Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. L. Krivine

Théorèmes de factorisation dans les espaces réticules

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 22 et 23, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A24_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES

SEMINAIRE MAUREY - SCHWARTZ 1973 - 1974

THEOREMES DE FACTORISATION DANS LES ESPACES RETICULES

par J.L. KRIVINE

Exposés N° XXII et XXIII 8 et 15 Mai 1974

Dans cet exposé on donne une généralisation et une nouvelle présentation de divers résultats de B. Maurey [2].

Nous appellerons $\mathbb{R}$-treillis un espace vectoriel L sur $\mathbb{R}$, réticulé, normé, tel que $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ pour $x,y \in L$. Un sous-espace I de L sera appelé idéal si $x \in I$, $y \in L$, $|y| \leq |x| \Rightarrow y \in I$. L'idéal $I(a_1,\ldots,a_k)$ engendré par $a_1,\ldots,a_k \in L$ est donc $\{x \in L$; il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq \lambda(|a_1| + \ldots + |a_k|)\}$. Un opérateur borné $h : L \to M$ d'un $\mathbb{R}$-treillis dans un autre sera appelé homomorphisme si on a $h(x^+) = h(x)^+$ pour $x \in L$ (et donc $h(x \cup y) = h(x) \cup h(y)$ pour $x,y \in L$) ; si, de plus, la clôture de l'image de h est un idéal de M, alors h sera appelé homomorphisme fort. L'opérateur $h^* : M^* \to L^*$ est alors un homomorphisme fort, et l'image de h^* est un idéal de L^*, comme on le démontre facilement.

Les deux exemples suivants seront très utiles pour la suite :

- Soient L un $\mathbb{R}$-treillis complet et $a \in L_+$, $a \neq 0$. Sur l'idéal I(a) on définit une norme en posant

$$\|x\|_\infty = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \; ; \; |x| \leq \lambda \frac{a}{\|a\|}\} .$$

On a évidemment $\|x\| \leq \|x\|_\infty$, et $\|a\| = \|a\|_\infty$. De plus, on vérifie aisément que $(I(a), \| \|_\infty)$ est un M-espace avec unité (l'unité étant $a/\|a\|$) [1] et donc que son complété est isomorphe à un espace $\mathcal{C}(S)$ pour un certain espace compact S. L'application identique de I(a) dans L se prolonge donc en un homomorphisme fort $h : \mathcal{C}(S) \to L$, $\|h\| = 1$.

- Soit, par ailleurs, t une forme linéaire ≥ 0 sur L, $\|t\| = 1$ telle que $t(a) = \|a\|$ (il en existe, puisque si $u \in L^*$, $\|u\| = 1$, $u(a) = \|a\|$, on peut prendre $t = |u|$). On définit sur L une semi-norme en posant $\|x\|_1 = t(|x|)$. On a $\|x\|_1 \leq \|x\|$, $\|a\|_1 = \|a\|$. De plus, $(L, \| \|_1)$ est évidemment un L-espace [1], et donc son complété est un espace L^1. L'application identique se prolonge donc en un homomorphisme fort $h : L \to L^1$, $\|h\| = 1$.

Dans l'espace réticulé des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, les applications coordonnées $x_1,\ldots,x_n$ engendrent un sous-espace réticulé $\mathcal{C}_n$. Un élément de $\mathcal{C}_n$ sera appelé "terme" et noté $t(x_1,\ldots,x_n)$. Autrement dit un terme est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ obtenue à partir des fonctions $x_1,\ldots,x_n$ par composition avec l'addition, la multiplication par un scalaire, et les opérations $\cup$, $\cap$. C'est évidemment une fonction continue, homogène de degré 1 ($t(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda\, t(x_1,\ldots,x_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$), et il existe un réel $M > 0$ tel que $|t(x_1,\ldots,x_n)| \leq M(|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|)$ quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$. Enfin il est clair que si L est un espace vectoriel réticulé sur $\mathbb{R}$, chaque terme $t(x_1,\ldots,x_n)$ définit une application de $L^n \to L$.

Théorème 1 : Soient $t(x_1,\ldots,x_n)$, $u(x_1,\ldots,x_n)$ deux termes tels que $t(x_1,\ldots,x_n) \leq u(x_1,\ldots,x_n)$ quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$. Si L est un espace vectoriel réticulé sur $\mathbb{R}$, on a $t(x_1,\ldots,x_n) \leq u(x_1,\ldots,x_n)$ quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in L$.

