SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MARC KRASNER

Les travaux récents de R. Brauer en théorie des groupes

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 14, p. 83-88

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__83_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1949)

LES TRAVAUX RÉCENTS DE R. BRAUER EN THÉORIE DES GROUPES [1], [2]

par Marc KRASNER

1. Rappel de notations classiques sur les représentations des groupes finis.

On se borne aux représentations d'un groupe G sur le corps C des nombres complexes. On suppose connues les notions de représentations équivalentes, de caractère (trace de la matrice $R(s)$), de somme et de produit tensoriel de représentations, de représentations irréductibles. On rappelle :

a. La somme et le produit tensoriel des représentations correspondent à l'addition et à la multiplication ordinaire des caractères.

b. Le nombre h des caractères (et représentations) irréductibles du groupe fini G d'ordre N est égal au nombre des classes d'éléments conjugués de G.

c. Tout caractère φ de G est constant sur toute classe de conjugaison de G et peut donc être considéré comme une fonction définie sur l'ensemble $\mathfrak{K}(G)$ de ces classes.

d. Tout caractère (et toute représentation, théorème de Maschke) est <u>complètement réductible</u>, et est donc combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de caractères irréductibles. Cette représentation est unique en vertu de l'indépendance linéaire des caractères irréductibles. Si K est un corps de nombres algébriques contenant les valeurs de tous les caractères de G (par exemple le corps des racines N-ièmes de l'unité), l'espace vectoriel $X_K(G)$ des combinaisons linéaires à coefficients dans K des caractères (irréductibles) de G est identique (b) à l'espace $K^{\mathfrak{K}(G)}$ de toutes les fonctions définies sur $\mathfrak{K}(G)$ et à valeurs dans K ; il est de dimension h.

e. <u>Relations d'orthogonalité</u> ($\bar{\varphi}$: caractère complexe conjugué de φ). - Pour tout $g \in G$ on note $n(g)$ l'ordre du normalisateur de g dans G.

$$(1)\quad \sum_{g \in G} \varphi_1(g)\, \bar{\varphi}_2(g) = \begin{cases} N & \text{si } \varphi_1 = \varphi_2 \\ 0 & \text{si } \varphi_1 \neq \varphi_2 \end{cases} \quad (\varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ irréductibles})$$

$$(2)\quad \sum_{\varphi} \varphi(\mathfrak{K}_1)\, \bar{\varphi}(\mathfrak{K}_2) = \begin{cases} n(\mathfrak{K}_1) & \text{si } \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 \\ 0 & \text{si } \mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2 \end{cases} \quad (\mathfrak{K}_1 \text{ et } \mathfrak{K}_2 : \text{classes de conjugaison})$$

f. Soit H un sous-groupe de G, et soit $\mathfrak{M}$ un ensemble de m classes de conjugaison de H ; il existe m éléments $(\Psi_1, \ldots, \Psi_m)$ de $X_K(H)$ dont les restrictions à $\mathfrak{M}$ forment une base de $K^{\mathfrak{M}}$. Les classes de conjugaison de G contenant quelque classe de $\mathfrak{M}$ forment un ensemble $\mathfrak{K}$ de puissance $k \leq m$; les restrictions à $\mathfrak{K}$ des $\varphi \in X_K(G)$ s'identifient canoniquement aux restrictions des mêmes φ à $\mathfrak{M}$ et forment donc un espace vectoriel de dimension k. Comme elles s'expriment linéairement à partir des (Ψ_j), on peut écrire pour tout caractère irréductible φ de G, $\varphi = \sum_j \gamma_{ij} \Psi_j$, où (γ_{ij}) est une (k, m)-matrice de rang k sur K.

g. Si $G = G_1 \times G_2$ tout caractère irréductible de G est le produit d'un caractère irréductible de G_1 par un caractère irréductible de G_2 (étendre trivialement à G tout caractère de G_1), et inversement.

