SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SERRE

Critère de rationalité pour les surfaces algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 146, p. 125-138

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__125_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Février 1957)

CRITÈRE DE RATIONALITÉ POUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES

par Jean-Pierre SERRE

(d'après un cours de K. KODAIRA (Princeton, Novembre 1956)).

1. Définitions.

Dans tout ce qui suit, V désignera une surface algébrique, projective, non singulière, définie sur un corps k algébriquement clos. Des résultats complets ne seront obtenus que lorsque k est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, mais nous indiquerons au fur et à mesure ce qui reste valable en caractéristique $p > 0$.

Par une courbe sur V, on entendra toujours une courbe irréductible. Un diviseur est un élément du groupe libre engendré par les courbes ; on dit qu'il est $\geqslant 0$ si tous ses coefficients sont $\geqslant 0$. Si f est une fonction rationnelle non identiquement nulle, on sait définir le diviseur des zéros $(f)_0$ et le diviseur des pôles $(f)_\infty$ de f ; on pose $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ et l'on dit que deux diviseurs D et D' sont équivalents s'il existe une fonction f telle que $D - D' = (f)$. On notera $|D|$ l'ensemble des diviseurs positifs équivalents à D, et L(D) l'espace vectoriel des fonctions f telles que $(f) \geqslant -D$; c'est un espace de dimension finie dont l'espace projectif associé est $|D|$; on posera

$$\ell(D) = \dim L(D) .$$

On notera K le diviseur d'une différentielle de degré 2 de V ; la classe d'équivalence de K ne dépend pas de la différentielle choisie, c'est la classe canonique de V. Pour tout entier n, on posera :

$$P_n = \ell(nK) . \tag{1}$$

Les P_n sont appelés les plurigenres de V.

PROPOSITION 1. - Soient V et V' deux surfaces, et soit $f : V \to V'$ une application rationnelle telle que l'extension $k(V)/k(V')$ soit séparable de degré fini. On a alors $P_n(V') \leqslant P_n(V)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Soit S l'ensemble des points où f n'est pas régulière ; c'est un ensemble fini. Tout élément $\omega \in L(n\,K(V'))$ peut être considéré comme une "forme différentielle de degré 2 et de poids n", soit $\omega = \varphi(dx \wedge dy)^n$, régulière sur V'. L'image réciproque de ω par f, soit $f^*(\omega)$, est alors bien définie ; c'est une différentielle sur V, régulière sur V - S, donc sur V tout entière (l'ensemble des pôles d'une différentielle étant une réunion de courbes). De plus, la condition de séparabilité assure que $f^*(\omega) \neq 0$, si $\omega \neq 0$, d'où la proposition.

COROLLAIRE. - Pour $n \geqslant 0$, les P_n sont des invariants birationnels de la surface V.

(Par contre, il n'en est pas de même des P_n, $n < 0$, comme le montrent des exemples simples).

Un autre invariant important de V est son genre arithmétique p_a (cf. [8], pour sa définition). Rappelons que l'on a :

$$p_a = -h^{0,1} + h^{0,2}, \text{ avec } h^{p,q} = \dim H^q(V, \Omega^p) \tag{2}$$

Ω^p désignant comme d'habitude le faisceau des formes différentielles de degré p (cf. [9]).

PROPOSITION 2. - Le genre arithmétique p_a est un invariant birationnel de la surface V.

Lorsque $k = \underset{\sim}{C}$, c'est très simple à vérifier : on a alors la formule de symétrie $h^{p,q} = h^{q,p}$ qui permet d'écrire $p_a = h^{2,0} - h^{1,0}$, i.e.

$$p_a = p_g - q \quad \text{avec} \quad p_g = P_1 = h^{2,0}, \quad q = h^{1,0}, \tag{3}$$

et le raisonnement de la proposition 1 montre que q, comme p_g, est invariant birationnel.

En caractéristique $p > 0$, l'invariance de p_a résulte de [6], complété par [1].

