SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN BRACONNIER

# Sur les suites de composition d'un groupe et la tour des groupes d'automorphismes d'un groupe fini

*Séminaire N. Bourbaki*, 1952, exp. n° 7, p. 39-43

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__39_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1949)

# SUR LES SUITES DE COMPOSITION D'UN GROUPE ET LA TOUR DES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'UN GROUPE FINI

par Jean BRACONNIER

[ d'après H. WIELANDT ([1]) ]

1. Soient $G$ un groupe, $G'$ le groupe de ses automorphismes et $\varphi$ la représentation de $G$ dans $G'$ qui, à $s \in G$, fait correspondre l'automorphisme $x \longrightarrow sxs^{-1}$ de $G$ ; $\varphi(G)$ est un sous-groupe distingué de $G'$ ; l'image réciproque par $\varphi$ de l'automorphisme neutre de $G'$ est le centre $Z$ de $G$ ; pour qu'un automorphisme $\sigma \in G'$ permute avec tous les automorphismes intérieurs, il faut et il suffit que $s^{-1}\sigma(s) \in Z$ pour tout $s \in G$. Supposons maintenant que $Z = \{e\}$ ; $\varphi$ est un isomorphisme de $G$ dans $G'$ et on identifie alors $G$ avec le sous-groupe distingué $\varphi(G)$ de $G'$ ; le centralisateur de $G$ (ensemble des éléments de $G'$ permutables avec ceux de $G$) se réduit à $\{e\}$ ; en particulier, le centre de $G'$ est $\{e\}$. Si l'on pose $G = G_1$ et si, pour tout entier $n > 0$, on désigne par $G_{n+1}$ le groupe des automorphismes de $G_n$, la suite croissante de groupes $(G_n)$ s'appelle la tour des groupes d'automorphismes de $G$. Etant donné $n > 0$, $G_n$, $G_{n-1}$, ... , $G_1$, $\{e\}$ est une suite de composition de $G_n$ et, pour $0 < i < n$, le centralisateur de $G_i$ dans $G_{i+1}$ est $\{e\}$. Dans le cas où $G$ est un groupe fini d'ordre $g \geqslant 2$, WIELANDT, en étudiant les suites de composition d'un groupe fini ayant des propriétés analogues à celles de la suite de composition de $G_n$ qu'on vient de définir, montre que l'ordre de $G_n$ est majoré par une fonction de $g$, à savoir $g^{3(\log_2 g)^2}$. Il en résulte que la tour des groupes d'automorphismes de $G$ n'a qu'un nombre fini d'étages : il existe $n$ tel que tous les automorphismes de $G_n$ soient intérieurs ([2]).

2. Dans tout ce qui suit, $G$ désigne un groupe ayant une suite de Jordan-Hölder, de longueur $n$. On dit qu'un sous-groupe $H$ de $G$ est correct s'il existe une suite de composition de $G$ dont $H$ est un terme. Tout sous-groupe distingué de $G$ est correct, comme son nom l'indique. Si $H$ est un sous-groupe correct de $G$, il existe ainsi une suite de Jordan-Hölder de $G$ dont $H$ est un terme, soit $G = G_0$, $G_1$, ... , $G_r = H$, ... , $G_n = \{e\}$. $G_r$, ... , $G_n$ est une suite de

([1]) WIELANDT (H.). - Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z., t. 45, 1939, p. 209-244.

([2]) Cette question avait été posée par ZASSENHAUS, qui a d'ailleurs montré que si $G$ est un groupe simple non abélien, fini ou non, on a $n = 2$.