h. Représentations et caractères induits. Théorème de Frobenius. - Soit H un sous-groupe d'indice q de G, et soit $G = g_1 H + \ldots + g_q H$, les $g_i H$ étant des classes à droite distinctes de G mod H ; pour tout $g \in G$ soit $g_{g(i)} H$ la classe à droite $g g_i H$; $i \longrightarrow g(i)$ représente donc G par des permutations ; soit $R_H(g)$ la matrice correspondante. Si $h \longrightarrow R(h)$ est une représentation de degré r de H, et si $g g_i$ s'écrit $g_{g(i)} h_i$ $(h_i \in H)$, on remplace dans la matrice $R_H(g)$ tout élément nul par la matrice nulle (d'ordre r) et tout élément égal à 1 (i-ième ligne, $g(i)$-ième colonne) par la matrice $R(h_i)$. On obtient ainsi une matrice $R^*(g)$ (d'ordre qr), et $g \longrightarrow R^*(g)$ est une représentation de G qui, à l'équivalence près, ne dépend que de la classe de R et ne dépend pas du choix des représentants g_i ; R^* est dite la représentation induite par R dans G. Son caractère (dit caractère induit) est donné par $\chi_R^*(g) = \sum_I \chi_R(g_i\, g g_i^{-1})$, la sommation étant étendue aux indices i tels que $g_i\, g g_i^{-1} \in H$; ainsi χ_R^* n'est $\neq 0$ que sur les classes de conjugaison de G rencontrant H ; en particulier si χ_R est nul en dehors d'un ensemble $\mathfrak{M}$ de classes de conjugaison de H, χ_R^* l'est aussi en dehors de l'ensemble $\mathfrak{K}$ des classes de conjugaison de G obtenu par saturation de $\mathfrak{M}$. Les représentations induites par les représentations de degré 1 de R sont les représentations monomiales de G. Si $H \subset H' \subset G$, l'opération d'induction des caractères est transitive ; si $G = G_1 \times G_2$ et si $H_2 \subset G_2$ si φ_1 (resp. φ_2) est un caractère de G_1 (resp. H_2) et si φ_2^* est le caractère induit par φ_2 dans G_2, alors $\varphi_2^*\, \varphi_1$ est le caractère induit de $\varphi_2\, \varphi_1$. Les restrictions à H des caractères irréductibles $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ de G sont caractères de H, et par

suite des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des caractères irréductibles de H, soit $\varphi_i = \sum_j a_{ij}\,\omega_j$; d'autre part les caractères induits ω_j^* des ω_j dans G sont combinaisons linéaires (coefficients entiers $\geqslant 0$) des φ_i, soit $\omega_j^* = \sum_i a_{ji}^*\,\varphi_i$; FROBENIUS a montré que les matrices $A = (a_{ij})$ et $A^* = (a_{ij}^*)$ sont <u>transposées</u>, c'est-à-dire que $a_{ji}^* = a_{ij}$.

2. <u>Enoncé de la conjecture d'Artin et du théorème de Brauer</u>.

p étant un nombre premier, un groupe H est dit p-<u>élémentaire</u> s'il est produit direct $\mathfrak{A} \times \Pi$ d'un p-groupe Π et d'un groupe cyclique $\mathfrak{A}$ d'ordre premier à p . Si H est un sous-groupe p-élémentaire de G, Π est un sous-groupe d'un certain p-groupe de Sylow du centralisateur de $\mathfrak{A}$ dans G ; si Π coïncide avec ce groupe de Sylow, H sera dit un sous-groupe p-spécial de G . H sera dit <u>élémentaire</u> (resp. <u>spécial</u>) s'il est p-élémentaire (resp. p-spécial) pour certain p .

E. ARTIN a démontré, à l'aide du théorème de Frobenius, que tout caractère de G est combinaison linéaire à coefficients <u>rationnels</u> de ses caractères <u>monomiaux</u>, et a conjecturé que ces coefficients sont entiers. R. BRAUER a démontré cette conjecture dans le mémoire analysé, et même montré qu'il suffit de prendre les caractères monomiaux de G induits par les caractères de degré 1 des sous-groupes <u>élémentaires</u> de G .

