SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES DIXMIER

Anneaux d'opérateurs et représentations des groupes

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 40, p. 331-336

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__331_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1951)

ANNEAUX D'OPÉRATEURS ET REPRÉSENTATIONS DES GROUPES

par Jacques DIXMIER

1. Représentations irréductibles.

1. Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien, P une algèbre auto-adjointe d'opérateurs dans $\mathcal{H}$, commutative et faiblement fermée. Soit Ω le spectre de P, compact. Il existe un isomorphisme canonique de P sur l'$*$-algèbre $C(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω, compatible avec la norme. On notera $A(\zeta)$ la fonction ainsi associée à l'opérateur $A \in P$.

Si $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$, l'application $A \to \langle Ax,y\rangle$ est une forme linéaire continue sur P, donc sur $C(\Omega)$, c'est-à-dire une mesure $\mu_{x,y}$ sur Ω :

$$\langle Ax,y\rangle = \int_\Omega A(\zeta)\, d\mu_{x,y}(\zeta)$$

2. Soit B un opérateur permutable à P. Soit $a \in \mathcal{H}$, tel que $\mu_{a,a} = \mu$ ait pour support Ω. Si $A \in P$ et $A \geqslant 0$, on a :

$$\left|\int A(\zeta)\, d\mu_{Ba,a}(\zeta)\right| = |\langle ABa,a\rangle| = |\langle BA^{\frac{1}{2}}a, A^{\frac{1}{2}}a\rangle| \leqslant \|B\|\, \|A^{\frac{1}{2}}a\|^2 =$$

$$= \|B\|\langle Aa,a\rangle = \|B\| \int A(\zeta)\, d\mu(\zeta)\ .$$

D'où l'existence d'une fonction $B(\zeta)$, mesurable et bornée, donc si l'on veut continue et alors bien déterminée, telle que

$$d\mu_{Ba,a}(\zeta) = B(\zeta)\, d\mu(\zeta)\ ,$$

$$\int A(\zeta)B(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int A(\zeta)\, d\mu_{Ba,a}(\zeta) = \langle ABa,a\rangle$$

et ceci caractérise $B(\zeta)$. D'où facilement :

1°) $B(\zeta)$ dépend linéairement de B ;
2°) $B^*(\zeta) = \overline{B(\zeta)}$;
3°) $B^*B(\zeta) \geqslant 0$;

Bref, $B \to B(\zeta)$ est une forme linéaire positive continue sur toute $*$-algèbre $\subset P'$.

3. Soit $M \subset P'$ une $*$-algèbre d'opérateurs telle que les Ba, $B \in M$, sous-tendent $\mathcal{H}$. (Ceci entraîne que le support de μ est Ω ; car soit

$A \in P^+$ tel que $\int A(\zeta)d\mu(\zeta) = 0$: on a $\langle Aa,a\rangle = 0$, donc $Aa = 0$, donc $BAa = 0 = ABa = 0$ pour $B \in M$, donc $A = 0$). L'application $B \to B(\zeta)$ définit une représentation de M (résultat général sur les $*$-algèbres). On prend pour espace hilbertien $\mathcal{H}(\zeta)$ l'algèbre M munie du produit scalaire $B^*C(\zeta)$, on passe au quotient et on complète, on a donc une application canonique $B \to B(\zeta)$ de M sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}(\zeta)$. La représentation $B \to U_B(\zeta)$ est définie par $U_B(\zeta)\, C(\zeta) = BC(\zeta)$ pour $C \in M$, opérateur qui, on le voit aisément, se prolonge à $\mathcal{H}(\zeta)$ en opérateur borné. Notons l'égalité :

$$(1)\quad \|\Sigma A_{h_i} B_i a\|^2 = \Sigma\langle A^*_{h_j} A_{h_i} B_j^* B_i a, a\rangle = \Sigma\langle A_{\overline{h}_j h_i} B_j^* B_i a, a\rangle =$$

$$= \Sigma\int \overline{h}_j(\zeta) h_i(\zeta) B_j^* B_i(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int \Sigma\, \overline{h}_i(\zeta) h_i(\zeta)$$

$$\langle B_j(\zeta), B_i(\zeta)\rangle\, d\mu(\zeta) = \int \|\Sigma\, h_i(\zeta) B_i(\zeta)\|^2\, d\mu(\zeta)\,.$$