REMARQUE. - Il est facile d'étendre la proposition 1 aux variétés de dimension quelconque, en prenant pour "plurigenres" la dimension de l'espace des sections d'un fibré déduit du fibré tangent par une opération tensorielle covariante (d'où la condition $n \geqslant 0$). Il en est de même de la proposition 2, tout au moins lorsque $k = \underset{\sim}{C}$; on ignore ce qu'il en est en caractéristique $p > 0$.

2. Enoncé du théorème.

C'est le suivant :

THÉORÈME 1. - Pour que V soit rationnelle (i.e., birationnellement équivalente au plan projectif), il faut et il suffit que l'on ait $p_a = P_2 = 0$.

(Ici on doit supposer que $k = \underset{\sim}{C}$).

La condition est nécessaire. En effet, il est clair que $p_a = 0$ pour un plan projectif, donc aussi pour toute surface rationnelle d'après la proposition 2 ; d'autre part, le diviseur canonique d'un plan projectif est égal à $-3E$, où E désigne un hyperplan ; on a donc $P_n = 0$ pour tout $n > 0$, et le corollaire à la proposition 1 montre qu'il en est de même pour toute surface rationnelle.

Le reste de l'exposé sera consacré à la démonstration de la suffisance des conditions $p_a = P_2 = 0$. Cette démonstration est due, en principe, à CASTELNUOVO ; elle a été mise au point par K. KODAIRA dans son cours de Princeton ; nous suivons l'exposé de KODAIRA de très près.

Signalons un corollaire du théorème 1 :

THÉORÈME 2. - Toute surface unirationnelle est rationnelle.

(On dit qu'une surface V est unirationnelle s'il existe une surface rationnelle V' et une application rationnelle génériquement surjective $f : V' \longrightarrow V$).

En effet, la proposition 1 montre que l'on a $P_n(V) \leq P_n(V') = 0$ pour tout $n > 0$, et l'on a de même $q(V) \leq q(V') = 0$; d'après (3), il en résulte bien que $p_a(V) = 0$, d'où le résultat.

Le théorème 2 est l'analogue à deux dimensions du théorème de Lüroth pour les courbes ; il peut, comme ce dernier, s'énoncer (mais non se démontrer) purement en termes de corps :

Si K/k est une extension transcendante pure de $k = \underset{\sim}{C}$, de degré de transcendance 2, tout sous-corps L de K, contenant k, et tel que : $[L : K] < +\infty$, est aussi une extension transcendante pure de k.

Signalons enfin :

a. que le théorème 2 ne s'étend pas aux variétés de dimension ≥ 3 (ENRIQUES).

b. que, dans le théorème 1, on en peut pas remplacer la condition $P_2 = 0$ par $P_1 = 0$: il y a contre-exemples dus à ENRIQUES et GODEAUX. Par contre,

il se pourrait que $P_1 = 0$ et $\pi_1(V) = 0$ suffisent.

c. que l'on n'a aucune idée sur les invariants qui peuvent caractériser les variétés rationnelles de dimension $\geqslant 3$.

3. Théorème de Riemann-Roch.

Comme ce théorème va jouer un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 1 , nous allons en rappeler brièvement l'énoncé.

Introduisons d'abord une notation : soient Δ et Δ' deux classes de diviseurs, et soient D et D' deux diviseurs les représentant. On peut toujours supposer que D et D' n'ont aucune composante en commun, auquel cas leur intersection (en tant que cycles) est bien définie ; c'est un cycle de degré 0 dont le degré sera noté $D.D'$. On constate facilement qu'il ne dépend que des classes Δ et Δ' , ce qui permet de le noter $\Delta.\Delta'$ (c'est le "nombre de points d'intersection" de Δ et de Δ'). Si maintenant D et D' sont des diviseurs quelconques, on notera $D.D'$ le nombre de points d'intersection de leurs classes. On notera que si C et C' sont des courbes distinctes, on a $C.C' \geqslant 0$, mais que l'on peut avoir $C^2 = C.C < 0$. Nous poserons :

