SÉMINAIRE N. BOURBAKI

HENRI CARTAN

Les travaux de Koszul, III

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 12, p. 71-74

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__71_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1949)

LES TRAVAUX DE KOSZUL, III.

par Henri CARTAN.

Les notations de l'exposé précédent sont conservées. Toutefois, on écrit désormais $\Lambda^*(\mathfrak{a})$ au lieu de $\Lambda(\mathfrak{a}')$, pour désigner l'algèbre extérieure de l'espace dual de $\mathfrak{a}$, algèbre qui est en dualité avec $\Lambda(\mathfrak{a})$, algèbre extérieure de $\mathfrak{a}$. On notera $H^*(\mathfrak{a})$ (au lieu de $H(\mathfrak{a}')$) l'algèbre de cohomologie de $\mathfrak{a}$, $H^p(\mathfrak{a})$ le sous-espace des éléments homogènes de degré p de $H^*(\mathfrak{a})$. On conserve la notation $H(\mathfrak{a})$ pour l'espace d'homologie de $\mathfrak{a}$, et $H_p(\mathfrak{a})$ pour le sous-espace des éléments de degré p de $H(\mathfrak{a})$. Lorsque $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie réductive, on a vu que $H(\mathfrak{a})$ est muni d'une structure multiplicative : nous désignerons par $H_*(\mathfrak{a})$ l'algèbre d'homologie de $\mathfrak{a}$ (espace $H(\mathfrak{a})$ muni de sa structure multiplicative).

Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (sur un corps K) est réductive si la représentation $x \to \theta(x)$ de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\Lambda(\mathfrak{a})$ est complètement réductible ; une telle algèbre $\mathfrak{a}$ est composée directe d'une algèbre de Lie semi-simple et d'une algèbre abélienne, et la réciproque est exacte si K est de caractéristique nulle. Plus généralement, soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; on dira que $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$ si la représentation $x \to \theta(x)$ de $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre des endomorphismes de $\Lambda(\mathfrak{a})$ est complètement réductible ; alors $\mathfrak{b}$ est "réductive" tout court (i.e : réductive dans elle-même).

Si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact (algèbre sur le corps réel), toute sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$.

1. Chaînes et cochaînes relatives.

Sous-algèbre $\mathfrak{b}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; d'où homomorphisme (biunivoque) $\varphi : \Lambda(\mathfrak{b}) \to \Lambda(\mathfrak{a})$, et son transposé φ^* : $\Lambda^*(\mathfrak{a}) \to \Lambda^*(\mathfrak{b})$ (qui est sur). Un sous-espace de $\Lambda(\mathfrak{a})$ (resp. de $\Lambda^*(\mathfrak{a})$) est dit $\mathfrak{b}$-stable s'il est stable pour les endomorphismes $\theta(x)$ (resp. $\theta^*(x)$), où x parcourt $\mathfrak{b}$. On notera $I(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ le sous-espace des chaînes de $\mathfrak{a}$ invariantes par $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire des $\alpha \in \Lambda(\mathfrak{a})$ tels que $\theta(x).\alpha = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{b}$. Définition analogue du sous-espace $I^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ des cochaînes invariantes par $\mathfrak{b}$.

Soit $N(\alpha, \mathfrak{b})$ l'idéal de $\Lambda(\alpha)$ engendré par $\varphi(\mathfrak{b})$; le sous-espace de $\Lambda^*(\alpha)$ orthogonal à $N(\alpha, \mathfrak{b})$ est la sous-algèbre $N^*(\alpha, \mathfrak{b})$ engendrée par l'unité et les cochaînes de degré 1 orthogonales à $\mathfrak{b}$. Notation $N^p(\alpha, \mathfrak{b})$ pour le sous-espace des éléments de degré p de $N^*(\alpha, \mathfrak{b})$. Les sous-espaces $N(\alpha, \mathfrak{b})$ et $N^*(\alpha, \mathfrak{b})$ sont $\mathfrak{b}$-stables.

Examinons d'abord le cas particulier où $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre invariante (idéal de l'algèbre de Lie α), c'est-à-dire où $\mathfrak{b}$ est α-stable, auquel cas l'algèbre de Lie $\alpha/\mathfrak{b}$ est définie. Alors $N(\alpha, \mathfrak{b})$ est stable pour ∂, et $\Lambda(\alpha)/N(\alpha, \mathfrak{b})$, muni de l'opérateur ∂ par passage au quotient, s'identifie à $\Lambda(\alpha/\mathfrak{b})$; par dualité, $N^*(\alpha, \mathfrak{b})$ muni de δ (par rapport auquel il est stable), s'identifie à $\Lambda^*(\alpha/\mathfrak{b})$, et est contenu dans $I^*(\alpha, \mathfrak{b})$.