Jordan-Hölder de $H$, et $H$ est de longueur $n-r$ ; il en résulte que le nombre $r$ des groupes quotients $G/G_1$, ..., $G_{r-1}/H$ et la structure de ces groupes ne dépendent pas de la suite de Jordan-Hölder $G_o$, ..., $G_n$. On dit que la suite $G$, $G_1$, ..., $G_{r-1}$, $H$ est une suite de Jordan-Hölder de longueur $r$ joignant $G$ à $H$, et on appelle les $r$ groupes $G/G_1$, ..., $G_{r-1}/H$ les quotients de cette suite. On a alors le théorème suivant :

Soient $H$ et $K$ deux sous-groupes corrects de $G$, $L$ le sous-groupe de $G$ engendré par $H \cup K$. Les sous-groupes $H \cap K$ et $L$ sont des sous-groupes corrects de $G$ ; si $\sum_1$ (resp. $\sum_2$) est une suite de Jordan-Hölder joignant $L$ à $H$ (resp. $H$ à $H \cap K$), chacun des quotients de $\sum_1$ est isomorphe à un quotient de $\sum_2$ et chacun des quotients de $\sum_2$ figure dans $\sum_1$ avec une multiplicité au moins aussi grande que dans $\sum_2$.

Ce résultat fondamental se prouve en plusieurs étapes :

1) Soit $G_o$, ..., $G_n$ une suite de Jordan-Hölder de $G$ contenant $H$ ; si on pose $G'_i = G_i \cap K$ pour $0 \leq i \leq n$, $G'_o$, ..., $G'_n$ est une suite de composition de $K$ que l'on peut compléter, après suppression des termes égaux, en une suite de Jordan-Hölder de $G$ dont $K$ et $H \cap K$ sont des termes. $H \cap K$ est donc un sous-groupe correct de $G$ et les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $K$ à $H \cap K$ figurent parmi les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $G$ à $H$.

2) On montre que $L$ est un sous-groupe correct de $G$ en raisonnant par récurrence sur la longueur $n$ de $G$, puis par récurrence sur la somme des longueurs de deux suites de Jordan-Hölder joignant respectivement $G$ à $H$ et à $K$.

3) On montre enfin que les quotients de $\sum_2$ figurent parmi les quotients de $\sum_1$ en raisonnant par récurrence sur la longueur d'une suite de Jordan-Hölder joignant $G$ à $K$ ; soit $M$ un sous-groupe distingué maximal de $G$ contenant $K$ et $H_1 = H \cap M$ ; ou bien

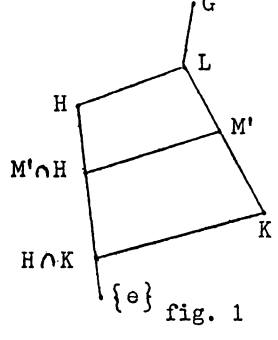

fig. 1

a) $H \cap K = H_1$ et $K$ est invariant par tous les automorphismes intérieurs $x \longrightarrow sxs^{-1}$ avec $s \in H$ ; on a $HK = KH = L$ ; si $K = L$ le résultat est immédiat ; sinon, il existe un sous-groupe distingué maximal $M'$ de $L$ contenant $K$ et ne contenant pas $H$, d'où le résultat (fig. 1), car $M' = (M' \cap H)K$ et $K \cap (M' \cap H) = K \cap H$ ; ou bien

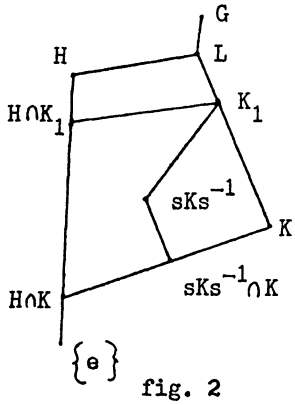

fig. 2

b) $H \cap K = H_1$ et il existe $s \in H$ tel que $sKs^{-1} \neq K$ ; alors le sous-groupe $K_1$ engendré par $K \cup sKs^{-1}$ est correct et de longueur supérieure à celle de $K$ (fig. 2) ; ou bien

c) $H \cap K \neq K_1$ ; alors le sous-groupe $K_2$ de $G$ engendré par $H_1 \cap K$ est correct et de longueur supérieure à celle de $K$ , d'où le résultat (fig. 3).

Le résultat ci-dessus admet les corollaires suivants :

1. Si $H$ (resp. $K$) est d'ordre fini $h$ (resp. $k$), $L$ est d'ordre fini 1 et les seuls diviseurs premiers de 1 sont ceux de $hk$.

