SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ROGER GODEMENT

I. Les représentations unitaires irréductibles du groupe complexe unimodulaire

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 4, p. 21-27

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__21_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1948)

I. LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES IRREDUCTIBLES DU GROUPE COMPLEXE UNIMODULAIRE

par Roger GODEMENT

[d'après GELFAND et NEUMARK ([1])].

On désigne par G le groupe des matrices complexes $g = ((g_{pq}))$ de déterminant $+1$; la mesure de Haar sur G est notée $d\mu(g)$ (elle est invariante à droite et à gauche). On pose

$$\beta(g) = |g_{22}|^4 . |g_{33}|^8 \dots |g_{nn}|^{4n-4} \tag{1}$$

1. Sous-groupe K, d'élément générique $k = ((k_{pq}))$ avec

$$k_{pq} = 0 \quad \text{pour} \quad p < q \quad ; \text{ d'où } k_{11} k_{22} \dots k_{nn} = 1 . \tag{2}$$

On prend pour paramètres, les $k_{pq} (p > q)$, les $k_{22}, \dots, k_{nn}$, et les variables imaginaires conjuguées ; on désigne par dk le produit (extérieur) des dk_{pq} considérés. Les mesures de Haar sur K sont

$$d\mu_l(k) = |k_{22}|^{-4} \dots |k_{nn}|^{-2n} . dk \wedge \overline{dk} \quad \text{(invariante à gauche)} \tag{2}$$

$$d\mu_r(k) = |k_{33}|^{2} \dots |k_{nn}|^{2n-4} . dk \wedge \overline{dk} \quad \text{(invariante à droite)} \tag{3}$$

On a

$$d\mu_r(k) = \beta(k)\, d\mu_l(k) . \tag{4}$$

2. Sous-groupe K', d'élément générique $k' = ((k'_{pq}))$ avec

$$k'_{pq} = 0 \quad \text{pour} \quad p > q . \tag{5}$$

On note $g \to g'$ l'antiautomorphisme de G consistant à permuter lignes et colonnes ; il échange K et K'. Mesures de Haar sur K' :

$$d\mu_l(k') = |k'_{33}|^{2} \dots |k'_{nn}|^{2n-4} . dk' \wedge \overline{dk'} \tag{6}$$

$$d\mu_r(k') = |k'_{22}|^{-4} \dots |k'_{nn}|^{-2n} . dk' \wedge \overline{dk'} = \beta(k')^{-1} . d\mu_l(k') . \tag{7}$$

([1]) GELFAND (I. M.) und NEUMARK (M. A.). - Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. - Berlin, Akademie-Verlag, 1957 (Mathematische Lehrbücher und Monographien, 2. Abteilung, Band 6).

3. Sous-groupe Z de K, d'élément générique $z = ((z_{pq}))$ avec

(8) $$z_{pq} = 0 \text{ pour } p < q, \quad z_{pp} = 1 \quad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

On y prend pour paramètres les z_{pq} et $\bar{z}_{pq}$ $(p > q)$. Il y a une mesure de Haar sur Z :

(9) $$d\mu_\ell(z) = d\mu_r(z) = d\mu(z) = dz \wedge \overline{dz}, \text{ où } dz = \bigwedge_{p>q} dz_{pq}.$$

4. Sous-groupe Z' de K', d'élément générique $z' = ((z'_{pq}))$ avec

(10) $$z'_{pq} = 0 \text{ pour } p > q, \quad z'_{pp} = 1 \quad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

Résultats analogues à ceux de Z :

(11) $$d\mu_\ell(z') = d\mu_r(z') = d\mu(z') = dz' \wedge \overline{dz'}, \text{ où } dz' = \bigwedge_{p<q} dz'_{pq}.$$

5. Sous-groupe $\Delta = K \cap K'$, fermé des matrices diagonales

(12) $$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} \text{ avec } \delta_1 . \delta_2 \ldots \delta_n = 1.$$

Δ est abélien maximal. On prend pour paramètres $\delta_2, \ldots, \delta_n$ et les conjugués. On a