$$\pi(D) = \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2} K.D + 1 \quad , \tag{4}$$

on démontre que c'est un entier, le genre virtuel de D (cf. [8] et [9], ainsi que [3]). Lorsque C est une courbe non singulière, $\pi(C)$ est le genre de C , au sens usuel ; lorsque C est une courbe à singularités, c'est son genre au sens de ROSENLICHT [7] , c'est-à-dire la dimension de $H^1(C , \mathcal{O}_C)$.

THÉORÈME 3. (Inégalité de Riemann-Roch). - Pour tout diviseur D , on a :

$$\ell(D) \geqslant \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{2} K.D + 1 + p_a - \ell(K - D) \ . \tag{5}$$

Pour la démonstration, voir [3] (dans le cas $k = \mathbb{C}$), ainsi que [8] et [9] (pour une caractéristique quelconque).

Notons un corollaire de (5), que l'on obtient en remarquant que

$$\ell(-D) = 0 \qquad \text{si} \quad D > 0 \ :$$

$$\ell(K + D) \geqslant \pi(D) + p_a \qquad \text{si} \quad D > 0 \ . \tag{6}$$

4. Démonstration du théorème 1 : réduction du problème.

Elle est basée sur le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - S'il existe, sur une surface V, une courbe C telle que $\pi(C) = 0$ et $\ell(C) \geqslant 2$, la surface V est rationnelle.

D'après la théorie de Rosenlicht, on a $\pi(C) = g(C) + \delta$, où g est le genre de la courbe normalisée de C, et où δ est un entier dépendant des singularités de C. Si l'on a $\pi(C) = 0$, on en déduit donc $g(C) = \delta = 0$, ce qui montre que C est une courbe non singulière de genre zéro.

D'après la condition $\ell(C) \geqslant 2$, il existe dans L(C) une fonction f non constante ; du fait que C est irréductible, on a alors

(7) $\qquad C = (f)_\infty$, diviseur des pôles de f.

On peut considérer f comme une application rationnelle de V dans la droite projective Λ. Si λ désigne un point générique de Λ, le diviseur $f^{-1}(\lambda) = C_\lambda$ est bien défini ; il coïncide d'ailleurs avec le diviseur noté au n° 1 $(f - \lambda)_0$. Du fait que C est spécialisation de C_λ pour $\lambda \longrightarrow \infty$, le diviseur C_λ est une courbe, et, puisque $C_\lambda - C = (f - \lambda)$, on a $\pi(C_\lambda) = \pi(C) = 0$. Donc C_λ est une courbe de genre zéro, définie sur le corps $E = k(\lambda)$. Le corps $F = E(C)$ des fonctions sur C rationnelles sur E n'est autre que le corps des fonctions rationnelles sur V ; si l'on montre F/E est une extension transcendante pure, il en résultera bien que V est rationnelle. On est donc ramené à prouver le lemme suivant :

LEMME. - Soit k un corps algébriquement clos, soit E un corps de fonctions algébriques d'une variable sur k, et soit F un corps de fonctions algébriques d'une variable sur E, qui soit de genre zéro. Alors F est extension transcendante pure de E.

D'après la théorie générale des courbes de genre 0 (voir [2] par exemple), on a $F = E(x, y)$, où x et y vérifient une équation du second degré :

$$\varphi(x, y) = 0,$$

et tout revient à trouver un point rationnel sur cette conique, c'est-à-dire des éléments $x, y \in E$ vérifiant l'équation précédente. C'est effectivement possible, en vertu du théorème de Tsen, suivant lequel le corps E est quasi-algébriquement clos (cf. [5], pour plus de détails).

REMARQUES.

1° La proposition précédente est due à M. NOETHER (dans le cas classique).