4. Nous sommes dans les conditions de fabrication d'une somme continue : on a l'espace Ω, la mesure μ, les espaces $\mathcal{H}(\zeta)$; pour tout x appartenant à l'ensemble des Ba, où $B \in M$, soit $B \in M$ avec $Ba = x$; le champ de vecteurs $B(\zeta)$ dépend linéairement et univoquement de x, à cause de (1) ; $\|B(\zeta)\|^2 = B^*B(\zeta)$ dépend continument de ζ ; enfin, les $B(\zeta)$ sont partout denses dans $\mathcal{H}(\zeta)$ pour tout ζ. La famille des $B(\zeta)$ est donc une famille fondamentale Λ. Construisons l'espace L^2_Λ correspondant. On va définir un isomorphisme canonique de L^2_Λ sur $\mathcal{H}$.

L^2_Λ s'obtient en complétant l'ensemble des champs de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(\zeta) B_i(\zeta) \quad (h_i \in C(\Omega))$$

muni de la norme

$$\int \|\Sigma h_i(\zeta) B_i(\zeta)\|^2\, d\mu(\zeta)\,.$$

Considérons l'application

$$\Sigma h_i(\zeta)\, B_i(\zeta) \to \Sigma A_{h_i} B_i a\,.$$

Elle sera linéaire si on prouve qu'elle est univoque. Or, on va voir qu'elle est biunivoque et même isométrique : ceci résulte de (1).

On peut donc prolonger cette application à L^2_Λ, et on voit tout de suite qu'on obtient un isomorphisme de L^2_Λ sur $\mathcal{H}$, qui permet d'identifier L^2_Λ et $\mathcal{H}$.

5. Considérons, pour $B \in M$, le champ d'opérateurs $U_B(\zeta)$. Il est continu : $U_B(\zeta)\, C(\zeta) = BC(\zeta)$. Donc il lui correspond un opérateur $\widetilde{B}$ dans $L^2_{\mathcal{N}}$: on va voir que c'est justement B moyennant l'identification précédente. Il suffit de prouver que $Bu = \widetilde{B}u$ pour $u \in \mathcal{N}$, donc que BCa (où $C \in M$) peut être identifié au champ $U_B(\zeta)\, C(\zeta) = BC(\zeta)$, ce qui est bien le cas.

6. Si P est une sous-algèbre commutative maximale de M', presque toutes les représentations sont irréductibles, si l'on suppose M séparable pour la norme (ce qui entraîne que $\mathcal{H}$ et les $\mathcal{H}(\zeta)$ sont séparables).

En effet, si P est maximale, tout opérateur de M' permutable à P est dans P, donc $M' \cap P' = P$, donc P' est l'algèbre de von Neumann engendrée par M et P : tout opérateur permutable à P est donc limite forte d'une suite d'opérateurs $B_1, B_2, \ldots$ de l'*-algèbre engendrée par $M \cup P$; on a : $B_i = \sum A_n^i B_n'^i$, avec $A_n^i \in P$, $B_n'^i \in M$. La séparabilité de M permet de construire une suite $C_p \in M$ telle que l'ensemble des $U_{C_p}(\zeta)$ soit irréductible dans $\mathcal{H}(\zeta)$ pour presque tout ζ. Si par exemple $B_i \to C_p$, on a

$$\sum U_{A_n^{i_p}(\zeta)\, B_n'^{i_p}(\zeta)} \to U_{C_p}(\zeta)$$

pour presque tout ζ et pour une suite partielle (i_p) ; comme les $A_n^{i_p}(\zeta)$ sont les scalaires, on voit que la représentation $B \to U_B(\zeta)$ est irréductible presque-partout, donc, d'après les propriétés spéciales de Ω, sur un ensemble ouvert partout dense de Ω.

7. Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $s \to U_s$ une représentation fortement continue de G, définie par une fonction continue de type positif $\varphi(s) = \langle U_s a, a \rangle$, où a est un vecteur générateur de l'espace $\mathcal{H}$ de la représentation. Pour $f \in L^1(G)$, soit $U_f = \int_G f(s)\, U_s\, ds$. Soit M l'*-algèbre d'opérateurs engendrée par les U_f : M est séparable pour la norme. Soit P une sous-algèbre commutative maximale de M'. On construit un espace Ω, une mesure μ, des espaces $\mathcal{H}(\zeta)$, des représentations $U_f(\zeta)$ de M. On a :

$$\langle U_f\, a, a \rangle = \int_\Omega \langle U_f(\zeta) a(\zeta),\ a(\zeta) \rangle\, d\mu(\zeta)$$

On peut remplacer Ω par un ensemble Ω' ouvert dans Ω, donc localement compact, tel que l'ensemble des $U_f(\zeta)$ soit irréductible pour $\zeta \in \Omega'$.

