SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE SAMUEL

La théorie des correspondances birationnelles selon Zariski

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 6, p. 33-37

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__33_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1948)

LA THÉORIE DES CORRESPONDANCES BIRATIONNELLES SELON ZARISKI

par Pierre SAMUEL

1. Soit K un corps. Une variété algébrique projective V est représentée par un idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ de l'anneau de polynomes $K[Y_0, \dots, Y_n]$. L'anneau $O = K[Y_0, \dots, Y_n]/\mathfrak{p} = K[\eta_0, \dots, \eta_n]$ (où η_i est la classe de Y_i mod $\mathfrak{p}$) sera appelé l'anneau de coordonnées homogènes de V. Par passage aux quotients il existe dans O une notion de degré ; tout élément de O est somme d'éléments homogènes, et ceci de façon unique.

Le corps des quotients $K(\eta_0, \dots, \eta_n)$ de O admet également une notion de degré. Ses éléments de degré zéro forment un sous-corps $\Sigma = K(\frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, \frac{\eta_n}{\eta_0})$, appelé le corps des fractions rationnelles sur V ; son degré de transcendance r est appelé la dimension de V. Le corps $K(\eta_0, \dots, \eta_n)$ est une extension transcendante simple $\Sigma(\eta_0)$ de Σ.

Les sous-variétés de V correspondent aux idéaux premiers homogènes de O (inclusions inversées). L'idéal $(\eta_0, \dots, \eta_n)$ de O, cependant, ne correspond à aucune sous-variété de V ; on l'appelle l'idéal irrelevant. Soit $\mathfrak{q}$ l'idéal premier de la sous-variété W ; le sous-anneau $Q(W)$ de Σ composé des quotients $\frac{f(\eta)}{g(\eta)}$ où f et g sont des formes de même degré et où $g(\eta) \notin \mathfrak{q}$, s'appelle l'anneau des quotients de W. Si $\eta_0 \notin \mathfrak{q}$ (c'est-à-dire si W n'est pas "à l'infini"), $Q(W)$ est l'anneau des quotients de $\bar{O} = K[\frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, \frac{\eta_n}{\eta_0}]$ ("anneau de coordonnées non homogènes") par l'idéal premier $\mathfrak{q}$ engendré par les $F_s(\eta)/\eta_0^s$ (où $F_s(\eta) \in \mathfrak{q}$, et est une forme de degré s) ; l'idéal $\mathfrak{m}$ engendré par $\bar{\mathfrak{q}}$ dans $Q(W)$ est maximal, et contient tout idéal non trivial de $Q(W)$ ($Q(W)$ est donc un "anneau local"). La dimension de W est égale au degré de transcendance sur K du corps quotient $Q(W)/\mathfrak{m}$. Les relations "$Q(W) \subset Q(W_1)$" et "$W \subset W_1$" sont équivalentes.

2. Nous considérerons principalement les valuations v du corps Σ. Une valuation v de Σ (sur K) est une application v de Σ^* sur un groupe abélien totalement ordonné Γ, noté additivement, et appelé le groupe des valeurs de v,

application telle que

(1) $\quad v(xy) = v(x) + v(y)$

(2) $\quad v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$

(3) $\quad v(\alpha) = 0 \quad$ pour tout $\quad \alpha \in K^*$

On convient d'écrire $v(0) = +\infty$, $+\infty$ étant un élément qu'on adjoint à Γ en convenant que $\gamma < +\infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Les éléments $x \in \Sigma$ tels que $v(x) \geq 0$ forment un sous-anneau R_v , appelé l'anneau de valuation ; ceux tels que $v(x) > 0$ forment un idéal maximal $\mathfrak{v}$ de R_v , appelé l'idéal de valuation. $R_v/\mathfrak{v} = \Sigma_v$ est un corps appelé le corps résiduel de v ; d'après (3) Σ_v contient un corps isomorphe à K , que nous identifierons à K ; le degré de transcendance ρ de Σ_v sur K s'appelle la dimension de la valuation v ; on a évidemment $\rho \leq r-1$. Une valuation de dimension $r-1$ s'appelle un diviseur ; une valuation de dimension zéro s'appelle une place. On démontre que les diviseurs de Σ sont les valuations dont le groupe des valeurs est isomorphe à Z .

