SÉMINAIRE N. BOURBAKI

RENÉ THOM

Les géodésiques dans les variétés à courbure négative

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 28, p. 203-213

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__203_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1950)

LES GÉODÉSIQUES DANS LES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

par René THOM

(d'après E. HOPF [2])

1. Rappel de généralités.

Soient V une variété indéfiniment différentiable et X un champ de vecteurs dans V . La résolution du système différentiel

$$(\sigma) \quad \frac{dP}{X} = dt$$

associe au champ X un groupe G à un paramètre (t) d'homéomorphismes de V sur elle-même. Si τ_t désigne la transformation correspondant à la valeur t du paramètre, on écrira $P_t = \tau_t P$. On suppose, dans tout ce qui suit, que le système (σ) admet un invariant intégral de dimension maximum ; cet invariant définit sur V une mesure dm qui est G-invariante ; on a ainsi défini ce que nous appelons un courant (Strömung) dans V

Dans le cas où la mesure totale m(V) est finie, les théorèmes classiques suivants sont valables :

1° Le théorème de convergence en moyenne de von Neumann.

Soit f(P) une fonction m-mesurable ; il existe alors une moyenne $\hat{f}(P)$ telle que :

$$\lim_{t = \infty} \int_V \left[\frac{1}{t} \int_0^t f(P_t)\, dt - \hat{f}(P)\right]^2 dm = 0$$

2° Le théorème ergodique individuel de Birkhoff.

Pour tout point P (sauf au plus les points d'un ensemble de mesure nulle) $\frac{1}{t} \int_0^t f(P_t)\, dt$ admet pour $t = \infty$ une limite $f_+^*(P)$.

3° Le théorème de symétrie de E. Hopf.

Si on forme les deux moyennes,

$$f_+^* = \lim_{t = +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(P_t)\, dt \qquad f_-^* = \lim_{t = -\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(P_t)\, dt$$

alors, presque partout,

$$f_+^*(P) = f_-^*(P)$$

2. Définitions.

A) Ergodicité. - On dit que le courant (G_t) est ergodique si toute fonction, m-mesurable et G-invariante, est une constante (à un ensemble de mesure nulle près).

Comme les moyennes f_+^* et f_-^* sont G-invariantes, ce sont des (presque) constantes dont la valeur est $\frac{1}{m(V)} \int f \, dm$.

Il résulte immédiatement de cette définition qu'un ensemble mesurable de trajectoires du champ ne peut avoir comme mesure que 0 ou $m(V)$, propriété classiquement dénommée transitivité métrique, et équivalente ici à l'ergodicité.

B) Mélange. - Un courant défini dans V par le groupe $G(t)$ peut être étendu dans le produit $V \times V$; il suffit de définir $G'(t)$ par :

$$\tau'_t(P \times Q) = (\tau_t(P) \times \tau_t(Q))$$

sur tout point $P \times Q$ de $V \times V$.

On dit que le courant G est du type mélangé, si le courant étendu G' est ergodique dans $V \times V$; tout courant mélangé est ergodique, mais la réciproque n'est pas vraie ; dans un courant mélangé, les images $\tau_t A$ d'un ouvert A finissent par se diluer et par remplir uniformément tout l'espace. On définit classiquement la condition de mélange par l'égalité :

$$\lim_{t = \infty} \int_V f(P_t) \, g(P) \, dm = \int_V f(P) \, dm \int_V g(P) \, dm \tag{1}$$

pour toutes f , g , de carré sommable.

3. Le courant géodésique.

Soient M une variété de dimension n , et Ω l'espace des vecteurs unitaires tangents à M . Soit donnée dans M , une métrique riemannienne, définissant, par tout élément de contact α de support a , la géodésique G_α orientée tangente à α . A cet ensemble de géodésiques sur M correspond dans Ω un courant ainsi défini : l'élément $\tau_s \alpha$ est l'élément de contact obtenu en prenant pour support le point b de G tel $\widehat{ab} = s$, et pour tangente en b , la tangente à G_α . L'espace Ω est fibré sur M , la fibre étant la sphère unitaire S^{n-1} ; la mesure invariante dans Ω par le courant géodésique se définit comme le produit $dv \wedge dS$, où dv est l'élément de volume induit dans M par le ds^2 donné, et dS l'élément d'aire de la sphère fibre. (Cet invariant n'est autre, aux notations près que l'invariant $\sum_i dp_i \wedge dq_i$ de la mécanique).