L'égalité précédente s'écrit

$$\int_G f(s)\,\varphi(s)ds = \int_G f(s)ds \int_{\Omega'}\varphi(s,\zeta)d\mu(\zeta)$$

où $\varphi(s,\zeta)$ est, pour tout $\zeta \in \Omega'$, une fonction élémentaire de type positif. De là, on déduit assez aisément :

$$\varphi(s) = \int_{\Omega'}\varphi(s,\zeta)d\mu(\zeta) .$$

Enfin, l'espace Ω' étant monstrueux, on va le remplacer par un espace plus sympathique, de façon à obtenir une généralisation satisfaisante du théorème de Bochner. Pour cela, considérons comme équivalents deux éléments ζ, ζ' de Ω tels que $\zeta(A) = \zeta'(A)$ pour $A \in M$. Soit R la relation d'équivalence ainsi définie. Soit Z l'espace quotient de Ω par R, et notons ν l'image canonique de μ dans Z.

Soit Z' l'ensemble des $\zeta \in Z$ pour lesquels $\varphi(s,\zeta)$ est élémentaire ; $Z - Z'$ est de mesure nulle, et

$$\varphi(s) = \int_{Z'} \varphi(s,\zeta_1)\, d\nu(\zeta_1)$$

Quand G est abélien, Z' est le spectre habituel de φ.

2. L'algèbre d'un groupe.

1. Soit M une algèbre de von Neumann. Elle est dite de classe finie si les conditions suivantes, équivalentes entre elles, sont vérifiées :

1°) $A^*A = 1$ entraîne $AA^* = 1$.

2°) $AB = 1$ entraîne $BA = 1$.

3°) Si A est self-adjoint, si $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont unitaires, si B est dans le centre $M^\natural$ de M, et si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \geqslant B$ avec $\sum \lambda_i = 0$, on a $B \leqslant 0$.

4°) Il existe un projecteur $A \to A^\natural$ de M sur $M^\natural$ tel que $(AB)^\natural = (BA)^\natural$, qui est strictement positif ($A \geqslant 0$ entraîne $A^\natural \geqslant 0$; si de plus $A^\natural = 0$, $A = 0$) et fortement continu sur la boule unité de M.

Soit M quelconque, et $\mathfrak{M}$ un sous-espace fermé de H tel que $P_{\mathfrak{M}} \in M$. Les $P_{\mathfrak{M}} A P_{\mathfrak{M}}$, où $A \in M$, induisent dans $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann $M_{(\mathfrak{M})}$. Si $M_{(\mathfrak{M})}$ est de classe finie, $\mathfrak{M}$ est dite finie. Si toute $\mathfrak{M} \neq 0$ est infinie, M est dite de classe purement infinie.

Ceci posé, considérons les $\mathfrak{M}$ telles que $P_{\mathfrak{M}} \in M^\natural$. Il existe une $\mathfrak{M}$ maximum

telle que $M_{(\mathfrak{M})}$ soit de classe finie, soit H^f ; une $\mathfrak{M}$ maximum telle que $M_{(\mathfrak{M})}$ soit de classe purement infinie, soit H^{pi} ; H^f et H^{pi} sont orthogonales, soit H^i le sous-espace complémentaire de $H^f \oplus H^{pi}$. On a une décomposition canonique de H en H^f , H^i , H^{pi} .

2. Soit G un groupe localement compact, μ la mesure de Haar invariante à gauche, $\mathcal{H}$ l'espace hilbertien des fonctions de carré sommable pour μ .

Pour $s \in G$, l'application $f(x) \to f(s^{-1}x)$, où $f \in \mathcal{H}$, est un opérateur unitaire U_s de $\mathcal{H}$, et l'application $s \to U_s$ est une représentation unitaire fortement continue de G , dite représentation régulière. Soit M l'algèbre de von Neumann engendrée par les U_s . On va la considérer comme algèbre de G .

3. Soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple ne possédant aucun sous-groupe invariant compact, et $s \to U(s)$ une représentation unitaire fortement continue quelconque. Soit M une algèbre de von Neumann contenant les $U(s)$. Dans H^f , la représentation induite est l'application $s \to 1$.