2° Lorsque V est une surface vérifiant $p_a = P_2 = 0$, les conditions $\pi(C) = 0$, $\ell(C) \geqslant 2$ peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\pi(C) = 0 , \quad C^2 \geqslant 0 . \tag{8}$$

En effet, on remarque d'abord que $P_2 = 0$ entraîne $P_1 = 0$ (de façon générale, il est clair que $\ell(nD) = 0$ entraîne $\ell(D) = 0$). Ceci s'écrit $\ell(K) = 0$, d'où :

$$\ell(K - D) = 0 \qquad \text{pour tout } D \geqslant 0 . \tag{9}$$

La formule (5) peut alors s'écrire :

$$\ell(D) \geqslant \tfrac{1}{2} D^2 - \tfrac{1}{2} K.D + 1 = D^2 - \pi(D) + 2 \quad \text{pour } D \geqslant 0 , \tag{10}$$

et si $\pi(D) = 0$, $D^2 \geqslant 0$, on en déduit bien $\ell(D) \geqslant 2$.

5. Démonstration du théorème 1 : seconde réduction.

On dit qu'une courbe C est une courbe exceptionnelle de première espèce si l'on a :

$$\pi(C) = 0 \quad \text{et} \quad C^2 = -1 . \tag{11}$$

PROPOSITION 4. - Toute surface est birationnellement équivalente à une surface n'ayant aucune courbe exceptionnelle de première espèce.

On montre d'abord que, si C est une courbe exceptionnelle de première espèce, il existe une surface V' et un point $P \in V'$, tels que V soit isomorphe à la transformée quadratique $Q_p(V')$, la courbe C correspondant au point P ; c'est là un résultat classique, dont on trouvera une démonstration, par exemple, dans KODAIRA [4], p. 44 (la démonstration de KODAIRA est rédigée en termes "analytiques", mais se transcrit tout de suite en caractéristique $p > 0$). Si V' a encore des courbes exceptionnelles de première espèce, on recommence. Cette suite d'opérations s'arrête ; en effet, dans le cas classique, on voit tout de suite que le second nombre de Betti décroit chaque fois d'une unité : en caractéristique $p > 0$, on peut montrer qu'il en est de même de $h^{1,1}$, ou bien encore, on peut invoquer le théorème de la base de Néron-Severi.

A partir de maintenant V désignera une surface vérifiant les conditions $p_a = P_2 = 0$, et ne possédant aucune courbe exceptionnelle de première espèce. On se propose de montrer qu'il existe sur V une courbe C vérifiant $\pi(C) = 0$ et $C^2 > 0$.

6. Démonstration du théorème 1 lorsque $K^2 = 0$.

La formule (10) donne alors $\ell(-K) \geqslant 1$. Soit donc $D \in |-K|$. On a $D \neq 0$, car sinon on aurait $P_2 = \ell(2K) = \ell(0) = 1$. Soit E une section hyperplane de V; on supposera que $\ell(E - D) > 0$, c'est toujours possible, quitte à remplacer E par un de ses multiples. Comme $E.K = -E.D < 0$, on a $(E + mK).E < 0$ pour m grand, d'où $\ell(E + mK) = 0$. Il est donc possible de choisir un $n \geqslant 1$ tel que :

$$\begin{cases} \ell(E + nK) \geqslant 1 \\ \ell(E + (n+1)K) = 0 . \end{cases} \tag{12}$$

Soit $D' \in |E + nK|$, et décomposons D' en $\sum a_s C_s$, les C_s étant des courbes, et les a_s des entiers > 0. On a :

$$K.D' = K.(E + nK) = K.E < 0 , \tag{13}$$

ce qui montre que l'un des $K.C_s$, soit $K.C_1$, est < 0. Posons $C = C_1$. On a $C \leqslant D'$, d'où :

$$\ell(K. + C) \leqslant \ell(K + D') = \ell(E + (n+1)K) = 0 , \tag{14}$$

d'où, d'après (6), $\pi(C) = 0$. Mais, d'après (4), $\pi(C) = 0$ implique :

$$K.C + C^2 = -2 . \tag{15}$$

Comme $K.C < 0$, ceci entraîne $C^2 \geqslant -1$. Mais on ne peut pas avoir $C^2 = -1$ car C serait une courbe exceptionnelle de première espèce, on a donc $C^2 \geqslant 0$ ce qui achève la démonstration dans ce cas.