4. Les variétés à courbure négative constante.

Toute variété M à courbure négative constanbe peut s'obtenir comme quotient de l'espace hyperbolique par un groupe L de déplacements.

Soit B l'intérieur de la n-boule définie dans R par $\sum_i x_i^2 < I$, muni de la métrique

$$ds^2 = 4 \frac{\sum dx_i^2}{(1 - \sum x_i^2)^2} \quad ;$$

l'élement de volume est

$$dv = 2^n \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{(1 - \sum x_i^2)^n} \quad ;$$

B sera le revêtement universel $\hat{M}$ de M ; de même l'espace tangent $\hat{\Omega}$ à B est revêtement de Ω ; on désignera par p l'application canonique $p : \hat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ correspondante. Et le courant géodésique dans Ω est la projection par p du courant géodésique dans $\hat{\Omega}$ (à cause de l'invariance de la métrique par le groupe L, groupe d'automorphismes des deux revêtements $\hat{M} \longrightarrow M$ et $\hat{\Omega} \longrightarrow \Omega$).

Toute géodésique de M (qui est dans l'espace R initial, un cercle orthogonal à la sphère de l'infini S_∞ $\sum x_i^2 = 1$) peut être caractérisée par les deux points π_1 et π_2 où elle rencontre S_∞ ; on peut donner ainsi de Ω une paramétrisation simple : un élément de contact a sera défini par les points π_1 et π_2 où la géodésique G_α qu'il détermine rencontre S_∞ ; soit ω le milieu de G ; si a est le support de α, on posera $s = \overline{\omega\alpha}$; dans ce nouveau système de coordonnées, le courant géodésique s'exprime par :

$$\tau_t(\pi_1, \pi_2, s) = (\pi_1, \pi_2, s + t)$$

Géodésiques asymptotiques. - Deux géodésiques G_1, G_2 sont dites positivement asymptotiques si elles aboutissent au même point π_2 de S_∞. On démontre (à l'aide d'un changement simple de coordonnées) le lemme suivant : pour que deux éléments e, e' $\in \hat{\Omega}$ déterminent les géodésiques asymptotiques, il faut et il suffit qu'il existe un nombre c tel que :

$$\lim_{t = \infty} \sigma(e_{t+c}, e'_t) = 0 \,, \tag{2}$$

où σ désigne la distance induite dans $\hat{\Omega}$ par un ds^2 de la forme $d\sigma^2 = ds^2 + d\chi^2$ $d\chi$ élément de distance sur la fibre.

Classification des variétés M. - Soit x_0 un point de M. On dit que la géodésique G issue de x_0 (paramétréepar l'arc λ) va à l'infini, si

$\lim_{\lambda\infty} s(x_0 , p_\lambda) = \alpha$; si une géodésique va à l'infini, il en va de même de toute géodésique + asymptotique ; par suite, si l'ensemble des géodésiques qui vont à l'infini, issues de x_0 , forment un ensemble de mesure nulle (prise ici dans $\hat{\Omega}$) ; il en est de même en tout autre point de M . On dit que, dans ce cas, M est de première classe.

S'il n'en est pas ainsi, M sera dite de deuxième classe.

Rapports de la classification en classes avec le groupe L . - On sait qu'un domaine fondamental de L s'obtient en prenant tous les x qui satisfont à $s(x , x_0) < s(x , \gamma x_0)$ pour tout $\gamma \in L$.

Considérons tous les γx_0 dans B ; on appelle point limite de L tout point adhérent à l'ensemble des γx_0 . L'ensemble Λ des points-limites de L sur S est L-invariant et ne dépend pas de x_0 . L est dit de première espèce, si Λ contient tout S_∞ ; sinon, L est de deuxième espèce.

Toute variété M définie par un groupe L de 2e espèce est de 2e classe ; en effet, le domaine fondamental a en commun avec S_∞ au moins un ouvert, d'où résulte que les géodésiques allant à l'infini forment un ensemble de mesure positive, strictement.

Si L admet un système fini de générateurs, et est de 1re espèce, M est de 1re classe ; dans ce cas, en effet, le domaine fondamental est limité par un nombre fini de sphères géodésiques, et n'a alors aucun point commun avec S ; M est compacte, et donc de 1re classe.

