SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LUC GAUTHIER

Quelques variétés usuelles en géométrie algébrique

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 37, p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__307_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1950)

QUELQUES VARIÉTÉS USUELLES EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par Luc GAUTHIER

N. B. - Pour les notations et définitions, il sera utile de se reporter à CHEVALLEY [2], p. 1 et 2, et [3], p. 1 : courbe algébrique, place, diviseur, classe de diviseurs, théorème de Riemann-Roch, classe canonique ; variété algébrique, cycle, cycle positif, diviseur, équivalence.

1. Variétés de Veronese et Bordiga.

Soient S_r/K un espace projectif à r dimensions défini sur le corps K, et (X) un ensemble de $r+1$ indéterminées ; soit $P_n(X)$ un polynôme homogène en (X) de degré n, défini à un facteur $\neq 0$ près, les rapports de coefficients étant dans K. La variété $P_n(\xi) = 0$ du dual S_r^*/K est appelée forme tangentielle de classe n.

L'ensemble des formes tangentielles de classe n constitue un espace projectif S_N/K de dimension $N = \binom{n+r}{r} - 1$, un point de cet espace ayant pour coordonnées les coefficients de $P_n(X)$.

Dualement, une forme ponctuelle de degré n : $P_n(X) = 0$ de S_r/K est représentée par un point de S_N^*/K c'est-à-dire par un hyperplan de S_N/K.

Un cycle positif de dimension 0 et de degré n de S_r/K, constitué des points $M_k(x_{i,k})$ affectés des coefficients a_k, soit $\sum a_k M_k$ avec $\sum a_k = n$ et $a_k \geqslant 0$, est associé dans S_r^*/K à la forme tangentielle $\prod_k (\sum_i \xi_i x_{i,k})^{a_k} = 0$. Cette forme étant représentée dans S_N/K, on obtient un modèle projectif sur le corps K, de l'ensemble des cycles positifs de S_r/K ayant une signature (a_k) donnée.

Toutes ces variétés sont des sous-variétés de celle qui correspond à la signature $(1, 1, 1, 1, \ldots)$, dite variété de Bordiga B_{nr}, qui est aussi un modèle projectif du produit symétrique $[S_r/K]^n$. Celle qui correspond à la signature (n) est dite variété de Veronese $V_{n,r}$.

Toutes ces variétés sont rationnelles, $V_{n,r}$ est linéaire, B_{nr} est un modèle minimum.

B_{nr} admet un groupe continu G , à $r(r+2)$ paramètres, d'automorphismes projectifs, qui correspond au groupe projectif de S_r/K . Ce groupe G n'est pas transitif : il laisse invariantes toutes les sous-variétés correspondant aux diverses signatures, sous-variétés qui sont singulières sur B_{nr} . G est transitif sur $V_{n,r}$.

Si a est le coefficient d'un point M dans un cycle positif de S_r , M admet un transformé M' sur $V_{n,r}$ auquel on associe l'espace projectif de dimension $d(a) = \binom{a+r}{r} - 1$ osculateur à $V_{n,r}$ (notion indépendante de M' vu la transitivité de G). Avec cette convention, les espaces osculateurs à $V_{n,r}$ aux points M'_k images des points M_k d'un cycle se coupent toujours en un point unique, qui appartient à B_{nr} et est l'image du cycle. Cette construction permet réciproquement, connaissant un point de B_{nr} , de construire le cycle dont il est l'image.

Si W est une variété algébrique de S_r/K , il suffit alors de prendre sa transformée sur $V_{n,r}$ et de lui appliquer la construction ci-dessus pour obtenir une représentation sur le corps K , au moyen d'une sous-variété de B_{nr} , de l'ensemble des cycles positifs de dimension zéro et de degré n appartenant à W .

2. Variétés de Grassmann.

Soit encore S_r/K un espace projectif à r dimensions défini sur le corps K , par la relation d'équivalence classique, à partir de l'espace vectoriel E_{r+1}/K privé de son vecteur nul.