2. Si $H$ et $K$ sont résolubles, $L$ l'est aussi.

3. Si, quel que soit le sous-groupe distingué maximal $P$ de $H$ , $H/P$ n'est isomorphe à aucun quotient de $\sum_2$ , $H$ est un sous-groupe distingué de $L$ .

Pour que tous les sous-groupes de $G$ soient corrects, il faut et il suffit que $G$ soit fini et produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

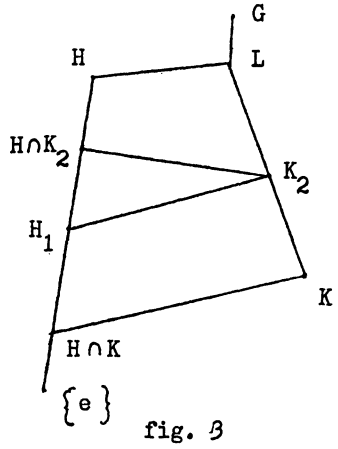

fig. 3

On sait que si deux sous-groupes distingués de $G$ ont une intersection réduite à $\{e\}$, tous les éléments de l'un permutent avec tous les éléments de l'autre. Ce résultat se généralise ainsi aux sous-groupes corrects :

Soient $H$ et $K$ deux sous-groupes corrects de $G$ tels que $H \cap K = \{e\}$, soit $L$ le sous-groupe (correct) de $G$ engendré par $H \cup K$ , et soit $H'$ (resp. $K'$) le plus petit sous-groupe distingué de $L$ contenant $H$ (resp. $K$) ; pour que tout élément de $H$ permute avec tout élément de $K$ , il faut et il suffit que le seul sous-groupe abélien de $H' \cap K'$ soit $\{e\}$.

Cette condition est évidemment nécessaire (car $H$ et $K$ sont des sous-groupes distingués de $L$ , $H = H'$ et $K = K'$ ). Pour montrer qu'elle est suffisante, on raisonne par récurrence sur la somme des longueurs des suites de Jordan-Hölder qui joignent respectivement $G$ à $H$ et $K$ . Si $H = H'$ et $K = K'$ , le résultat

est immédiat ; on suppose donc $K \neq K'$ ; il existe alors un sous-groupe distingué maximal $M$ de $G$ qui contient $K$ ; soit $H_1 = H \cap M$ ; on montre que tous les éléments de $H_1$ permutent avec ceux de $K$, puis avec ceux de $K'$, d'où on déduit $H \cap K' = \{e\}$, ce qui permet alors de montrer que les éléments de $H$ permutent avec ceux de $K$.

La condition ci-dessus est en particulier vérifiée lorsque tous les quotients abéliens d'une suite de Jordan-Hölder de $H$ sont distincts des quotients abéliens d'une suite de Jordan-Hölder de $K$. Il en est ainsi lorsque $H$ et $K$ sont d'ordres finis premiers entre eux.

3. On dit qu'un groupe est parfait s'il est identique au groupe de ses commutateurs. On dit qu'un groupe $U$ est local si l'ensemble des sous-groupes distingués de $U$, distincts de $U$, admet un plus grand élément $M_U$.

Si $H$ est un sous-groupe correct, parfait et local de $G$ et si $K$ est un sous-groupe correct de $G$ ne contenant pas $H$, $H$ est un sous-groupe distingué du sous-groupe de $G$ engendré par $H \cup K$ (démonstration par récurrence sur la longueur de $G$). Soient $\mathcal{M}$ l'ensemble des quotients non abéliens d'une suite de Jordan-Hölder de $G$, et $\ell$ le nombre de ces quotients ; il existe exactement $\ell$ sous-groupes corrects parfaits et locaux de $G$, soient $H_1, \ldots, H_\ell$ ; l'ensemble des groupes $H_1/M_{H_1}, \ldots, H_\ell/M_{H_\ell}$ est identique à $\mathcal{M}$. On démontre ce résultat par récurrence sur la longueur $n$ de $G$ ; si $n > 0$ et si $M$ est un sous-groupe distingué maximal de $G$, ou bien $G/M$ est abélien, et tous les sous-groupes corrects, parfaits et locaux de $G$ sont contenus dans $M$, ou bien $G/M$ n'est pas abélien, et on montre, à l'aide du résultat du début de ce paragraphe, qu'il existe un sous-groupe $H$ de $G$, correct, parfait, local et non contenu dans $M$ : il suffit de prendre pour $H$ un sous-groupe minimal parmi les sous-groupes corrects de $G$ non contenus dans $M$. Cet important résultat permet de démontrer les propriétés suivantes :