7. Démonstration du théorème 1 lorsque $K^2 < 0$.

On va d'abord montrer que, si E est une section hyperplane de V, on a $\ell(E + nK) = 0$ pour n assez grand. Soit n_o un entier tel que $n_o K^2 + K.E < 0$. Supposons qu'il y ait un entier $m \geqslant n_o$ tel que $\ell(E + mK) \geqslant 1$, et soit $D = \sum a_s C_s$ un élément de $|E + mK|$. On a $K.D < 0$, et il y a un indice s pour lequel $K.C_s < 0$. La formule (4) $2\pi(C_s) - 2 = C_s^2 + K.C_s$ montre que, si l'on avait $C_s^2 < 0$, on aurait $C_s^2 = K.C_s = -1$ et $\pi(C_s) = 0$, ce qui est

impossible. On a donc $C_s^2 \geqslant 0$. Si maintenant m' est assez grand, on a

$$(16) \qquad (E + m'K).C_s = (m' - m)K.C_s + \sum a_t C_t.C_s < 0 .$$

Je dis que, pour une telle valeur de m' , on a nécessairement $\ell(E + m'K) = 0$. En effet, sinon, il existerait $D' \in |E + m'K|$, et l'on aurait d'après (16) , $D'.C_s < 0$, alors qu'au contraire il est évident que $D'.C_s \geqslant 0$ (car toute composante C' de D' est soit égale à C_s , et l'on sait que $C_s.C' = C_s^2 \geqslant 0$, soit distincte de C_s , et l'on a $C_s.C' \geqslant 0$). Ceci démontre notre assertion.

On peut de plus choisir E tel que $\ell(E + K) \geqslant 2$. Ceci étant, il existe un entier n tel que :

$$(17) \qquad \begin{cases} \ell(E + nK) \geqslant 2 \\ \ell(E + (n + 1)K) \leqslant 1 . \end{cases}$$

La première inégalité montre que $|E + nK|$ contient un "pinceau" D_λ . Si D désigne un élément générique de ce pinceau, le théorème de Bertini (en caractéristique zéro) affirme que l'on a :

$$(18) \qquad D = A + \sum C_j , \quad A \geqslant 0 \text{ étranger aux } C_j ,$$

où les C_j sont des courbes distinctes telles que $C_j^2 \geqslant 0$ (elles constituent la "partie mobile" du pinceau). On peut avoir $A = 0$, mais il y a au moins une courbe C_j .

Nous allons montrer que l'une des courbes C_j vérifie la condition $\pi(C_j) = 0$, ce qui achèvera la démonstration.

On a en tout cas :

$$(19) \qquad \pi(C_j) \leqslant \ell(K + C_j) \leqslant \ell(K + D) \leqslant 1 .$$

Raisonnons donc par l'absurde, et supposons que tous les $\pi(C_j)$ soient égaux à 1 . D'après (19), ceci entraînerait $\ell(K + C_j) = 1$, et il existerait un $D_j \in |K + C_j|$. Si l'on avait $D_j = 0$, on en tirerait $K \sim - C_j$ d'où $K^2 = C_j^2 \geqslant 0$ contrairement à l'hypothèse. On a donc $D_j \geqslant 0$. Ecrivons :

$$(20) \qquad D_j = \sum n_{j,s} X_{j,s} , \quad \text{avec } n_{j,s} > 0 .$$

Comme $\pi(C_j) = 1$, on a, d'après (4), $K.C_j = - C_j^2 \leqslant 0$, et, comme $D_j \sim K + C_j$, $D_j.C_j = 0$, d'où en utilisant (20) et le fait que $C_j^2 \geqslant 0$,

