SÉMINAIRE N. BOURBAKI

CLAUDE CHABAUTY

Le théorème de Minkowski-Hlawka

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 2, p. 13-15

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__13_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1948)

LE THÉORÈME DE MINKOWSKI-HLAWKA

par Claude CHABAUTY

G <u>réseau</u> dans $\underset{\sim}{R}^n$ = sous-groupe discret du groupe additif $\underset{\sim}{R}^n$ de dimension linéaire n , $m(G)$ = mesure du parallélotope défini par les n vecteurs d'une base de G .

Pour un ensemble mesurable $A \subset \underset{\sim}{R}^n$, on pose $\delta(A) = \inf m(G)$ pour les G tels que

$$G \cap A \subset \{0\} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\delta(A)} \quad ;$$

$$V(A) = \mathfrak{G}_z \quad \text{(ensemble des } z = x - y \text{ , tels que } x \in A \text{ , } y \in A) \text{ ,}$$

$$\Delta(A) = \delta(V(A)) \quad , \qquad \eta(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\Delta(A)} \quad .$$

Un ensemble S est dit <u>étoilé</u> si $p \in S \Longrightarrow \lambda p \in S$ pour tout λ , $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; il est dit <u>symétrique</u> si $p \in S \Longrightarrow -p \in S$.

Un ensemble mesurable K est dit <u>jauge</u> s'il est compact convexe symétrique et $m(K) > 0$. On a $S(K) = 2^n \eta(K)$.

Si $f(x)$ est une fonction positive homogène de degré d , ($f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ pour tout λ , $0 \leqslant \lambda$) , l'ensemble $S = \mathfrak{G}_x(f(x) \leq 1)$ est l'ensemble étoilé associé à f ; si f est une norme sur $\underset{\sim}{R}^n$, S est une jauge.

Posons $\mu(f , G) = \inf_{x \in G, x \neq 0} f(x)$ et $\gamma(f) = \sup_G \frac{\mu(f , G)}{(m(G))^{1/n}}$, on a

$\gamma(f) = 1/(\Delta(S))^{d/n}$; on note $\gamma(n) = \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ <u>(constante d'Hermite)</u>

(son évaluation importante pour la théorie des formes quadratiques, est à l'origine de la géométrie des nombres de Minkowski). Soit B_n la sphère unité dans R^n , $\text{mes}(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((1 + n)/2)}$, on a donc

$$\gamma(n) = \left\{\frac{\varepsilon(B_n)}{\text{mes}(B_n)}\right\}^{2/n} \sim \frac{\eta\left\{\varepsilon(B_n)\right\}^{2/n}}{\pi e} \quad .$$

Pour tout ensemble A , on a trivialement $\eta(A) \leqslant 1$, donc $\gamma(n) < \frac{2n}{\pi e}$ (MINKOWSKI). En tenant compte des "trous" dans les empilements de sphères, BLICHFELD a démontré par un calcul ingénieux et simple :

$$\eta(B_n) \leq \frac{n+2}{2^{(n/2)-1}}$$

donc $\gamma(n) < \frac{n}{\pi e}$. En sens inverse MINKOWSKI ([7], tome 2, p. 94-95) a démontré par des calculs compliqués que $\delta(B_n) \geq 2\zeta(n)$, donc $\gamma(n) > \frac{n}{2\pi e}$, et a conjecturé ([7], tome 1, p. 265, 270 et 277) à plusieurs reprises qu'on a $\delta(S) \geq 2\zeta(n)$ pour tout ensemble étoilé symétrique de $\underset{\sim}{R}^n$. Cette conjecture a été démontrée seulement récemment par HLAWKA [2] en 1943, qui montre plus généralement que $\delta(A) \geq 1$ pour tout ensemble de $\underset{\sim}{R}^n$. Depuis on a montré que $2\zeta(n)$ n'était pas la meilleure constante pour les jauges et que pour les sphères $\delta(B_n) > \frac{cn}{2} + O(n)$ où c est défini par $\log c = 2(1 - 1/c)$, $c = 4{,}92\ldots$ (MAHLER [3], [4], ROGERS [9], DAVENPORT [1]). D'autre part, SIEGEL [10] a donné du résultat de HLAWKA une démonstration montrant mieux son rapport avec la théorie de la réduction arithmétique du groupe modulaire à n variables (ou des formes quadratiques définies positives) comme MINKOWSKI l'avait suggéré.