Etant donné que tout caractère irréductible d'un groupe p-élémentaire H y est induit par un caractère de degré 1 d'un sous-groupe p-élémentaire (démonstration facile), il suffira, en vertu de la transitivité de l'induction des caractères, de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME (A). - <u>Tout caractère irréductible</u> φ_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ <u>de</u> G <u>est combinaison linéaire à coefficients entiers des caractères</u> λ_j^* $(1 \leqslant j \leqslant t)$ <u>induits dans</u> G <u>par des caractères</u> λ_j <u>de ses sous-groupes spéciaux</u>.

La démonstration de (A) se fait par une série de réductions ; le conférencier a apporté certaines simplifications à la méthode de R. BRAUER.

3. <u>Démonstration de (A) par réductions successives</u>.

<u>Réduction</u> 1 (passage du local au global). - Il suffira de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de K, les φ_i s'expriment comme combinaisons linéaires des λ_j^* à coefficients $\mathfrak{P}$-entiers (c'est-à-dire de dénominateur premier à $\mathfrak{P}$)

de K. En effet de $\chi_j^* = \sum \gamma_{ji} \varphi_i$ (γ_{ji} : entiers rationnels) on déduit que les mineurs d'ordre h de (γ_{ji}) ont leur plus grand commun diviseur premier à $\mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{P}$; c'est donc 1, d'où facilement (A).

Réduction 2 (consistant à découper le groupe G en morceaux convenables et à montrer qu'il suffit de démontrer la proposition précédente dans chaque morceau).

Soit p un nombre premier ; dans chaque classe de conjugaison de G dont l'ordre des éléments est premier à p ("classe p-régulière"), on choisit un représentant α_q ; pour chaque α_q soit π_q un p-groupe de Sylow de son normalisateur $\mathfrak{N}(\alpha_q)$ dans G, et soit $\mathfrak{A}_q$ le groupe cyclique engendré par α_q ; soit $H^{(q)}$ le sous-groupe p-spécial $\mathfrak{A}_q \pi_q$, et soit $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G non disjointes de $S(\alpha_q) = \alpha_q \pi_q$. Si $\xi_1^{(q)}, \dots, \xi_{a_q}^{(q)}$ sont les caractères irréductibles de $\mathfrak{A}_q$ (a_q : ordre de $\mathfrak{A}_q$) et $\theta_1^{(q)}, \dots, \theta_{n_q}^{(q)}$ ceux de π_q, on pose

$$\Psi_j^{(q)} = \sum_{\alpha=1}^{a_q} \bar{\xi}_\alpha^{(q)}(\alpha_q)\, \xi_\alpha^{(q)}\, \theta_j^{(q)} \quad ;$$

c'est un caractère de $H^{(q)}$ nul en dehors de $S(\alpha_q)$ en vertu des relations d'orthogonalité appliquées aux ξ_α ; donc le caractère $\Psi_j^{(q)*}$ qu'il induit dans G est nul en dehors de $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$; si $\pi \in \pi_q$, on a

$$\Psi_j^{(q)}(\alpha_q\, \pi) = a_q\, \theta_j^{(q)}(\pi) \quad .$$

Si on prend pour p le nombre premier divisible par $\mathfrak{p}$, les $\Psi_j^{(q)*}$ sont combinaisons linéaires à coefficients $\mathfrak{P}$-entiers des caractères induits dans G par des caractères irréductibles du groupe p-spécial $H^{(q)}$. Etant donné que les $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ forment une partition de G (démonstration facile), et que tout caractère φ_i est somme des $\varphi_i^{(q)}$ ($\varphi_i^{(q)}(\mathfrak{K}) = \varphi_i(\mathfrak{K})$ ou 0 selon que $\mathfrak{K} \in \tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ ou non), il suffira de montrer que la restriction à $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ de tout φ_i est combinaison linéaire à coefficients $\mathfrak{P}$-entiers de K des $\Psi_i^{(q)*}$.