Soit $\mathcal{L}_{p+1}(X , Y , \ldots)$ une forme $(p+1)$-linéaire alternée, définie à un facteur différent de zéro près, les rapports des coefficients étant dans K . L'équation $\mathcal{L}_{p+1}(x , y , \ldots) = 0$ définit sur S_r/K un $(r-p)$-complexe linéaire.

L'ensemble des complexes linéaires de S_r/K constitue un espace projectif S_R/K de dimension $R = \binom{r+1}{p+1} - 1$, un point de cet espace ayant pour coordonnées les coefficients de $\mathcal{L}_{p+1}$.

Un $(p+1)$-vecteur décomposable de $\bigwedge^{p+1} E^*_{r+1}/K$ définit un sous-espace projectif S_p de S_r , qui est ainsi représenté par un point de S^*_R/K . La variété qui dans S^*_R/K représente ainsi d'une manière biunivoque sans exception les S_p/K de S_r/K est dite grassmannienne $G_{r,p}$.

La variété $G_{r,p}$ a pour dimension $(p+1)(r-p)$; elle est rationnelle et c'est un modèle minimum. $G_{r,p}$ admet un groupe continu transitif, à $r(r+2)$

paramètres, d'automorphismes projectifs qui correspond au groupe projectif de S_r/K . Il en résulte, en particulier, que $G_{r,p}$ est dépourvue de points singuliers.

KLEIN a démontré, pour $r = 3$, $p = 1$, et SEVERI, dans le cas général, la propriété importante suivante : $G_{r,p}$ ne contient comme diviseurs positifs que ses intersections avec les formes de S_R^*/K . La démonstration est ainsi conçue :

1° Il est possible de définir sur $G_{r,p}$ privée d'une sous-variété non maximale une fibration F rectiligne rationnelle.

2° Un diviseur positif α de $G_{r,p}$ découpe sur une droite appartenant à $G_{r,p}$ qu'il ne contient pas, un diviseur de degré strictement positif ; pour F , ce degré ne dépend pas de la fibre choisie : on l'appelle l'ordre de α.

3° Si deux diviseurs positifs α_1 , α_2 de $G_{r,p}$ ont même ordre, ils sont équivalents.

Il suffit alors de prendre pour α_1 un diviseur quelconque et pour α_2 une section hyperplane de $G_{r,p}$ affectée d'un coefficient égal à l'ordre de α_1 pour que le théorème en résulte.

La même propriété est valable aussi pour la variété de Bordiga B_{nr} .

3. Coordonnées de Chow.

Le théorème de Severi assure la possibilité de représenter un complexe algébrique de S_r/K d'ordre n au moyen d'une forme de S_R/K de degré n , définie modulo $G_{r,p}$. En appliquant aux formes de degré n de S_R/K la représentation de Veronese, dans S_N^*/K , les formes contenant $G_{r,p}$ sont représentées par les points d'un espace projectif Γ/K et une forme définie modulo $G_{r,p}$ est représentée par un point pris dans $S_{\bar{N}}/K$ supplémentaire de Γ/K dans S_N^*/K .

Etant donnée une variété algébrique irréductible W de S_r/K de dimension d et de degré n , l'ensemble des S_p où $p = r - d - 1$, qui ont avec W un cycle de dimension zéro commun, est un complexe algébrique d'ordre n , représenté dans S_R/K par une forme irréductible de degré n , $f = 0$.

Tout cycle positif de dimension donnée d et de degré n de S_r/K , $\sum a_k W_k$ avec $\sum a_k \deg W_k = n$, associé dans S_R/K à la forme $\prod_k f_k^{a_k} = 0 \pmod{G_{r,p}}$ est ainsi associé à un point de $S_{\bar{N}}/K$ dont les coordonnées projectives sont dites coordonnées de Chow du cycle.

Si le point associé à un cycle de S_r/K décrit dans S_N/K une variété algébrique, on dit que le cycle engendre dans S_r/K un système algébrique.