Dans le cas général, on ne peut rien dire : il existe, par exemple des M de 2e classe avec un L de 1re espèce ; toutefois, si le volume total m(M) est fini, il en est de même du volume de Ω ; le courant géodésique satisfait alors au théorème du retour de Poincaré qui affirme que presque toutes trajectoires reviennent dans un voisinage de leur point de départ, les géodésiques qui vont à l'infini ne peuvent par suite former qu'un ensemble de mesure 0 , et M est de la 1re classe.

Lemme sur les mesures. - Soit A un ensemble $\mathcal{C}$ -invariant de $\hat{\Omega}$; un tel ensemble est complétement caractérisé par l'ensemble ω_1 , ω_2 des points π_1 , π_2 . Si un ensemble $\mathcal{C}$ -invariant A de Ω est de mesure m - nulle, la mesure (euclidienne) $\iint d\omega_1 \, d\omega_2$ est nulle.

Si, en effet, A est de mesure 0 , il en est de même de $A' = \bar{p}^{-1}(A)$ et dans le nouveau système de coordonnées, la mesure dm (invariante) est de la forme

$dm = \mu\, d\pi_1\, d\pi_2$ où μ est strictement positif.

5. Les variétés de deuxième classe.

Soit A_2 l'ensemble des points de S_∞ tels que les géodésiques qui y aboutissent vont à l'infini ; soit $\overline{A}_2$ son complémentaire ; soit de même A_1 l'ensemble des points $\in S_\infty$ d'où partent les géodésiques qui viennent de l'infini, $\overline{A}_1$ son complémentaire. La mesure $\iint d\omega_1\, d\omega_2$ de $(A_1 + \overline{A}_1) \times A_2$ est > 0 car c'est l'ensemble des géodésiques qui vont à l'infini. Donc $\int d\omega_2 > 0$. L'auteur fait appel alors à un théorème de symétrie énoncé par lui ([1]) : presque toutes les géodésiques qui vont à l'infini en viennent (et réciproquement). Donc mes $\overline{A}_1 \times A_2 = 0$, d'où mes $\overline{A}_1 = 0$. En permutant les indices 1 et 2, on aurait de même mes $\overline{A}_2 = 0$.

Conclusion : Dans une variété de 2e classe, presque toutes les géodésiques viennent de l'infini, et y retournent. On dit que le courant est dissipatif.

6. Les variétés de 1re classe.

Soit f une fonction uniformément continue dans Ω et sommable ; supposons d'abord $m(\Omega) < \infty$; si P , $P' \in \Omega$ déterminent deux géodésiques + asymptotiques, on a, en raison du lemme (2) :

$$\lim_{t = \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(P_t)\, dt = \lim \frac{1}{t} \int_0^t f(P'_t)\, dt$$

ou :

$$f_+^*(P) = f_+^*(P') \ .$$

Soit α une valeur telle que l'ensemble des P qui satisfont à $f_+^*(P) \geqslant \alpha$ (1) soit de mesure > 0 . Désignons alors par A l'ensemble des points π_2 correspondants, par $\overline{A}_2$ son complémentaire.

Désignons alors par A_1 l'ensemble des points d'où partent les géodésiques qui satisfont à $f_-^*(P) \geqslant \alpha$ (2) ; d'après le théorème de symétrie, on a mes $(A_1 \times \overline{A}_2) = 0$ d'où, comme précédemment mes $\overline{A}_2 = 0$.

Il s'ensuit que presque toues les géodésiques doivent satisfaire (1) et (2) dès qu'un ensemble de mesure non nulle le fait ; f est par suite une presque contante et il y a ergodicité.

Soit A un domaine normal de Ω , c'est-à-dire un ouvert dont la frontière est de mesure nulle, et soit h la fonction caractéristique de A .

On peut alors trouver deux fonctions uniformément continues f_1 , f_2 telles que $\frac{1}{m(\Omega)} \int (f_2 - f_1)\, dm < \varepsilon$ avec $f_1 \leqslant h \leqslant f_2$. Pour presque tout P , en s :

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_1(P_t)\, dt \leqslant \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(P_t)\, dt \leqslant \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_2(P_t)\, dt$$

le 1er et le 3e membre diffèrent de moins de ε . Il s'ensuit que $\frac{1}{t} \int_0^t h(P_t)\, dt$ a pour limite $m(A)/m(\Omega)$, temps moyen de séjour de P dans A ; c'est là une définition des plus usitées de l'ergodicité.