Soit $H$ un sous-groupe correct et parfait de $G$ ;

a) Si $H \neq \{e\}$, $H$ est engendré par les sous-groupes corrects, parfaits et locaux qu'il contient.

b) $H$ permute avec tous les sous-groupes corrects de $G$.

c) Si $K$ est un sous-groupe correct de $G$ tel que $H \cap K$ soit résoluble, $H$ est un sous-groupe distingué du sous-groupe de $G$ engendré par $H \cup K$.

4. Soient maintenant G un groupe fini d'ordre $g$, H un sous-groupe correct de G d'ordre $h \geqslant 2$. On a le théorème fondamental suivant :

Soient H' le plus petit sous-groupe distingué de G contenant H, et r l'indice du normalisateur de H ; il existe un nombre premier p tel que, si $H_p$ est le plus petit sous-groupe distingué de H tel que $H/H_p$ soit un p-groupe, H' contienne un sous-groupe correct K d'ordre $p^k > r^{1/\alpha}/(\log_{60} g)^c h^{2\alpha}$ (en posant $\alpha = \log_2 h$ et $c = \log_{60}{}^2$) et dont tous les éléments permutent avec les éléments de $H_p$.

On commence par établir le résultat suivant : si L est un sous-groupe distingué de G d'ordre $\ell$ et dont l'indice est une puissance de p, il existe un sous-groupe distingué M de G d'ordre $p^m \geqslant p^n/\ell^{\log_2 \ell}$, $p^n$ étant la plus grande puissance de p divisant $g$, et tous les éléments de M permutent avec ceux de L (on utilise le fait que le groupe des automorphismes de L est d'ordre $\leqslant \ell^{\log_2 \ell}$). Puis on montre que, si $h = p^j$, l'ordre de H' est $p^{j'} > r^{1/j}$. On en déduit alors un premier résultat : si H est résoluble, alors H' contient un sous-groupe correct d'ordre $p^k > r^{1/\alpha}/h^{\alpha}$. On remarque enfin que, si H est parfait, on a $r \leqslant (\log_{60} g)^{\alpha c}$ (en utilisant le fait que le plus petit groupe simple non abélien est le groupe alterné de degré 5, dont l'ordre est 60). On en déduit le théorème fondamental en considérant le plus petit sous-groupe distingué $H_1$ de H tel que $H/H_1$ soit résoluble : $H_1$ est alors parfait.

Remarquons maintenant que, si p divise l'ordre du centralisateur de $H_p$, p divise aussi l'ordre du centralisateur de H. Si donc le centralisateur de H se déduit à $\{e\}$, l'ordre du centralisateur de $H_p$ est premier avec p et $p^k = 1$, donc $r < (\log_{60} g)^{c\alpha} h^{2\alpha^2}$. Or l'ordre du normalisateur de H est $\leqslant h^{\alpha}$; on a donc $g < ((\log_{60} g)^c h^{2\alpha+1})^{\alpha}$. Mais on a $h \geqslant 6$ (sinon H aurait un centre $\neq \{e\}$) et par suite, $\alpha > 2$ ; on en déduit que $(\log_{60} g)^c \leqslant h^{\alpha-1}$, d'où $g < h^{3\alpha^2}$. En résumé : Si le centralisateur de H se réduit à $\{e\}$, on a $g < h^{3\alpha^2}$.

Si on reprend les notations du paragraphe 1, il est clair que G est un sous-groupe correct de $G_n$ et que le centralisateur de G dans $G_n$ est $\{e\}$. L'ordre de $G_n$ est donc $\leqslant g^3(\log_2 g)^2$, d'où le résultat annoncé.

---