On est ramené à prouver le théorème pour G simple non compact. On prouve qu'il existe dans G un sous-groupe à un paramètre H et une suite x_1 , x_2 , ... d'éléments de G tels que $x_n\, y\, x_n^{-1} \to e$ pour tout $y \in H$. Donc

$$U(x_n)\, U(y)\, U(x_n)^{-1} \to U(e) = 1$$

fortement. Soit $V(s)$ la restriction de $U(s)$ à H^f . On a

$$V(y)^{\S} = (V(x_n)V(y)\, V(x_n)^{-1})^{\S} \to 1^{\S} = 1 ,$$

donc $$V(y)^{\S} = 1 .$$

Soit $V(y) = R + iS$, avec R et S self-adjoints. On a : $R^{\S} = 1$, donc $(1 - R)^{\S} = 0$; or $R = \frac{1}{2}(V + V^*)$, d'où $\|R\| \leqslant 1$, $R \leqslant 1$, $1 - R \geqslant 0$; alors $1 - R = 0$, $V = 1 + iS$; mais

$$1 = VV^* = (1 + iS)(1 - iS) = 1 + S^2 , \quad S^2 = 0 , \quad S = 0 .$$

Bref, $V(y) = 1$ pour tout $y \in H$ et par suite pour tout y conjugué de H . Ces conjugués forment un voisinage de 0 parce que G est simple, donc $s \to V(s)$ est triviale dans un voisinage de e et par suite sur G .

COROLLAIRES.

1. G n'a pas de représentation de dimension finie (continue ou non).

2. Un sous-groupe H analytique semi-simple d'un groupe de Lie compact est fermé (on montre que H est compact, en prouvant, à l'aide du théorème, que les

sous-groupes invariants simples de H sont compacts).

3. Dans le cas de l'algèbre du groupe, $H^f = 0$.

REMARQUE. - Si G est le groupe de Lorentz dans R^3 , si l'algèbre engendré par les U_s est un facteur, ce facteur est de classe I_∞ . En fait, HARISH-CHANDRA a montré que toute représentation unitaire continue d'un groupe de Lie semi-simple connexe engendre une algèbre de classe I.

4. Revenons à l'algèbre du groupe. Alors, s'il existe dans G un système fondamental de voisinages invariants par les automorphismes intérieurs, $H = H^f$, et réciproquement.

Prouvons seulement la partie directe. Soit f la fonction caractéristique d'un voisinage invariant compact. Pour $s,t \in G$, on a $\langle U_s U_t f,f\rangle = \langle U_t U_s f,f\rangle$ parce que f est centrale. On en déduit, par continuité, que $\langle ABf,f\rangle = \langle BAf,f\rangle$ pour $A,B \in M$. Si alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \geqslant B$ avec $B \in M^{\natural}$, U_i unitaire, A et B self-adjoints, $\sum \lambda_i = 0$, soit $B = B^+ - B^- = BE + BF$ la décomposition de B en parties positive et négative. On a

$$0 = \langle (\sum \lambda_i U_i A U_i^{-1}) Ef,f\rangle \geqslant \langle BEf,f\rangle$$

donc $\langle B^+f,f\rangle \leqslant 0$, $B^+f = 0$, $B^+U_sf = U_s B^+f = 0$: B^+ s'annule sur les U_sf , donc $B^+ = 0$ et $B \leqslant 0$.

REMARQUE. - Si G est unimodulaire, on a toujours $H^{pi} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (Roger). - Sur la théorie des représentations unitaires, Annals of Math., Series 2, t. 53, 1951, p. 69-124.

[2] GODEMENT (Roger). - Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 30, 1951, p. 1-110.

[3] GODEMENT (Roger). - Théorie des caractères, I et II, Annals of Math., Series 2, t. 59, 1954, p. 47-85.

[4] MAUTNER (F.I.). - Unitary representations of locally compact groups, I, Annals of Math., Series 2, t. 51, 1950, p. 1-25. ; II, Annals of Math., Series 2, t. 52, 1950, p. 528-556.

[5] SEGAL (I.E.). - The two-sided regular representation of a unimodular locally compact group, Annals of Math., t. 51, 1950, p. 293-298.

[6] SEGAL (I.E.). - An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, Annals of Math., Series 2, t. 52, 1950, p. 272-292.

[7] SEGAL (I.E.) and von NEUMANN (John). - A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups, Annals of Math., Series 2, t. 52, 1950, p. 509-517.

[Septembre 1957]