la formule :

$$X_{j,s}.C_j = 0 \ . \tag{21}$$

On a alors :

$$0 > K^2 \geqslant (K + C_j).K = \sum n_{j,s}\, X_{j,s}.K \ ,$$

ce qui montre que l'un des $X_{j,s}.K$ est < 0 . Mais on a :

$$X_{j,s}.K = X_{j,s}.(K + C_j) = n_{j,s}\, X_{j,s}^2 + \sum_{t \neq s} n_{j,t}\, X_{j,s}.X_{j,t} \ ,$$

d'où :

$$0 > X_{j,s}.K \geqslant n_{j,s}\, X_{j,s}^2 \ . \tag{22}$$

En combinant (22) avec la formule (4), on voit que l'on doit avoir

$$X_{j,s}.K = -1 \ , \quad X_{j,s}^2 = -1 \ , \quad \pi(X_{j,s}) = 0 \ ,$$

ce qui est impossible et achève la démonstration.

REMARQUE. - En caractéristique $p > 0$, le théorème de Bertini ne s'applique plus de la même façon. On peut seulement dire que l'on a

$$D = A + p^{\nu} \sum C_j \ , \quad \nu \text{ entier} \geqslant 0 \ , \tag{18'}$$

les C_j jouissant des mêmes propriétés que ci-dessus. Cela ne change d'ailleurs rien à la démonstration précédente.

8. Démonstration de théorème 1 lorsque $K^2 > 0$.

La formule (10) donne $\ell(-K) \geqslant 2$. On peut alors, comme précédemment, trouver dans $|-K|$ un diviseur D s'écrivant :

$$D = A + \sum C_j \ , \quad A \geqslant 0 \ , \quad C_j^2 \geqslant 0 \ , \tag{23}$$

le nombre des C_j étant $\geqslant 1$. En caractéristique $p > 0$, il faut affecter les C_j d'un coefficient p^{ν} .

Supposons d'abord que D ne soit pas une courbe, c'est-à-dire que $D - C_1 > 0$. On a alors :

$$\ell(K + C_1) = \ell(C_1 - D) = 0 \ ,$$

d'où $\pi(C_1) = 0$, d'après (6), et la démonstration est terminée dans ce cas.

Nous supposerons donc, à partir de maintenant que D est une courbe. On a alors

$$\ell(K + D) = \ell(0) = 1 \text{ , et } \pi(D) = 1 + \frac{1}{2} D.(K + D) = 1 .$$

Soit encore E une section hyperplane de V , telle que $\ell(E - D) \geqslant 1$. Comme $(E + nK).E = E.E - n\, D.E$ est < 0 pour n grand, on en conclut qu'il existe un entier n tel que :

$$(24) \qquad \begin{cases} \ell(E + nK) \geqslant 1 \\ \ell(E + (n+1)K) = 0 . \end{cases}$$

Choisissons donc un $D' \in |E + nK|$. Nous distinguerons deux cas :

(i) La section hyperplane E peut être choisie de telle sorte que $D' > 0$.

Soit alors $D' = \sum a_s C_s$ la décomposition de D' . Comme $K \sim - D$, et que $D^2 \geqslant 0$, on a $K.D' \leqslant 0$ et $K.C_1 \leqslant 0$ pour au moins l'un des C_s , soit C_1 . On a, comme précédemment,

$$\ell(K + C_1) \leqslant \ell(K + D') = \ell(E + (n+1)K) = 0 ,$$

d'où, d'après (6), $\pi(C_1) = 0$, d'où $C_1^2 + K.C_1 = - 2$, et comme $K.C_1 \leqslant 0$, on en déduit que, ou bien $C_1^2 \geqslant 0$ (et on a obtenu la courbe C cherchée), ou bien $C_1^2 = - 2$ et $K.C_1 = 0$.