Si $m(\Omega) = \infty$, l'auteur montre cependant qu'il existe une sorte d'ergodicité relative : si f et g sont >0 et m-sommables dans Ω , on a :

$$\lim_{t=\infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} = \lim_{t=\infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} = \frac{\int_\Omega f\, dm}{\int_\Omega g\, dm}$$

Il suffit d'appliquer le même raisonnnement aux fonctions

$$F_+^* = \lim_{t \pm \infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \lim_{t=-\infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} \ .$$

7. Le courant horicirculaire.

Pour étudier les problèmes de mélange, HEDLUND a introduit (dans le cas des surfaces) un nouveau courant, celui des horicycles. HOPF a généralisé cette construction au cas d'une variété à n dimensions. Considérons, au-dessus de M l'espace Z des couples de vecteurs unitaires, orthogonaux ; Z est un espace fibré sur l'espace tangent Ω , avec pour fibre la sphère S^{n-2} décrite par l'extrémité du 2e vecteur ; de même l'espace $\hat{Z}$ des couples de vecteurs orthogonaux au-dessus de $\hat{\Omega}$ est un revêtement de Z , avec le même groupe L comme groupe d'automorphismes.

Le courant ergodique se définit de façon naturelle dans $\hat{Z}$ (et Z) ; si b est un élement de Z , défini par son support a et 2 vecteurs v_1 , v_2 rectangulaires, on posera $\tau_s\, b = b'$, où le support a' et le 1er vecteur v_1' définissent l'élement de Ω transformé par τ_s de l'élément $(a\ ,\ v_1)$; quant au vecteur v_2' , il s'obtiendra par transport parallèle du vecteur v_2 le long de la géodésique reliant a à a' . De façon plus précise : l'élément b détermine une 2-sphère géodésique orthogonale à S_∞ ; cette sphère contient la géodésique

(aa') , et le vecteur v_2 demeure tangent à cette sphère géodésique et orthogonal à aa' .

La mesure invariante est ici encore $d\mu = dm \wedge d\sigma$, où $d\sigma$ est l'élément d'aire de la sphère fibre.

On appelle horicycles (sur une 2-sphère géodésique) les trajectoires orthogonales (au sens euclidien) des géodésiques issues d'un point fixe donné de S ; par tout b passe un horicycle orienté et un seul. Le courant horicirculaire est ainsi défini : $H_\gamma(b)$ est l'élément b' dont le support a'' s'obtient en prenant sur l'horicycle issu de a le point a'' tel que $\widehat{aa''} = t$; le vecteur v_1'' se déduit de v_1 par transport parallèle le long de l'horicycle, et v_2'' est tangent à l'horicycle.

Si l'on désigne par D_α la rotation du couple b de l'angle α dans son plan : on vérifie aisément les formules suivantes, liant les courants géodésique et horicirculaire :

$$H_t = D_\pi D_\alpha \tau_s D_\alpha \tag{3}$$

où α est une certaine fonction de s , nulle pour $s = \infty$.

$$\tau_t H_s b = H_{se^t} \tau_{-t} b \tag{4}$$

obtenue en remarquant que l'arc d'horicycle compris entre 2 géodésiques est fonction exponentielle de la variable t .

Il résulte de (3) que le courant horicirculaire laisse la mesure $d\mu$ invariante. Quant aux caractères d'ergodicité de ces deux courants, on a le lemme suivant : les courants H et τ admettent les mêmes fonctions mesurables invariantes.

La démonstration repose sur l'emploi de l'identité (3) ; si h est h-invariant on a

$$h(b) = h(D_\pi D_\alpha \tau_s D_\alpha b) \quad \text{ou} \quad h(D_{-\alpha} \tau_{-s} b) = h(D_\alpha D_\pi b)$$

et, pour toute g bornée :

$$\int h(D_{-\alpha} \tau_{-s} b)\, g(b)\, d\mu = \int_Z h(D_\alpha D_\pi b)\, g(b)\, d\mu$$

par substitution :

$$\int_Z h(D_{-\alpha} b)\, g(\tau_s b)\, d\mu' = \int_Z h(D_\alpha D_\pi b)\, g(b)\, d\mu$$

Faisant tendre s vers l'infini :

$$\lim_{\infty} \int_Z h(b)\, g(\tau_s b)\, d\mu = \int h(D_\pi b)\, g(b)\, d\mu$$