(13) $$d\mu(\delta) = |\delta_2|^{-2} \ldots |\delta_n|^{-2} \, d\delta \wedge \overline{d\delta} \text{ où } d\delta = d\delta_2 \wedge \ldots \wedge d\delta_n.$$

6. Relations entre ces sous-groupes.

a. Tout $k \in K$ admet des représentations uniques de la forme

(14) $k = \delta . z = z_1 . \delta$ (avec $\delta \in \Delta$; $z, z_1 \in Z$) ; on a $\delta_p = k_{pp}$.

b. Tout $k' \in K'$ admet des représentations uniques de la forme

(15) $k' = \delta . z' = z'_1 . \delta$ (avec $\delta \in \Delta$; $z', z'_1 \in Z'$) ; on a $\delta_p = k'_{pp}$.

c. Presque tout $g \in G$ admet des représentations uniques de la forme

(16) $g = z' . k = k' . z$ (avec $k \in K$, $k' \in K'$, $z \in Z$, $z' \in Z'$).

d. Presque tout $k' \in K'$ admet une représentation unique

(17) $k' = z'^{-1} . \delta . z'$; de même, $k = z^{-1} \delta z$ $(k \in K, z \in Z)$.

e. Tout $g \in G$ admet n! représentations sous la forme

(18) $g = z^{-1} . k' . z$; de même, $g = z'^{-1} . k . z'$.

f. Presque tout $g \in G$ est de la forme

(19) $\qquad g = x^{-1}.\delta.x \qquad$ où $x \in G$, $\delta \in \Delta$;

δ peut être choisi de n! façons différentes.

7. Relations entre mesures de Haar.

a. En identifiant, d'après 6a , les espaces K et $\Delta \times Z$, on obtient

(20) $$\int_K f(k)d\mu\, \ell(k) = \int_\Delta \int_Z f(\delta z)d\mu(\delta)d\mu(z) \ ;$$

(20') $$\int_K f(k)d\mu_r(k) = \int_\Delta \int_Z f(z\delta)d\mu(\delta)d\mu(z) \ .$$

b. De même avec K' et $\Delta \times Z'$.

c. 6c conduit à

(21) $$\int_G f(g)d\mu(g) = \int_{K'}\int_Z f(k'z)d\mu\, \ell(k')d\mu(z) = \int_K \int_{Z'} f(z'k)d\mu(z')d\mu_r(k)$$

d. D'après 6e , $Z \times K'$ recouvre G n! fois ; désignons par $\lambda_g^{(p)}$ les valeurs propres de g , par k'_g l'un quelconque des k' de (18), par f et φ des fonctions sommables sur G et K' respectivement ; on a alors

(22) $$\int_Z d\mu(z) \int_{K'} f(z^{-1}k'z)\varphi(k')d\mu\, \ell(k') = \int_G f(g) \frac{\sum \varphi(k'_g)\beta^{\frac{1}{2}}(k'_g)}{\prod_{p<q} |\lambda_g^{(p)} - \lambda_g^{(q)}|^2} d\mu(g)$$

où le $\sum$ est étendu aux n! solutions k'_g de (18).

8. L'espace homogène K .

Soit G/Z' l'espace homogène des classes à droite modulo Z' ; d'après (16), presque toute classe est de la forme $Z'.k$, où $k \in K$ est bien déterminé, et réciproquement ; on peut représenter G comme groupe de transformations dans G/Z' , ou encore sur K ; si on le représente sur K le transformé $A_g k$ de $k \in K$ par $g \in G$ est l'élément (cf. (16))
$k_1 \in K$ tel que

(23) $$kg = z'.k_1 \qquad \text{avec } z' \in Z' \ .$$

Les A_g sont donc définis presque partout sur K (et partout sur G/Z').