Soit dans S_r/K une variété algébrique U qui admet une fibration G au moyen de sous-variétés algébriques de dimension d et de degré n . En considérant ces fibres comme des cycles de S_r/K on peut associer à chaque fibre d'une manière biunivoque un point de S_N/K , dont le lieu V , dit "variété associée" est une représentation sur K de la transversalle à la fibration. La correspondance entre un point (x) de U et le point (y) associé à la fibre G(y) qui passe en (x) est une transformation rationnelle T dite "transformation associée" et CHOW démontre dans son mémoire de 1950 que, si G' est une composante simple de G(y) , et si T est régulière au point (x) générique de G' , U et la variété produit V × G' sont analytiquement équivalentes en (x) et (y , x) , c'est-à-dire ont des anneaux locaux complétés isomorphes.

4. Variétés de Jacobi.

Soit une courbe algébrique C définie dans S_r/K par un modèle sans singularité (clôture éventuelle de K).

L'ensemble des diviseurs positifs α de degré $d > 2g - 2$ est représenté par la sous-variété C^d/K de B_{dr} . D'après le théorème de Riemann-Roch, un diviseur canonique n'est jamais multiple d'un diviseur α : la dimension (projective) de la classe de α est donc $d - g$, et les classes des diviseurs positifs de degré d définissent sur C^d/K une fibration au moyen de variétés linéaires L de dimension $d - g$, et de degré d .

La variété associée J à cette fibration, C^d/K et L étant dépourvues de singularités, est elle-même sans singularités. On l'appelle la Jacobienne de C .

Si $\mathfrak{b}$ est un diviseur positif de degré $d - g$ de C , l'ensemble des diviseurs $\mathfrak{c}$ positifs de degré g de C a les propriétés suivantes :

1° $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ est un diviseur positif de degré d , soit α.

2° La condition nécessaire et suffisante pour que deux diviseurs $\mathfrak{c}$ soient équivalents est que les diviseurs $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ le soient.

La variété J représente donc biunivoquement les classes de diviseurs positifs de degré g , ce qui est la définition classique de la jacobienne.

Choisissons $d = 2g$ et fixons une classe (α) : la relation entre classes $(\mathfrak{c}_1) + (\mathfrak{c}_2) = (\alpha)$ définit un automorphisme birationnel involutif de J .

En faisant varier (α) arbitrairement, on engendre un groupe G abélien continu, à g paramètres, d'automorphismes de J , et la variété du groupe est la variété des classes (α) c'est-à-dire J elle-même.

Nous avons ainsi donné une construction sur le corps K de la jacobienne J (modèle sans singularité) d'une courbe algébrique C donnée par un modèle projectif sans singularité. On comparera utilement cette construction avec celle proposée par W. L. CHOW.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORDIGA (Giovanni). - Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano, Ann. di Mat. pura ed appl., Seria 3, t. 27, 1918, p. 1-40.

[2] CHEVALLEY (Claude). - L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p , I., Séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49, exposé n° 3.

[3] CHEVALLEY (Claude). - L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p , II., Séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49, exposé n° 9.

[4] CHOW (Wei-Liang). - The jacobian variety of an algebraic curve, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 453-476.

[5] CHOW (W. L.) and VAN DER WAERDEN (B. L.). - Zur algebraischen Geometrie, IX : Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, t. 113, 1937, p. 692-704.

[6] EHRESMANN (Charles). - Sur la topologie de certains espaces homogènes, Annals of Math., t. 35, 1934, p. 396-443 (Thèse Sc. math. Paris. 1934).

[7] SEVERI (Francesco). - Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare, Ann. di Mat. pura ed appl., Seria 3, t. 24, 1915, p. 89-120.

[8] VAN DER WAERDEN (B. L.). - Einführung in die algebraische Geometrie. - Berlin, Springer, 1939 (Die Grundlehren der math. Wiss., 51).

[Février 1959]