Nous ne démontrerons ce théorème que dans le cas où L est un espace vectoriel réticulé normé sur $\mathbb{R}$. Notons également que le résultat est évident lorsque L est un espace de fonctions (c'est-à-dire un sous-espace réticulé de $\mathbb{R}^S$, où S est un ensemble quelconque.)
Soient alors $a_1,\ldots,a_n \in L$; on pose $a = |a_1| + \ldots + |a_n|$, $b = t(a_1,\ldots,a_n)$, $c = u(a_1,\ldots,a_n)$. Alors $b,c \in I(a)$, et, si $b \not\leq c$, on a $(b-c)^+ \neq 0$.
Or $(I(a), \|\ \|_\infty)$ est isomorphe à un espace de fonctions (sous-espace réticulé de $\mathcal{C}(S)$) et donc $\|(b-c)^+\|_\infty = 0$. D'où la contradiction cherchée puisque $\|(b-c)^+\| \leq \|(b-c)^+\|_\infty$.

c. q. f. d.

Soit maintenant $f(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction continue réelle sur $\mathbb{R}^n$, homogène de degré 1. On lui associe canoniquement, pour chaque $\mathbb{R}$-treillis complet L une fonction de L^n dans L, notée également f, de la façon suivante : il existe une suite $t_k(x_1,\ldots,x_n)$ de termes telle que l'on ait

$$(\#)\quad |t_k(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)| \leq \frac{1}{2^k}\,|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|$$

quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$; en effet, si S_n est la sphère unité de l^∞_n, les termes forment un sous-espace réticulé de $\mathcal{C}(S_n)$ qui sépare

les points et contient la fonction 1 (représentée par $|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|$), donc qui est dense dans $\mathcal{C}(S_n)$. D'où une suite $t_k(x_1,\ldots,x_n)$ telle que $|t_k(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)| \leq \frac{1}{2^k}$ sur S_n, et on a le résultat cherché par homogénéité.

On a donc $|t_k(x_1,\ldots,x_n) - t_{k+1}(x_1,\ldots,x_n)| \leq \frac{1}{2^{k-1}} |x_1|\cup\ldots\cup|x_n|$ pour $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, donc aussi pour $x_1,\ldots,x_n \in L$ d'après le théorème précédent. Dans ce dernier cas, on a

$$\| t_k(x_1,\ldots,x_n) - t_{k+1}(x_1,\ldots,x_n) \| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \| \, |x_1|\cup\ldots\cup|x_n| \, \|$$

ce qui montre que la suite $t_k(x_1,\ldots,x_n)$ converge dans L vers un élément noté, par définition, $f(x_1,\ldots,x_n)$. On vérifie immédiatement que cette définition de $f(x_1,\ldots,x_n)$ ne dépend pas de la suite t_k choisie satisfaisant (*), f est une fonction continue sur L^n (limite d'une suite de fonctions continues sur L^n, convergeant uniformément sur les parties bornées).

On a de plus :

Soient $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continues homogènes de degré 1 telles que $f(x_1,\ldots,x_n) \leq g(x_1,\ldots,x_n)$ pour $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$. Si L est un $\mathbb{R}$-treillis complet, alors $f(x_1,\ldots,x_n) \leq g(x_1,\ldots,x_n)$ pour $x_1,\ldots,x_n \in L$.

On choisit deux termes t, u tels que

$$|t(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)| \leq \varepsilon \, (|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|) \, ,$$

$$|u(x_1,\ldots,x_n) - g(x_1,\ldots,x_n)| \leq \varepsilon \, (|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|)$$

pour $x_1,\ldots,x_n \in L$. C'est possible par définition de f, g dans L. Si on pose $t' = t - \varepsilon(|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|)$, $u' = u - \varepsilon(|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|)$, on a, par hypothèse $t'(x_1,\ldots,x_n) \leq u'(x_1,\ldots,x_n)$ quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, donc aussi dans L. D'où $f(x_1,\ldots,x_n) - 2\varepsilon(|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|) \leq g(x_1,\ldots,x_n) + 2\varepsilon(|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|)$ pour $x_1,\ldots,x_n \in L$, et on a le résultat cherché puisque ε est un réel > 0 quelconque. c. q. f. d.

Si $h : L \to M$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-treillis complet, on a

$$h\,f(x_1,\dots,x_n) = f(hx_1,\dots,hx_n)$$

pour $x_1,\dots,x_n \in L$, f étant une fonction continue homogène de degré 1.

L'espace des puissances $p^{\text{ièmes}}$ d'éléments d'un $\mathbb{R}$-treillis complet L.

Soit p un réel >0 ; pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^p = |x|^p \operatorname{sgn}(x)$. Dans L on définit les opérations $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}$, $\lambda * x = \lambda^{1/p} x$ pour $x,y \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie aisément que L muni de ces opérations et de l'opération $(x,y) \to x \cup y$ (inchangée) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réticulé qu'on désignera par $L^{(p)}$ et qu'on appellera l'espace des puissances $p^{\text{ièmes}}$ d'éléments de L. Lorsque $a \in L$ sera considéré comme élément de $L^{(p)}$, on le notera a^p ; cela permet d'écrire la somme $a^p + b^p$ et le produit par un réel λa^p.