La formule (21) prouve que les A_g conservent $d\mu_r(k)$:

(24) $$d\mu_r(A_g k) = d\mu_r(k) \ .$$

9. L'espace homogène Z .

Si l'on considère l'espace G/K' des classes à droite de K' , on peut de même l'identifier, à un ensemble négligeable près, à Z : une classe $K'g$ contient un seul $z \in Z$, et réciproquement (cf. (16)). On peut donc représenter G comme groupe de transformations sur Z ; le transformé $T_g z$ de $z \in Z$ par $g \in G$ sera le $z_1 \in Z$ tel que

$$zg = k' . z_1 \quad \text{où} \quad k' \in K' \ . \tag{25}$$

$d\mu(z)$ n'est pas invariante par les T_g ; si l'on pose

$$T_g z = z_1 \ , \quad zg = k' \ z_1 = \delta . z' . z_1 \quad \text{(cf. (15))} \tag{26}$$

on a

$$d\mu(T_g z) = \beta^{-1}(\delta) . d\mu(z) = \beta^{-1}(zg) d\mu(z) \ . \tag{27}$$

10. La représentation unitaire dans $\mathscr{H}_K$; sa décomposition.

Soit $\mathscr{H}_K$ l'espace des fonctions de carré sommable sur K pour $d\mu_r(k)$. Si l'on pose pour $g \in G$, $f \in \mathscr{H}_K$,

$$U_g^K f(k) = f(A_g k) \tag{28}$$

on a, en vertu de (24), une représentation unitaire $\{\mathscr{H}_K \ ; \ U_g^K\}$ de G ; celle-ci se décompose de la façon suivante. D'après (20) et (4) on a

$$\int |f(k)|^2 \, d\mu_r(k) = \int_Z d\mu(z) \int_\Delta |f(\delta z) \beta^{\frac{1}{2}}(\delta)|^2 \, d\mu(\delta) \ , \text{ pour } f \in \mathscr{H}_K \ . \tag{29}$$

Soit X le groupe des caractères de Δ ; posons (Fourier sur Δ)

$$f_\chi(z) = \int_\Delta f(\delta z) \beta^{1/2}(\delta) \overline{\chi(\delta)} \, d\mu(\delta) \tag{30}$$

pour $\chi \in X$; (29), (30) et Plancherel donnent

$$\int_K |f(k)|^2 d\mu_r(k) = \int_Z d\mu(z) \int_X |f_\chi(z)|^2 \, d\mu(\chi) = \int_X d\mu(\chi) \int_Z |f_\chi(z)|^2 \, d\mu(z) \ . \tag{31}$$

Soit alors $\mathscr{H}_Z$ l'espace L^2 construit sur Z ; pour presque tout $\chi \in X$, $f_\chi(z)$ définit un élément $f_\chi \in \mathscr{H}_Z$, et (31) donne, en prenant des produits scalaires dans $\mathscr{H}_K$ et $\mathscr{H}_Z$:

$$\langle f , g \rangle = \int_X \langle f_\chi , g_\chi \rangle \, d\mu(\chi) \ ; \tag{32}$$

donc $\mathscr{H}_K$ est une "somme directe continue" d'espaces de Hilbert tous isomorphes à $\mathscr{H}_Z$.

On va voir que les U_g^K se décomposent aussi dans ces divers espaces.

Posons $f'(k) = U_g^K f(k) = f(A_g k)$, et soit f'_χ la χ-composante de f' , donnée par

$$(33)\quad f'_\chi(z) = \int_\Delta f'(\delta z)\,\beta^{1/2}(\delta)\overline{\chi(\delta)}\,d\mu(\delta) = \int_\Delta f[A_g(\delta z)]\,\beta^{1/2}(\delta)\chi(\delta)\,d\mu(\delta) .$$

Posons

$$(34)\qquad \delta z = k \;;\; A_g k = k_1 \;;\; kg = z' k_1 \;;\; k_1 = \delta_1 z_1 .$$

On a en vertu des relations du n° 6 :

$$(35)\quad z_1 = T_g z \;;\; A_g k = k_1 = \delta_1 z_1 = \delta\,\delta_2 . z_1 = \delta\,\delta_2 . T_g z = A_g(\delta z) \;;$$

δ_2 , pour z et g donnés, ne dépend pas de δ , car on a la formule

$$(36)\quad zg = \delta_2 z_1' z_1 \text{ avec unicité de } \delta_2 , z_1' , z_1 \text{ d'après 6a et 6b.}$$

