes de la forme $\varphi(P) - \varphi(M)$, avec P fixe et M variable; ces translations forment donc une famille à un paramètre qui ne diffère de la courbe $\varphi(C)$ que par une translation éventuellement suivie d'une "symétrie" $u \to -u$. Si, dans tout cela, on remplace Θ par une translatée de Θ, le résultat final n'est modifié que par une translation. Telle est, en principe, la construction cherchée.

Malheureusement (pour la simplicité de la démonstration), il n'est pas toujours vrai que $a \notin V$ entraîne que $\Theta \cap \Theta_a$ soit irréductible. On peut montrer que c'est vrai lorsque J n'admet aucun endomorphisme non trivial (aucune "multiplication complexe"), ce qui, d'après un théorème de SEVERI, est bien le cas pour une courbe "à modules génériques" (sic). La question est liée à la suivante : soit $\sum$ une "série linéaire complète" sans point fixe, de degré $2g-2$ sur C, autre que la série canonique ; on peut la considérer comme formée par les sections hyperplanes d'une courbe Γ de degré $2g-2$, birationnellement équivalente à C, dans un espace projectif de dimension $g-2$. Soit H un hyperplan générique dans cet espace, sur un corps de définition K de Γ. Soit $K(H)$ son plus petit corps de définition contenant K. Alors $M = H.\Gamma$ sera un diviseur générique de $\sum$, de la forme $M_1+\ldots+M_{2g-2}$, où les M_i sont séparablement algébriques et conjugués les uns des autres sur $K(H)$. Soit $a = \varphi(M-H)$, où H est diviseur canonique. Alors, pour que $\Theta \cap \Theta_a$ soit irréductible, il faut et il suffit que le groupe de Galois de $K(H,M_1,\ldots,M_{2g-2})/K(H)$, considéré comme groupe de permutations sur les M_i, soit $g-1$ fois transitif. Il n'en est pas toujours ainsi ; mais, en suivant cette idée, on arrive du moins à démontrer le lemme suivant : si $g \geqslant 5$, et si $a \notin V$, ou bien $\Theta \cap \Theta_a$ est irréductible, ou bien l'une des composantes irréductibles de $\Theta \cap \Theta_a$ admet un groupe de translations qui est une sous-variété abélienne de J (non réduite à 0). Comme cela donne une caractérisation "intrinsèque" de V, la démonstration s'achève suivant le modèle ci-dessus. Pour $g=3$ et $g=4$ des complications techniques interviennent dans la démonstration du lemme, de sorte qu'on ne sait pas si la conclusion reste vraie ; on se débrouille alors pour caractériser V par les moyens du bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] TORELLI (Ruggiero). - Sulle varietà di Jacobi, Atti Accad. Lincei Rend. Cl. Sc. fis. mat. nat., 5e série, t. 22, 2e partie, 2e semestre 1913, p. 98-103.

[2] ANDREOTTI (Aldo). - Recherches sur les surfaces algébriques irrégulières, Acad. roy. Belgique, Cl. Sc., Mém. Coll. in 8°, t. 27, 1952, p. 36.

[3] WEIL (André). - Zum Beweis des Torellischen Satzes, Nachr. Akad. Wissensch. Göttingen, math.-phys. Klasse, n° 2, 1957, p. 33-53.