Enlevons les indices (q) et considérons les matrices $\Phi = (\varphi_i(\mathfrak{K}_K))$ (h, k) et $\Psi = (\Psi_\mu(\mathfrak{K}_K))$ (m, k) (k : nombre de classes de $\tilde{\mathfrak{K}}$) ; soit V la matrice carrée (k, k) formée des k premières lignes de Ψ, il nous suffira de montrer que l'on peut numéroter les Ψ_μ de sorte que toute ligne de Φ soit combinaison linéaire à coefficients $\mathfrak{P}$-entiers des lignes de V,

c'est-à-dire qu'il existe une (h , k)-matrice A à éléments $\mathfrak{P}$-entiers de K telle que $\Phi = AV$.

Réduction 3. - Nous allons montrer qu'il existe une telle matrice A qui peut se mettre sous la forme MY^{-1} où M est une (h , k)-matrice, et Y une (k , k)-matrice, toutes deux à éléments $\mathfrak{P}$-entiers de K ; A sera à éléments $\mathfrak{P}$-entiers si la valuation $\mathfrak{P}$-adique $|\det(Y)|$ est égale à 1 . Cette réduction se fait en deux temps :

a. Posons $\alpha = \alpha_q$, $S = S(\alpha_q)$, $\Psi_\mu = \Psi_\mu^{(q)}$, $\theta_\mu = \theta_\mu^{(q)}$; soient $\mathfrak{L}_K^{(c)}$, ... , $\mathfrak{L}_K^{(c_K)}$ toutes les classes de conjugaison de $H = H^{(q)}$ en lesquelles se décompose $H \cap \mathfrak{K}_K$; alors l'ensemble des classes de conjugaison de $\Pi = \Pi_q$ est celui des $\mathfrak{D}_K^{(j)} = \alpha^{-1} \mathfrak{L}_K^{(j)}$ $(1 \leq K \leq k , \ 0 \leq j \leq c_K)$, donc $k + \sum_\ell c_\ell = m$. Soit Θ_0 la (m , k)-matrice

$$(\theta_\mu(\mathfrak{D}_K^{(0)})) = a^{-1} \Psi_\mu(\mathfrak{K}_K^{(0)})) \ .$$

Du fait que la restriction à H d'un φ_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers rationnels des $\xi_\alpha \theta_\mu$, résulte que sa restriction à S (dont les éléments ont la projection constante α sur $\mathfrak{A}$) est combinaison linéaire des θ_μ , et il existe une (h , m)-matrice $W = (w_{i\mu})$ à éléments entiers de K telle que $\Phi = W\Theta_0$. Le rang de W est k d'après (1.f.). Si $i \to i'$ est la permutation des indices 1 , ... , h telle que $\varphi_{i'} = \bar{\varphi}_i$ et si T est la matrice de permutation correspondante, on obtient, en appliquant le théorème de Frobenius aux expressions des $(\xi_\alpha \Psi_\mu)^*$ à l'aide des φ_i , la relation $\Psi = W' T \bar{\Phi}$ (W' : transposée de W). Si l'on met W sous la forme

$$\begin{array}{c} \\ k \\ h-k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & m-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(les φ_i et les Ψ_μ étant numérotés de manière que $\det(W_1) \neq 0$) on a, si l'on pose $M = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_3 \end{pmatrix}$, $V = M' T \bar{\Phi}$.

b. On démontre aisément que si une matrice W de la forme considérée est de rang k , elle est égale à MX où X est une (k , m)-matrice. Si l'on pose $X\Theta_0 = R$, R est une matrice carrée de degré k , et on a $\Phi = MR$, d'où $V = M' TMR$; $Y = M'TM$ est aussi une matrice carrée de degré k dont les

éléments sont des entiers de K ; et, si $\det(Y) \neq 0$, on a $R = Y^{-1} V$, d'où $\Phi = MY^{-1} V$.

Réduction 4. - Cette réduction consiste à ramener, à l'aide des raisonnements locaux qui se trouvent dans les travaux de l'auteur sur les caractères modulaires, la démonstration de $|\det(Y)| = 1$ à un problème de structure des p-groupes.

Travaux à consulter :

[1] BRAUER (Richard). - On the Cartan invariants of groups of finite order, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 53-61.

[2] BRAUER (Richard). - On Artin's L-series with general group characters, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 502-514.

[Texte revu en mars 1959]