Dans le cas général d'une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ quelconque, le sous-espace $N(\alpha, \mathfrak{b}) + \partial . N(\alpha, \mathfrak{b})$ est stable pour ∂, et est engendré par $N(\alpha, \mathfrak{b})$ et les $\theta(x).\alpha$ (où $\alpha \in \Lambda(\alpha)$ et $x \in \mathfrak{b}$) ; ∂ opère dans le quotient $L(\alpha, \mathfrak{b})$ de $\Lambda(\alpha)$ par $N(\alpha, \mathfrak{b}) + \partial . N(\alpha, \mathfrak{b})$, qu'on appelle l'espace des chaînes relatives. Par dualité, l'intersection $N^*(\alpha, \mathfrak{b}) \cap I^*(\alpha, \mathfrak{b}) = L^*(\alpha, \mathfrak{b})$ se compose des cochaînes α' de $N^*(\alpha, \mathfrak{b})$ telles que $\delta . \alpha' \in N^*(\alpha, \mathfrak{b})$; c'est une sous-algèbre de $\Lambda^*(\alpha)$: algèbre des cochaînes relatives.

$L(\alpha, \mathfrak{b})$ muni de ∂ définit un espace d'homologie relative $H(\alpha, \mathfrak{b})$; il est gradué. L'algèbre $L^*(\alpha, \mathfrak{b})$ munie de δ définit une algèbre de cohomologie relative $H^*(\alpha, \mathfrak{b})$; c'est une algèbre graduée. Dans le cas particulier où $\mathfrak{b}$ est sous-algèbre invariante de α, $H(\alpha, \mathfrak{b})$ et $H^*(\alpha, \mathfrak{b})$ s'identifient à $H(\alpha/\mathfrak{b})$ et $H^*(\alpha/\mathfrak{b})$ respectivement.

Cas où α est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe G, et $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre d'un sous-groupe fermé U : alors $L^*(\alpha, \mathfrak{b})$ s'identifie à l'algèbre des formes différentielles extérieures de l'espace homogène $W = G/U$, invariantes par G, et $H^*(\alpha, \mathfrak{b})$ à l'algèbre de cohomologie de l'espace topologique (compact) W. Les résultats qui suivent donnent des relations (en partie nouvelles) entre les algèbres de cohomologie des espaces G, U et $W = G/U$. On notera que G est espace fibré de fibre U et de base W.

2. Homomorphismes canoniques.

$$\Lambda(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\varphi} \Lambda(\alpha) \xrightarrow{\pi} L(\alpha, \mathfrak{b}) \quad \text{et} \quad L^*(\alpha, \mathfrak{b}) \xrightarrow{\pi^*} \Lambda^*(\alpha) \xrightarrow{\varphi^*} \Lambda^*(\mathfrak{b}) .$$

Ils définissent

$$H(\mathfrak{b}) \xrightarrow[\tilde{\varphi}]{} H(\mathfrak{a}) \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \quad \text{et} \quad H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \xrightarrow[\tilde{\pi}^*]{} H^*(\mathfrak{a}) \xrightarrow[\tilde{\varphi}^*]{} H^*(\mathfrak{b}) .$$

Les homomorphismes π^* , φ^* , $\tilde{\pi}^*$, $\tilde{\varphi}^*$ sont des homomorphismes d'algèbres. L'image de $\tilde{\varphi}$ est contenue dans le noyau de $\tilde{\pi}$; l'image de $\tilde{\pi}^*$ est contenue dans le noyau de $\tilde{\varphi}^*$.

Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre réductive, le noyau de $H(\mathfrak{a}) \to H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est un idéal bilatère de l'algèbre $H_*(\mathfrak{a})$. Si en outre K est de caractéristique nulle, le théorème de Hopf s'applique à $H^*(\mathfrak{a})$ qui s'identifie à l'algèbre extérieure du sous-espace de ses éléments primitifs ; alors : l'image de $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to H^*(\mathfrak{a})$ est une sous-algèbre de $H^*(\mathfrak{a})$, engendrée par l'unité et des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{b}$ est sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$, on a une algèbre d'homologie $H_*(\mathfrak{b})$, et le noyau de $H(\mathfrak{b}) \to H(\mathfrak{a})$ est un idéal bilatère de $H_*(\mathfrak{b})$. Si en outre K est de caractéristique nulle, l'image de $H^*(\mathfrak{a}) \to H^*(\mathfrak{b})$ est une sous-algèbre de $H^*(\mathfrak{b})$, engendrée par l'unité et des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{b})$.