Plaçons-nous donc dans ce second cas. La formule (5) donne :

$$\ell(D - C_1) \geqslant K^2 - \ell(2K + C_1) ,$$

et, comme $\ell(2K + C_1) \leqslant \ell(K + C_1) = 0$, on en déduit :

$$\ell(D - C_1) \geqslant 1 .$$

Soit donc $\Gamma \in |D - C_1|$. On a $\Gamma \neq 0$, car sinon on aurait $C_1 \sim D \sim - K$ d'où $- 2 = C_1^2 = K^2$, ce qui est absurde.

Ecrivons alors :

$$\Gamma = \sum n_j \Gamma_j , \qquad n_j > 0 .$$

On a :

$$\ell(K + \Gamma_j) \leq \ell(K + \Gamma) = \ell(-C_1) = 0 ,$$

d'où, d'après (6), $\pi(\Gamma_j) = 0$, pour tout j .

D'autre part, on a $\Gamma.K = -C_1.K - K^2 < 0$, d'où $\Gamma_1.K < 0$ pour l'un des Γ_j , et l'on termine, comme d'habitude, en remarquant que la formule $-2 = \Gamma_1^2 + \Gamma_1.K$ entraîne $\Gamma_1^2 \geqslant -1$, d'où $\Gamma_1^2 \geqslant 0$, ce qui achève la démonstration dans le cas (i).

(ii) Quel que soit le choix de E , on a $D' = 0$.

Cela signifie que, pour toute section hyperplane E telle que $\ell(E - D) \geqslant 1$, il existe un n tel que $E \sim -nK$. Or, on voit facilement que tout diviseur est linéairement équivalent à la différence de deux diviseurs E et E' du type précédent (correspondant à des plongements projectifs différents, bien entendu !) ; c'est là une conséquence des théorèmes de Bertini, ou encore des "théorèmes A et B". Il s'ensuit que tout diviseur est équivalent à un multiple de K . La surface V a donc les propriétés suivantes :

(25) On a $p_a = P_2 = 0$. Le groupe des classes de diviseurs de V est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}$, et la classe canonique en est un générateur. De plus il y a une courbe D équivalente à $-K$.

Montrons que, lorsque $k = \underset{\sim}{C}$, une telle surface n'existe pas.

Puisque $h^{0,2} = h^{2,0} = 0$, le groupe des classes de diviseurs de V s'identifie à $H^2(V , \underset{\sim}{Z})$. Comme K en est un générateur, la dualité de Poincaré montre que

$$K^2 = \pm 1 . \tag{26}$$

D'autre part, comme $H^2(V , \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}$, le second nombre de Betti de V est 1 , la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de V (au sens usuel) est égale à 3 . En appliquant la formule de Noether-Zeuther-Segre :

$$12(1 + p_a) = K^2 + \chi \tag{27}$$

on obtient :

$$K^2 = 9 \tag{28}$$

d'où contradiction avec (26).

VARIANTE. - On peut tirer une contradiction de (28) par voie purement algébrique (KODAIRA) :

On choisit un point simple sur D, soit P, et on introduit la surface $V' = Q_P(V)$, transformée quadratique de V par rapport à P. Toute courbe C sur V définit une courbe C' sur V', et le point P correspond à une courbe S vérifiant (11). Le diviseur canonique de V' est égal à $K' = -D'$, et l'on a $K'^2 = 8$. La formule (5) donne :

$$\ell(D' - 2S) \geqslant 4 - \ell(K' - D' + 2S) .$$

Mais

$$\ell(K' - D' + 2S) = \ell(-2D' + 2S) < \ell(2S) = 1$$

d'où :

$$\ell(D' - 2S) \geqslant 4 .$$

Choisissons alors un diviseur $C \in |D' - 2S|$. On peut évidemment écrire :

$C = aS + \sum n_i C'_i$, les C_i étant des courbes de V. Du fait que S et D' forment des bases du groupe des classes de diviseurs de V', on en déduit que $\sum n_i C_i \sim D$, ce qui montre que l'on a en fait :

$$C = aS + C'_o , \quad \text{avec} \quad C_o \sim D .$$

En calculant $C.S$, on trouve :

$$C.S = \begin{cases} (aS + C'_o).S = -a + i \quad (\text{avec } i = C'_o.S) \\ D'.S - 2S.S = 3 , \end{cases}$$

d'où $i = a + 3$.

