SÉMINAIRE N. BOURBAKI

CLAUDE CHEVALLEY

L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p, II

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 9, p. 53-56

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__53_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1949)

L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN POUR LES CORPS DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE CARACTÉRISTIQUE p , II.

par Claude CHEVALLEY

Soit donnée une variété algébrique V dans un espace projectif sur un corps algébriquement fermé L ; nous supposerons la variété V dépourvue de singularités, et nous désignerons sa dimension par n . On appelle cycle de dimension p sur V toute combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de sous-variétés de dimension p de V . Si les coefficients des variétés qui interviennent dans un cycle sons tous ≥ 0 , on dit que le cycle est positif. Les variétés qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans un cycle sont appelées les composantes de ce cycle.

Si V est une courbe, les points de V correspondent d'une manière biunivoque aux places du corps des fonctions rationnelles sur V . Les notions de cycle de dimension 0 sur V et de diviseur du corps des fonctions rationnelles sur V sont donc équivalentes.

D'une manière générale, si V est de dimension n , les cycles de dimension n-1 sur V sont appelés diviseurs de V . Les variétés de dimension n-1 sur V correspondent de manière biunivoque aux valuations du corps L(V) des fonctions rationnelles sur V dont les centres sont de dimension n-1 . On en déduit la possibilité d'attacher à tout $x \neq 0$ de L(V) un diviseur $\partial(x)$. Les diviseurs $\partial(x)$ forment un sous-groupe du groupe de tous les diviseurs de V ; deux diviseurs dont la différence appartient à ce sous-groupe sont appelés équivalents.

Soient V et V' des variétés sans singularités dans des espaces projectifs. On peut alors former une variété $V \times V'$ sans singularité dans un espace projectif convenable dont les points correspondent biunivoquement aux couples (M, M') formés d'un point M de V et d'un point M' de V' . Le point de $V \times V'$ qui correspond à (M, M') se désigne par $M \times M'$. Soient W et W' des sous-variétés de V et de V' , de dimensions respectives p et p' ; les points $M \times M'$ tels que $M \in W$ et $M' \in W'$ forment alors une sous-variété $W \times W'$ de dimension p+p' de $V \times V'$. On en déduit par linéarité la définition du cycle $X \times X'$ si X est un cycle sur V et X' un cycle sur V' .

Soit R un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini K à q éléments. Soit L une clôture algébrique de K , et soit R_L le corps

déduit de R par extension à L du corps de base. On peut alors former une courbe Γ sans singularité dans un espace projectif dont R_L soit le corps des fonctions rationnelles. Tout cycle de dimension 1 sur la surface $\Gamma \times \Gamma$ est appelé une correspondance sur Γ ; les courbes sur $\Gamma \times \Gamma$ sont appelées correspondances irréductibles sur Γ. Si C est une correspondance irréductible, on dit qu'un point M' de Γ correspond à un point M par la correspondance C si $M \times M$ est sur C. Les points $M \times M'$ (pour $M \in \Gamma$) forment une courbe sur $\Gamma \times \Gamma$ que l'on appelle la diagonale de $\Gamma \times \Gamma$, ou la correspondance identique. Si C est une correspondance irréductible, les points $M' \times M$ tels que $M \times M' \in C$ forment une correspondance irréductible que l'on désigne par C' ; l'application $C \longrightarrow C'$ s'étend par linéarité aux correspondances quelconques.

On peut supposer que Γ est définie par un système d'équations à coefficients dans K. Soit r un entier > 0, et soient $x_0, \ldots, x_N$ les coordonnées d'un point M de Γ. Alors le point M^{q^r} de coordonnées $x_0^{q^r}, \ldots, x_N^{q^r}$ est encore un point de Γ, et les points $M \times M^{q^r}$ (pour tous les $M \in \Gamma$) forment une correspondance irréductible J_r sur Γ. Les points d'intersection de J_r avec la diagonale Δ sont les points $M \times M$, où M est un point de Γ qui a un système de coordonnées formé d'éléments du corps K_r algébrique de degré r sur K. Le nombre de ces points est le nombre c_r des places de degré 1 du corps R_{K_r} (cf. l'exposé précédent) ; c'est ce nombre qu'il faut évaluer pour démontrer l'hypothèse de Riemann. Pour ce faire on a besoin des notions relatives à l'intersection des cycles d'une variété algébrique.