3. La dualité de Poincaré pour l'homologie et la cohomologie relatives.

Soient n et m les dimensions respectives de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Soit ω l'image, dans $\Lambda(\mathfrak{a})$, de la chaîne de dimension m de $\Lambda(\mathfrak{b})$ (définie à un facteur constant près). $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est le noyau de l'endomorphisme $\alpha \to \omega \wedge \alpha$ de $\Lambda(\mathfrak{a})$. Soit $\tau \in \Lambda^{n-m}(\mathfrak{a})$ tel que $\omega \wedge \tau \neq 0$; dans $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, tous les éléments de degré $> n-m$ sont nuls, et les éléments de degré $n-m$ sont proportionnels à la classe $\dot{\tau}$ de τ . Alors $\alpha' \to i(\alpha').\tau$ définit un isomorphisme de $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, isomorphisme qui ne dépend que de $\dot{\tau}$.

Supposons désormais $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ unimodulaires ; alors $\dot{\tau}$ est un élément $\mathfrak{b}$ invariant de $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, donc $\alpha' \to i(\alpha').\lambda$ définit un isomorphisme de $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap I^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur le sous-espace des éléments $\mathfrak{b}$-invariants de $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Si en outre $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$, ce sous-espace s'identifie à $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \partial . N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$. D'où un isomorphisme f de $L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. De plus

$$\partial\, i(\alpha').\tau = i(\delta . \bar{\alpha}').\tau + i(\bar{\alpha}')\, \partial.\tau \quad .$$

Mais le fait que $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$ entraîne que $\partial.\tau \in N + \partial.N$, et comme $i(\bar{\alpha}').(N + \partial.N) \subset N + \partial.N$, on a $\partial.f(\alpha') = f(\delta . \bar{\alpha}')$. Par passage aux quotients, f définit donc un isomorphisme de $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, qui

transforme les éléments de degré p en éléments de degré n-m-p . On en déduit que les nombres de Betti "relatifs" sont égaux pour les dimensions p et n-m-p ("dualité de Poincaré"), et que tout idéal non nul de $H^*(\alpha, \mathfrak{b})$ contient $H^{n-m}(\alpha, \mathfrak{b})$.

4. Sous-algèbres non homologues à zéro.

La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de α est désormais supposée réductive dans α . Soit m la dimension de $\mathfrak{b}$.

Pour que $H(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} H(\alpha)$ soit biunivoque, il suffit que $H_m(\mathfrak{b})$ (qui se compose des multiples d'un élément) ne soit pas dans le noyau de $\tilde{\varphi}$ (car tout idéal bilatère de $H_*(\mathfrak{b})$ qui ne contient pas $H_m(\mathfrak{b})$ est nul). On dit alors que $\mathfrak{b}$ est non homologue à zéro dans α .

Si $\mathfrak{b}$ est non homologue à zéro dans α , $H^*(\alpha, \mathfrak{b}) \to H^*(\alpha)$ est biunivoque (et réciproquement). Donc, si en outre α est réductive et le corps est de caractéristique nulle, $H^*(\alpha, \mathfrak{b})$ possède un sous-espace dont les composantes homogènes sont de degrés impairs, et s'identifie à l'algèbre extérieure de ce sous-espace.

Si $\mathfrak{b}$ non homologue à zéro dans α , $H^*(\alpha) \to H^*(\mathfrak{b})$ est évidemment sur. Si en outre le corps est de caractéristique nulle, on peut définir un isomorphisme de l'algèbre $H^*(\mathfrak{b})$ dans l'algèbre $H^*(\alpha)$, qui, composé avec l'application canonique $H^*(\alpha) \to H^*(\mathfrak{b})$, donne l'automorphisme identique de $H^*(\mathfrak{b})$. Cette application $H^*(\mathfrak{b}) \to H^*(\alpha)$, et l'homomorphisme canonique $H^*(\alpha, \mathfrak{b}) \to H^*(\alpha)$, définissent un homomorphisme d'algèbres (graduées)

$$H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\alpha, \mathfrak{b}) \to H^*(\alpha) \quad ,$$

et on montre que c'est un isomorphisme sur (théorème de Samelson).

Le cas des sous-algèbres homologues à zéro ne sera pas examiné ici (Voir la Thèse de KOSZUL, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 65-127).

[Mai 1957]