En effet HLAWKA procède ainsi : si $f(x)$ est une fonction bornée nulle en dehors d'un compact et intégrable-Riemann, il construit un réseau G avec $m(G) = 1$, tel que

$$\sum_{x \in G, x \neq 0} f(x) \leq \int_{x \in \underset{\sim}{R}^n} f(x)\, dx + c \qquad \text{pour tout } c > 0 .$$

SIEGEL obtient ce résultat en démontrant que

$$\int_{G \in \Gamma} \left(\sum_{x \in G, x \neq 0} f(x) \right) dG = \int_{x \in \underset{\sim}{R}^n} f(x)\, dx$$

en intégrant sur l'espace Γ des réseaux muni de sa mesure naturelle (comme espace homogène). WEIL [11] a bourbakisé la démonstration de SIEGEL en obtenant les résultats comme cas particulier d'une formule d'intégrations répétées dans des espaces homogènes associés à un groupe localement compact. En outre il donne une élégante démonstration, par récurrence, du résultat de Minkowski, que Γ a un volume fini, indépendante de la théorie de la réduction des formes quadratiques.

Enfin, MAHLER [5], [6] a précisé les résultats de Minkowski sur les réseaux critiques des ensembles étoilés et particulièrement des jauges (G est critique pour A si $m(G) = \delta(A)$ et si $G \cap \mathring{A} = \{0\}$). Il s'en est servi pour démontrer que pour toute jauge dans R^2, $\delta(K) \geq 3\sqrt{2} = 3{,}46\ldots$ et que sa valeur minima n'est pas obtenue pour les ellipses ($\delta = 2\pi/\sqrt{3} = 3{,}627\ldots$) contrairement à une conjecture de COURANT (résultat obtenu antérieurement par K. REINHARDT [8]), et

il a fabriqué une jauge plane pour laquelle
$g = (32 - 16\sqrt{2} - 4 \log 2)/(2\sqrt{2} - 1) = 3,609 \ldots$ valeur qu'il croit la plus petite possible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAVENPORT (H.) and ROGERS (C. A.). - Hlawka's theorem in the geometry of numbers, Duke math. J., 1947, p. 367-375.

[2] HLAWKA (Edmund). - Zur Geometrie der Zahlen, Math. Z., t. 49, 1943-44, p. 285-312.

[3] MAHLER (Kurt). - On a theorem of Minkowski on lattice points in non-convex point sets, J. London math. Soc., t. 19, 1944, p. 201-205.

[4] MAHLER (Kurt). - The theorem of Minkowski-Klawka, Duke math. J., t. 13, 1946, p. 611-621.

[5] MAHLER (Kurt). - On the area and densest packing of convex domains, Kon. Ned. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sc., t. 50, 1947, p. 108-118.

[6] MAHLER (Kurt). - On the minimum determinant and the circumscribed hexagons of a convex domain, Kon. Ned. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sc., t. 50, 1947, p. 692-703.

[7] MINKOWSKI (Hermann). - Gesammelte Abhandlungen, Tomes 1 et 2. - Leipzig et Berlin, B. G. Teubner, 1911.

[8] REINHARDT (Karl). - Über die dicheste gitterförnige Legerung kongruenter Bereiche in der Ebene und eine besondere Art konvexer Kurven, Abh. math. Seminar Hamburg. Univ., t. 10, 1934, p. 216-230.

[9] ROGERS (C. A.). - Existence theorems in the geometry of numbers, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 994-1002.

[10] SIEGEL (Carl Ludwig). - A mean value theorem in geometry of numbers, Annals of Math., Series 2, t. 46, 1945, p. 340-347.

[11] WEIL (André). - Sur quelques résultats de Siegel, Summa brasil. Math., t. 1, 1945/46, p. 21-39.