D'autre part, on a

$$\ell(K' + C'_o) = \ell(-D' + C - aS) = \ell(-(a + 2)S) = 0 \quad \text{d'où, d'après (6),}$$

$\pi(C'_o) = 0$, et, en utisant (4), on obtient :

$$-2 = C'_o(K' + C'_o) = -(a + 2)C'_o.S = -(a + 2)(a + 3) ,$$

ce qui est impossible puisque $a \geqslant 0$, et achève la démonstration.

REMARQUE. - Pour étendre cette dernière démonstration au cas de la caractéristique $p > 0$, il suffirait de prouver que (25) entraîne (28), ou même seulement $K^2 \geqslant 6$. Remarquons qu'en tout cas les démonstrations de KODAIRA établissent le résultat suivant :

Toute surface V privée de courbes exceptionnelles de première espèce et telle que $p_a = P_2 = 0$ ou bien est rationnelle ou bien vérifie (25).

ADDITIF

Les difficultés de caractéristique $p > 0$ ont été résolues par ZARISKI à propos du problème des "modèles minima" ([10], [11]). Le théorème 1 (critère de Castelnuovo) est valable sans changement. Le théorème 2 (toute surface unirationnelle est rationnelle) est valable à condition de définir l'unirationnalité par l'existence d'une application génériquement surjective et séparable $f : V \longrightarrow V'$ avec V rationnelle.

Comme KODAIRA, ZARISKI se ramène à démontrer qu'il n'existe aucune surface vérifiant les propriétés (25). La démonstration dépend de la valeur de l'entier $K^2 \geqslant 1$; pour $K^2 \geqslant 2$, elle se trouve dans [11], n° 8, 9, 10, pour $K^2 = 1$, dans [12].

[Septembre 1958]

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (S.). - Local uniformization of algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, Annals of Math., t. 63, 1956, p. 491-526.

[2] CHEVALLEY (Claude). - Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. - New York, American mathematical Society, 1951 (Mathematical Surveys n° 6).

[3] KODAIRA (Kunihiko). - The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, Amer. J. of Math., t. 73, 1951, p. 813-875.

[4] KODAIRA (Kunihiko). - On Kähler varieties of restricted type (An intrinsic characterization of algebraic varieties, Annals of Math., t. 60, 1954, p. 28-48.

[5] LANG (Serge). - On quasi algebraic closure, Annals of Math., t. 55, 1952, p. 373-390.

[6] MUHLI (H.T.) and ZARISKI (O.). - Hilbert's characteristic function and the arithmetic genus of an algebraic variety, Trans. Amer. math. Soc., t. 69, 1950, p. 78-88.

[7] ROSENLICHT (Maxwell). - Equivalence relations on algebraic curves, Annals of Math., t. 56, 1952, p. 169-191.

[8] ZARISKI (Oscar). - Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi, Annals of Math., t. 55, 1952, p. 552-592.

[9] ZARISKI (Oscar). - Algebraic sheaf theory, Scientific report on the second summer Institute, Bull. Amer. math. Soc., t. 62, 1956, p. 117-141.

[10] ZARISKI (Oscar). - Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces. - Tokyo, Mathematical Society of Japan, 1958 (Publ. Math. Soc. Japan, n° 4).

[11] ZARISKI (Oscar). - The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 146-184.

[12] ZARISKI (Oscar). - On Castelnovo's criterion of rationality $p_0 = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Ill. J. of Math., t. 2, 1958, p. 303-315.