Utilisant les mêmes notations que plus haut, soient W_1 et W_2 des sous-variétés de V de dimensions respectives p_1 et p_2. Supposons que W_1 et W_2 n'aient en commun aucune variété de dimension $> p_1 + p_2 - n$. On peut alors associer à W_1 et à W_2 un cycle d'intersection $W_1 . W_2$ de dimension $p_1 + p_2 - n$. C'est un cycle positif dans lequel interviennent les variétés de dimension $p_1 + p_2 - n$ communes à W_1 et W_2 et celles-là seulement. On en déduit par linéarité la notion de cycle d'intersection $X_1 . X_2$ de deux cycles quelconques ; ce cycle n'est défini que si l'intersection de toute composante de X_1 avec toute composante de X_2 est définie. Si X_1 est de dimension 1 et X_2 de dimension $n-1$, le cycle $X_1 . X_2$ (s'il est défini) est de dimension 0 ; la somme des coefficients d'un cycle de degré 0 s'appelle le degré de ce cycle ; on pourra donc parler du degré de $X_1 . X_2$, qu'on désigne par $\deg (X_1 . X_2)$. Si de plus X_1 est une courbe sans singularité, $X_1 . X_2$ peut être considéré comme un diviseur du

corps des fonctions rationnelles sur X_1 ; on l'appelle le diviseur induit par X_2 sur X_1 .

Considérons le cas où $V = \Gamma \times \Gamma$. Soit X une correspondance sur Γ . Si X a des composantes de la forme $M \times \Gamma$, on en retire une correspondance de la forme $a \times \Gamma$ (où a est un diviseur sur Γ) tel que la différence $X_o = (X - a) \times \Gamma$ n'ait plus de composante de la forme $M \times \Gamma$. Pour tout $M \in \Gamma$ l'intersection $(M \times \Gamma).X_o$ est alors définie et s'écrit $M \times X(M)$, où $X(M)$ est un diviseur sur Γ . On en déduit par linéarité la définition de $X(b)$ pour tout diviseur b sur Γ . Le degré de $X(M)$ ne dépend pas de M et se désigne par $d(X)$. On pose $d'(X) = d(X')$. Soient X et Y des correspondances ; si $X.Y$ est défini, deg $(X.Y)$ se désigne par $I(X.Y)$. Ce nombre ne change pas si on remplace X et Y par des correspondances qui leur soient respectivement équivalentes. On en déduit la possibilité de définir $I(X.Y)$ pour des correspondances X et Y quelconques. Si $M \in \Gamma$, on voit facilement que $J_r(M) = M^{q^r}$, d'où $d(J_r) = 1$, $J_r'(M^{q^r}) = q^r M$, d'où $d'(J_r) = q^r$; de plus, les points d'intersection de J_r avec la diagonale Δ interviennent avec le coefficient 1 dans $J_r . \Delta$, d'où $I(J_r . \Delta) = c_r$. La quantité $1 + q^r - c_r$ est donc égale à $d(J_r) + d'(J_r) - I(J_r . \Delta)$.

Pour toute correspondance X nous poserons $\sigma(X) = d(X) + d'(X) - I(X . \Delta)$.

Soient X et Y des correspondances sur Γ . On démontre alors qu'il existe une correspondance $Z = X \circ Y$ univoquement déterminée qui possède les propriétés suivantes : si $P \in \Gamma$, on a $Z(P) = X(Y(P))$, $Z'(P) = Y'(X'(P))$. On obtient ainsi une loi de composition bilinéaire non commutative dans l'ensemble des correspondances. A. WEIL a montré que l'on a

$$\sigma(X \circ X') \geq 0$$

pour toute correspondance X . Montrons comment ce résultat entraîne l'hypothèse de Riemann.

Soient x et y des entiers ; posons $X = x J_r + y \Delta$, et écrivons que $\sigma(X \circ X') \geq 0$. Il est évident que $J_r \circ J_r' = q^r \Delta$; posons $k = \sigma(\Delta)$, d'où $\sigma(x^2 J_r \circ J_r') = k q^r x^2$.

Si Y est une correspondance quelconque, on a évidemment $Y = \Delta = \Delta \circ Y = Y$; et la considération de l'application $M \times M' \longrightarrow M' \times M$ de $\Gamma \times \Gamma$ dans lui-même montre que l'on a $\sigma(Y') = \sigma(Y)$.

Les nombres $\sigma(J_r \circ \Delta')$ et $\sigma(\Delta \circ J_r')$ sont donc égaux à $1 + q^r - c_r$. Il vient donc

$$k\, q^r x^2 + 2(1 + q^r - c_r)xy + k\, y^2 \geqslant 0$$

d'où $(1 + q^r - c_r)^2 \leqslant k^2\, q^r$, ce qui entraîne déjà l'hypothèse de Riemann. De plus, on peut démontrer que $I(\Delta \,.\, \Delta) = 2g - 2$, si g est le genre de Γ ; le nombre k est donc égal à $2g$.

BIBLIOGRAPHIE

WEIL (André). - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. - Paris, Hermann, 1948.

On trouvera dans cet ouvrage, outre la démonstration complète de l'hypothèse de Riemann pour la fonction dzêta, la démonstration de l'hypothèse analogue pour les séries L attachées à une courbe. Une autre démonstration de l'hypothèse de Riemann pour la fonction dzêta a été donnée par

ROQUETTE (Peter). - Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenz funktionenkörpern beliebigen Geschlechts, J. für die reine und angew. Math., t. 191, 1953, p. 199-252.

[Avril 1957]