Il est clair que si R_v est un anneau de valuation, et si x est un élément quelconque de Σ , soit x , soit $1/x$ appartient à R_v . Cette propriété caractériae les anneaux de valuation R (si U est le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de R , Σ^*/U peut être muni d'une structure de groupe abélien totalement ordonné, et joue le rôle de Γ) .

Si v_1 est une valuation du corps résiduel Σ_v , de groupe des valeurs Γ_1 , le sous-anneau R de R_v composés des éléments x dont la classe $\bar{x}$ dans Σ_v appartient à R_{v_1} , est un anneau de valuation de Σ , donnant lieu à une valuation ω . On dit que ω est composée de v . Le groupe des valeurs de ω est isomorphe au produit $\Gamma \times \Gamma_1$ ordonné lexicographiquement.

3. Soit v une valuation de Σ . Parmi les $v(\frac{\eta_i}{\eta_s})$ choisissons un élément maximal, soit par exemple $v(\frac{\eta_n}{\eta_o})$; alors $v(\frac{\eta_i}{\eta_o}) \geq 0$ sinon $v(\frac{\eta_n}{\eta_i}) > v(\frac{\eta_n}{\eta_o})$. Ceci veut dire que l'anneau de coordonnées non homogènes $\bar{o} = K[\frac{\eta_1}{\eta_o}, \ldots, \frac{\eta_n}{\eta_o}]$ est contenu dans l'anneau de valuation R_v ; l'idéal de valuation $\mathfrak{v}$ induit sur $\bar{o}$ un idéal premier $\bar{q}$; $\bar{q}$ détermine dans o un idéal premier homogène q ; la sous-variété $W \subset V$ correspondant à q est appelé le centre de la valuation v . Cette définition ne dépend pas du choix de $\frac{\eta_n}{\eta_o}$; elle veut dire en effet que

$Q(W) \subset R_U$ et que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{v}$; on peut aussi caractériser W comme étant la sous-variété maximale dont l'anneau des quotients soit contenu dans R_v . On déduit de ceci :

a) Si v_1 est composée de v , alors centre $v_1 \subset$ centre v .

b) La dimension du centre de v est inférieure à la dimension de la valuation v (un diviseur est dit de première ou de seconde espèce suivant que son centre est de dimension r-1 ou $< r-1$).

4. On démontre, au moyen du théorème de Zorn, que tout sous-anneau propre A de Σ (contenant K) est contenu dans au moins un anneau de valuation R_v tel que $\mathfrak{v} \cap A$ soit un idéal premier $\mathfrak{p}$ ($\neq \{0\}$) donné à l'avance de A . En particulier, toute sous-variété W de V est le centre d'au moins une valuation (prendre $t = Q(W)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$) . De plus, si $W \subset W_1 \subset V$, et si v_1 est une valuation de centre W_1 , il existe une valuation v , composée de v_1 , et de centre W .

On démontre également que l'intersection des anneaux de valuation contenant A est la <u>fermeture intégrale</u> A^* de A dans Σ .

5. On dit que deux variétés V et V' sont en <u>correspondance birationnelle</u> si leurs corps de fractions rationnelles Σ et Σ' sont isomorphes sur K . Nous identifierons alors Σ' à Σ .

<u>Nous dirons que deux sous-variétés</u> W <u>et</u> W' <u>de</u> V <u>et</u> V' <u>sont correspondantes, s'il existe une valuation</u> v <u>de</u> Σ <u>ayant</u> W <u>pour centre sur</u> V , <u>et</u> W' <u>pour centre sur</u> V' . Nous écrirons symboliquement $W \top W'$.

W étant donnée, il existe au moins une W' telle que $W \top W'$.

Si $W \subset W_1 \subset V$, et si $W_1 \top W_1'$, il existe $W' \subset W_1'$ telle que $W \top W'$. Si W_1' est un point P' , on a donc $W \top P'$ pour toute $W \subset W_1$.

La correspondance $\top$ n'est en général ni biunivoque, ni même univoque sur V . Mais, si $W \top W'$ et si $Q(W') \subset Q(W)$, alors W' est la seule sous-variété de V' qui corresponde à W .

Nous dirons qu'une correspondance birationnelle est <u>régulière</u> si elle est biunivoque.

6. Les correspondances birationnelles prennent un aspect plus simple si on les applique à des variétés normales ou localement normales. Rappelons les faits principaux relatifs à ces variétés.