Ceci étant (33) devient

$$(37)\quad f'_\chi(z) = \int_\Delta f(\delta_2 . \delta . T_g z)\,\beta^{1/2}(\delta)\overline{\chi(\delta)}\,d\mu(\delta) =$$

$$= \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_2)\chi(\delta_2)\int_\Delta f(\delta . T_g z)\,\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta)\,d\mu(\delta)$$

ou

$$(38)\qquad f'_\chi(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_2)\chi(\delta_2)\,f_\chi(T_g z) .$$

On est donc conduit à poser

$$(39)\qquad U_{\chi;g} f(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_2)\chi(\delta_2)\,f(T_g z) \quad \text{pour } f \in \mathcal{H}_Z$$

où δ_2 est donné en fonction de g et z par (36). En utilisant (27), on montre que les $U_{\chi;g}$ sont unitaires dans $\mathcal{H}_Z$; d'où une famille de représentations $\{U_{\chi;g} ; \mathcal{H}_Z\}$ dépend d'un "paramètre" $\chi \in X$, et (32) se complète par

$$(40)\quad \langle U_g^K f , g\rangle = \int_X \langle U_{\chi;g} f_\chi , g_\chi\rangle\,d\mu(\chi) \quad \text{pour } f , g \in \mathcal{H}_K .$$

La <u>représentation</u> $\{\mathcal{H}_K ; U_g^K\}$ se décompose donc suivant les $\{\mathcal{H}_Z ; U_{\chi;g}\}$.

On peut simplifier (39) ; prolongeons χ à G en posant

$$(41)\quad \chi(g) = \chi(\delta) \text{ si } g = Z'\delta Z \quad \text{(cf. (15) et (16))} ;$$

$\chi(g)$ est défini presque partout, et vérifie, comme du reste β , les équations

$$(42)\quad \chi(gk) = \chi(g)\chi(k) \;;\; \chi(k'g) = \chi(k')\chi(g) \quad \text{pour } g \in G , k \in K , k' \in K'$$

En posant

$$\alpha_\chi(g) = \beta^{-\frac{1}{2}}(g)\chi(g) \tag{43}$$

(39) s'écrit

$$U_{\chi;g}f(z) = \alpha_\chi(zg).f(T_g z) \tag{44}$$

On peut écrire explicitement (44) comme suit. Pour $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, posons

$$\chi(\delta) = |\delta_2|^{m_2+i\rho_2} \dots |\delta_n|^{m_n+i\rho_n}.\ \delta_2^{-m_2} \dots \delta_n^{-m_n} \tag{45}$$

($m_2, \dots, m_n$ entier, $\rho_2, \dots, \rho_n$ réels, caractérisant le caractère χ de Δ).

Pour $g = ((g_{pq}))$, posons

$$g_p = \begin{vmatrix} g_{pp} & \cdots & g_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{np} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} ; \tag{46}$$

Alors (44) s'écrit

$$U_{\chi;g}f(z) = |g_2^1|^{m_2+i\rho_2-2}.|g_3^1|^{m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-2} \dots |g_n^1|^{m_n-m_{n-1}+i(\rho_n-\rho_{n-1})-2}$$

$$(g_2^1)^{-m_2}(g_3^1)^{-(m_3-m_2)} \dots (g_n^1)^{-(m_n-m_{n-1})}.f(T_g z) \tag{47}$$

où l'on a posé $zg = g^1 = ((g_{pq}^1))$.

11. Cas $n = 2$.

Pour $n = 2$, $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, on a

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+iy & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

donc Z est isomorphe à R^2 ; on a $d\mu(z) = dx\,dy$; pour $z \in C$, il vient

$$T_g z = \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}} \tag{49}$$

et (47) s'écrit

$$(50)\quad U_{\chi;g} f(z) = |g_{12}z + g_{22}|^{m+i\rho-2} \cdot (g_{12}z + g_{22})^{-m} \cdot f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right) ,$$

$\mathcal{H}_2$ étant l'espace des $f(z) = f(x + iy)$ telles que

$$(51)\qquad \iint |f(x + iy)|^2 \, dx \, dy < +\infty .$$