Proposition 1 : Soient p un réel ≥ 1, et T une forme linéaire ≥ 0 sur l'espace réticulé $L^{(p)}$. Pour $x \in L$, on pose $\|x\|_T = T(|x|^p)^{1/p}$. Alors $\| \ \|_T$ est une semi-norme sur L et le complété du $\mathbb{R}$-treillis $(L, \| \ \|_T)$ est un espace L^p.

On a immédiatement $\|\lambda x\|_T = |\lambda| \ \|x\|_T$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in L$. Pour l'inégalité triangulaire, on note que si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$, $a^q + \beta^q = 1$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, on a

$$|\alpha x + \beta y| \leq (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$$

pour $x,y \in L$ (car cette inégalité est vraie pour $x,y \in \mathbb{R}$). Donc, dans $L^{(p)}$, on a $|\alpha x + \beta y|^p \leq |x|^p + |y|^p$ soit $|x+y|^p \leq \frac{1}{\alpha^p} |x|^p + \frac{1}{\beta^p} |y|^p$;

puisque T est une forme linéaire ≥ 0, on a $T(|x+y|^p) \leq \frac{1}{\alpha^p} T(|x|^p) + \frac{1}{\beta^p} T(|y|^p)$.

Si on pose $\alpha^q = \dfrac{\|x\|_T}{\|x\|_T + \|y\|_T}$, $\beta^q = \dfrac{\|y\|_T}{\|x\|_T + \|y\|_T}$, on trouve

$$\|x+y\|_T \leq \|x\|_T + \|y\|_T \ .$$

Pour voir que $(L, \|\ \|_T)$ est un espace L^p, il suffit de vérifier que, si $x,y \in L_+$, on a $\|x\|_1^p \geq \|x\|_T^p + \|y\|_T^p \geq \|x \cup y\|_T^p$ ([3] ou [4]).

Or, si $x,y \in L$, on a $|x| + |y| \geq (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \geq |x| \cup |y|$ (car ces inégalités sont vraies dans $\mathbb{R}$). On a donc, dans $L^{(p)}$:

$$(|x| + |y|)^p \geq |x|^p + |y|^p \geq (|x| \cup |y|)^p$$

et il suffit d'appliquer T aux trois membres pour obtenir le résultat.

c. q. f. d.

Opérateurs de type $\leq p$ et $\geq p$.

Soient E un espace de Banach, L un $\mathbb{R}$-treillis complet et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur $U : E \to L$ est dit de type $\geq p$ s'il existe $K > 0$ tel que

$$\| (|Ux_1|^p + \ldots + |Ux_n|^p)^{1/p} \| \leq K (\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{1/p}$$

pour $x_1, \ldots, x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$. La plus petite constante K possible sera notée $K^{(p)}(U)$. Si U n'est pas de type $\geq p$, on pose $K^{(p)}(U) = +\infty$. Evidemment $K^{(p)}(U) \geq \|U\|$ et $K^{(1)}(U) = \|U\|$.

Un opérateur $V : L \to E$ sera dit de type $\leq p$ s'il existe $K > 0$ tel que

$$(\|Vx_1\|^p + \ldots + \|Vx_n\|^p)^{1/p} \leq K \ \| (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \|$$

pour $x_1, \ldots, x_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$. La plus petite valeur de K possible est notée $K_{(p)}(V)$; si V n'est pas de type $\leq p$, on pose $K_{(p)}(V) = +\infty$.
On a $K_{(p)}(V) \geq \|V\|$ et $K_\infty(V) = \|V\|$. Un $\mathbb{R}$-treillis L est dit de type $\geq p$ (resp. $\leq p$) si l'identité $i_L : L \to L$ est de ce type. On pose $K^{(p)}(L) = K^{(p)}(i_L)$ et $K_{(p)}(L) = K_{(p)}(i_L)$ par définition. Pour $p' \geq p$ (resp. $p' \leq p$) les espaces $L^{p'}$ sont de type $\geq p$ (resp. $\leq p$) avec 1 comme constante.

Théorème 2 : Soient E,F des espaces de Banach, L un $\mathbb{R}$-treillis complet, $U : E \to L$ un opérateur de type $\geq p$, $V : L \to F$ un opérateur de type $\leq p$

et I l'idéal de L engendré par l'image de $\mathcal{U}$. Il existe alors une semi-norme $\|\mathcal{U}\|_p$ sur I telle que le complété de $(I, \|\mathcal{U}\|_p)$ soit un espace L^p et telle que $\|\mathcal{U}\|_p \leq K^{(p)}(\mathcal{U})$, $\|V\|_p \leq K_{(p)}(V)$ ($\|\mathcal{U}\|_p$, $\|V\|_p$ sont les normes des opérateurs $\mathcal{U}: E \to (I, \|\mathcal{U}\|_p)$, $V : (I, \|\mathcal{U}\|_p) \to F$).