L'étoile désignant la moyenne par rapport à τ , il vient :

$$\int_Z g^*(b)\, h(b)\, d\mu = \int_Z h(D_\pi\, b)\, g(b)\, d\mu$$

On utilise alors l'identité, vraie pour toute fonction φ τ -invariante :

$$\int_Z F^*\varphi\, d\mu = \int_Z F\varphi\, d\mu$$

pour remplacer le 1er membre par :

$$\int h^*(b)\, g^*(b)\, d\mu = \int h^*(b)\, g(b)\, d\mu = \int h(D_\pi\, b)\, g(b)\, d\mu$$

et comme g est arbitraire, il vient l'identité :

$$h(D_\pi\, b) = h^*(b) \quad \text{ou} \quad h(b) = h^*(D_\pi\, b) .$$

Moyennant l'identité $D_\pi\, \tau_t = \tau_{-t}\, D_\pi$ et la τ -invariance de h^* , on en déduit la τ -invariance de h .

Réciproquement, la τ -invariance entraîne la H-invariance.

Désignons par $\overline{f}(P)$ la moyenne $\frac{1}{\delta}\int f(b)\, d\sigma$ sur la sphère fibre au-dessus de P ; si f est τ -invariante, il en est de même de $\overline{f}$, et par suite de l'ergodicité de τ dans Ω , $\overline{f}$ est une presque constante. De là l'auteur passe sans aucune démonstration à f , dont il affirme la presque-constance ; d'où résulte l'ergodicité dans Z des courants τ et H .

8. Le mélange.

Pour établir que le courant géodésique est du type mélangé, il suffit de montrer que pour toute fonction f telle que $\int f\, dm = 0$, on a

$$\lim_{t=\infty} \int f(\tau_{-t}\, P)\, g(P)\, dm = 0 .$$

Cas particulier de la formule (1) qui lui est équivalent.

On substitue à l'intégrale donnée l'intégrale dans Z :

$$\lim_{t=\infty} \int_Z f(\tau_{-t}\, b)\, g(b)\, d\mu$$

à laquelle on substitue l'intégrale approchée :

$$\int_Z \left[\frac{1}{\delta}\int_0^\delta f(\tau_{-t}\, b)\, dt\right] g(b)\, d\mu \quad (\delta > 0 \text{ , et assez petit})$$

Or, en vertu de l'ergodicité de H dans Z , le théorème de von Neumann donne

(associé à $f = 0$)

$$\int \lim \left[\frac{1}{s} \int_0^1 f(H_s\, b)\, ds\right]^2 = 0$$

ou, par changement de variable de la forme $s = s'\, e^t$:

$$\lim_{t = \infty} \int_Z \left[\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} f(H_{s_e t}(b)\, ds\right]^2 d\mu = 0$$

L'identité (4), puis l'inégalité de SCHWARZ achèvent alors la démonstration.

$$\lim_{t = \infty} \int_Z \left[\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} f(H_{s'_e t}\, b)\, ds'\right]^2 d\mu = 0 .$$

9. Surfaces à courbure variable.

L'auteur parvient à généraliser ses méthodes lorsque la courbure est variable, mais dans le cas des surfaces seulement.

D'après un théorème d'Hadamard, dans toute variété à courbure négative, chaque classe d'homotopie contient une géodésique et une seule ; ceci permet de donner une interprétation du revêtement universel de la surface donnée f ; soit p un point de F choisi comme origine ; soient px , py deux semi-géodésiques orientées issues de p ; si px et py se recoupent en un point a de F , on peut affirmer que le lacet px et py n'est pas homotope à 0 ; désignons par r l'arc sur les géodésiques et posons $r = \frac{\lambda}{\lambda+1}$; on définit ainsi l'application du disque ouvert $r < I$ sur F , et cette application n'est autre que le revêtement universel $\hat{F}$ de F . La métrique se transpose de façon naturelle dans $\hat{F}$; deux géodésiques dans $\hat{F}$ ne peuvent se couper qu'en un point au plus, et entre deux points p , p' de $\hat{F}$ il n'y a qu'une seule liaison géodésique définissant la distance $s(p , p')$.

Géodésiques asymptotiques. - Munissons F de coordonnées polaires ρ , θ et donnons à ds la forme "géodésique" :

$$ds = d\rho^2 + Y^2(\rho , \theta)\, d\theta^2$$

où la fonction Y est la solution de l'équation : $Y'' + KY = 0$ définie par les conditions initiales (et θ est) :

$$Y' = \frac{\partial Y}{\partial \rho} \qquad Y(0 , \theta) = 0 \qquad Y(0 , \theta) = 1$$

Supposons alors qu'on ait sur toute la surface :

$$a^2 < -K < b^2$$

alors $Y'^2 - 1 = -\int_0^\rho K\, d(Y^2) > a^2 Y^2$. Et comme $Y \geqslant \rho > \rho_0$

$$a < \frac{Y'}{y} < \sqrt{b^2 + \frac{1}{\rho_0^2}}$$

Soit G une géodésique orientée ne passant pas par le pôle ; joignons un point m de paramètre s sur G au pôle p par la géodésique, et soit l'angle de G avec la géodésique pm ; l'angle vérifie l'équation différentielle (GAUSS) : $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{Y'}{y} \sin \alpha$.