Une variété V est dite localement normale si tous les anneaux $Q(W)$ sont intégralement fermés (il suffit pour cela que tous les $Q(P)$, où les P sont des points, le soient). On dit que V est localement normale le long de W si $Q(W)$ est intégralement fermé.

Etant donnée une variété projective quelconque V, le fait que la fermeture intégrale de l'anneau de coordonnées homogènes o de V est un o-module de type fini, permet d'associer à V une variété localement normale V', birationnellement équivalente à V, déterminée à une correspondance birégulière près, et dont nous décrirons tout à l'heure quelques propriétés. La variété V' est appelé le modèle normal dérivé de V.

On montre que les sous-variétés W le long desquelles V est localement normale sont celles dont l'idéal $\mathfrak{q}$ ne contient pas le conducteur c de la fermeture intégrale de o. Une variété est donc localement normale si et seulement si $c = o$ ou si c est un idéal irrelevant.

Les sous-variétés W'_i du modèle normal V' dérivé de V, qui correspondent à la sous-variété W de V sont en nombre fini, et de même dimension que W. Si $\mathfrak{S}^*$ est la fermeture intégrale de $\mathfrak{S} = Q(W)$, et si $\mathfrak{m}_1^* \dots \mathfrak{m}_v^*$ sont les idéaux premiers de $\mathfrak{S}^*$, tels que $\mathfrak{m}_i^* \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{m}$, on a $Q(W'_i) = \mathfrak{S}^*_{\mathfrak{m}_i^*}$. Ceci montre que si V est localement normale le long de W, il correspond à W une seule sans variété W' et $Q(W) = Q(W')$; ainsi, en dehors de l'ensemble algébrique défini par le conducteur c, la correspondance birationnelle entre V et V' est biunivoque.

Dans l'autre sens, comme $Q(W') \supset Q(W)$ pour tout $W \subset V$, W est la seule variété qui corresponde à W' (cf : projection d'une courbe gauche sans points singuliers). Enfin deux modèles normaux dérivés de V sont en correspondance régulière.

7. Nous nous bornerons désormais aux correspondances birationnelles entre deux variétés localement normales V et V'.

Nous dirons que $W \subset V$ est $\begin{cases} \text{régulière} \\ \text{irrégulière} \\ \text{fondamentale} \end{cases}$ s'il existe $W' \subset V'$ telle

que $W \intercal W'$ et que $\begin{cases} Q(W) = Q(W') \\ Q(W) \supset Q(W') \\ Q(W) \not\supset Q(W') \end{cases}$ et $Q(W) \neq Q(W')$

Les variétés régulières et irrégulières W sont celles auxquelles il ne correspond qu'une seule variété W'. A une variété fondamentale W correspond une

infinité de variétés W' . La dimension d'une variété fondamentale ne peut excéder r-2 .

BIBLIOGRAPHIE

1°) Le présent exposé suppose connu l'ouvrage de

VAN DER WAERDEN (B.L.). - Algebra. - Berlin, Springer, 1955 (Grundlehren der Math. Wissenschaften, Bd 33 und 34 ; 3te Auflage der Modernen Algebra).

Pour les notations, voir :

BOURBAKI (Nicolas). - Eléments de Mathématique, Livre II : Algèbre. - Paris, Hermann, 1942-1955 (Act. scient. et ind. n° 934-1144, 1032-1236, 1044, 1102, 1179).

2°) Références aux ouvrages de Zariski :

ZARISKI (Oscar). - Foundations of a general theory of birational correspondences, Trans. Amer. math. Soc., t. 53, 1943, p. 490-542.

ZARISKI (Oscar). - Normal varieties and birational correspondences, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 402-413.

3°) Pour la théorie des valuations :

KRULL (W.). - Idealtheorie. - Berlin, Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik, Vierter Band, n° 3).

MACLANE (S.) and SCHILLING (O.F.G.). - Zero-dimensional branches of rank one on algebraic varieties, Ann. of Math., t. 40, 1939, p. 507-520.

4°) Pour la normalisation des variétés :

ZARISKI (Oscar). - Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties, Amer. J. of Math., t. 61, 1939, p. 249-294.

WEIL (André). - Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques. - Paris, Hermann, 1935 (Act. scient. et ind. n° 205 ; exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand n° 11).

WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New York, Amer. math. Soc., 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. vol. 29).