La fonction $\alpha(s)$ est par suite monotone, et croît de 0 à π lorsque G est décrite de $-\infty$ à $+\infty$.

Deux géodésiques G , G' sont dites positivement asymptotiques, si leurs arcs t , t' peuvent être liés par une fonction $t' = \varphi(t)$ monotone croissante, telle que $\lim_{t+\infty} s(p(t), p'(\varphi(t)) = 0$.

THÉORÈME. - Par un point arbitraire de $r < 1$ il passe une (et une seule) géodésique positivement asymptotique à une géodésique donnée G . Il suffit de faire tendre m vers l'infini sur G et montrer l'existence d'une limite pour la géodésique de liaison pm . (Cela résulte du caractère monotone de la variation de l'azimuth de pm en p).

Champ de géodésiques asymptotiques. - Soit G une géodésique d'arc s ; par tout point m de G menons la géodésique + asymptotique à une géodésique donnée G' ; soit α l'angle qu'elles font ; α vérifie l'équation différentielle $\frac{d\alpha}{ds} = -z' \sin \alpha$ où $z' = \frac{\partial z}{\partial s}$, et z est la solution de l'équation différentielle $z'' + Kz = 0$ donnée par les conditions aux limites $z(0) = I$ et $z(+\infty) = 0$.

(Simple généralisation du cas précédent : envoyer p à l'infini)

Il en résulte comme précédemment; que la fonction $\alpha(s)$ est monotone croissante de 0 à π (z' vérifie $a < -z < b$).

THÉORÈME. - Étant données deux géodésiques G et G' , il existe une et une seule géodésique - asymptotique à G et + asymptotique à G' .

On construit les deux champs ainsi définis, et une géodésique Γ transversale à ces champs ; en chaque point a de Γ , les géodésiques des champs définissent deux angles α et α', tous deux fonctions monotones de s ; il existe donc sur Γ un point tel que $\alpha + \alpha' = \pi$, ce qui donne la géodésique cherchée. Cette géodésique est unique, car s'il en existait deux, on pourrait les joindre par une

géodésique transversale, et le raisonnement précédent aboutirait à une contradiction.

On peut ainsi associer à toute géodésique un couple d'angles (φ, ψ). Reste alors à montrer que ces angles, introduits comme coordonnées dans l'espace tangent Ω, se comportent de façon assez régulière pour permettre un théorème de mesure analogue à celui pour $\iint d\pi_1 \, d\pi_2$.

Soit G une géodésique d'arc s ; soient φ, ψ les nouvelles coordonnées de la géodésique qui rencontre G au point s sous l'angle α ; l'auteur parvient alors à montrer, que moyennant une hypothèse supplémentaire sur la variation de K (qu'on peut exprimer par $|\text{grad } K| < \infty$), le jacobien $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, \alpha)}$ est, pour $\alpha \neq 0$, différent de 0 et fonction continue de s et α.

On peut alors énoncer le

LEMME. - Un ensemble $\mathcal{T}$-invariant d'éléments de F est de mesure nulle, si et seulement si la mesure correspondante $\iint d\varphi \, d\psi = 0$. En effet, si un ensemble de géodésiques est de mes 0, il en est de même du sous-ensemble qui rencontre une géodésique fixe G_0 et réciproquement : on peut en effet définir dans F un ensemble dénombrable de géodésiques tel que toute géodésique rencontre au moins une géodésique de l'ensemble. La propriété énoncée du jacobien $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, \alpha)}$ achève alors la démonstration du lemme.

Les méthodes employées dans le cas où K est constante s'applique alors mot pour mot et conduisent au résultat :

Si la surface F est de 1re classe, il y a ergodicité
Si la surface F est de 2e classe, il y a dissipativité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOPF (Eberhard). - Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme, Math. Annalen, t. 103, 1930, p. 710-719.

[2] HOPF (Eberhard). - Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negative Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig, t. 91, 1939, p. 261-304.