On peut supposer $K^{(p)}(\mathcal{U}) = K_{(p)}(V) = 1$. D'après la proposition 1, il suffit de trouver une forme linéaire $T \geq 0$ sur $I^{(p)}$ telle que $T(|\mathcal{U}x|^p) \leq \|x\|^p$ pour tout $x \in E$; $T(|\xi|^p) \geq \|V\xi\|^p$ pour tout $\xi \in I$. Comme $I^{(p)}$ est un espace réticulé et que tout élément de $I^{(p)}$ et majoré en valeur absolue par $|\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_n|^p$ pour $x_1, \ldots, x_n \in E$ (car I est l'idéal engendré par l'image de $\mathcal{U}$), on voit qu'il suffit que, quels que soient $x_1, \ldots, x_m \in E$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in I$ tels que

$$(*) \qquad |\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_m|^p \geq |\xi_1| + \ldots + |\xi_n|^p ,$$

on ait $\|x_1\|^p + \ldots + \|x_m\|^p \geq \|V\xi_1\|^p + \ldots + \|V\xi_n\|^p$.

Mais, d'après (*), on a dans $\| (|\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| \geq \| (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}} \|$ d'où la conclusion d'après les hypothèses faites sur $\mathcal{U}$ et V.

c. q. f. d.

Corollaire 1 : Soient E un espace de Banach, L un $\mathbb{R}$-treillis complet.

1) Si $\mathcal{U} : E \to L$ est de type $\geq p$ et si L est de type $\leq p$, on a la factorisation $\mathcal{U} = h \circ \mathcal{U}'$, où $\mathcal{U}'$ est un opérateur de E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$, $\|\mathcal{U}'\| \leq K^{(p)}(\mathcal{U})$, et h un homomorphisme fort de $L^p(\Omega, \mu)$ dans L, $\|h\| \leq K_{(p)}(L)$.

2) Si $V : L \to E$ est de type $\leq p$ et L de type $\geq p$, on a la factorisation $V = V' \circ h$, où $V' : L^p(\Omega, \mu) \to E$, $\|V'\| \leq K_{(p)}(V)$, et $h : L \to L^p(\Omega, \mu)$ est un homomorphisme fort, $\|h\| \leq K^{(p)}(L)$.

Conséquence immédiate du théorème 2, en posant $\mathcal{U} = i_L \circ \mathcal{U}$, $V = V \circ i_L$, i_L étant l'identité sur L.

Corollaire 2 : Pour qu'un $\mathbb{R}$-treillis complet L soit isomorphe à un espace $L^p(\Omega,\mu)$ (c'est-à-dire pour qu'il existe un opérateur borné $L \to L^p(\Omega,\mu)$ bijectif qui soit un homomorphisme de $\mathbb{R}$-treillis), il faut et il suffit que L soit à la fois de type $\leq p$ et $\geq p$.

La condition est évidemment nécessaire. On voit immédiatement qu'elle est suffisante en appliquant le théorème 2 avec $\mathcal{U} = i_L$, $V = i_L$.

Proposition 2 : Soit $\mathcal{U}$: L → M un opérateur ≥ 0, L et M étant deux $\mathbb{R}$-treillis complets. Alors

$$\| (|\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_n|^p)^{1/p} \| \leq \|\mathcal{U}\| \, \| (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} \|$$

quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in L$, $p \geq 1$.

Montrons d'abord la

Proposition 3 : Soit L un $\mathbb{R}$-treillis complet, $a_1,\ldots,a_n \in L$ et $p,q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$(|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p} = \sup \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \, ; \, \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}, |\alpha_1|^q + \ldots + |\alpha_n|^q \leq 1\}.$$

On a $(|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p} \geq \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ si $|\alpha_1|^q + \ldots + |\alpha_n|^q = 1$ (car cette inégalité est vraie lorsque $a_1,\ldots,a_n$ décrivent $\mathbb{R}$).

Inversement, soit $(\alpha_1^i,\ldots,\alpha_n^i)$ $(i = 1,2,\ldots)$ une énumération des n-uplets de rationnels tels que $|\alpha_1^i|^q + \ldots + |\alpha_n^i|^q \leq 1$, et posons

$$t_j(x_1,\ldots,x_n) = \sup_{i=1}^{j} \alpha_1^i x_1 + \ldots + \alpha_n^i x_n .$$

Les t_j forment une suite croissante de fonctions continues sur S_n (sphère unité de l_n^∞) qui converge (et donc converge uniformément) vers la fonction continue $(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc N tel que, si $j \geq N$, l'on ait

$$|t_j(x_1,\ldots,x_n) - (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}| \leq \varepsilon(|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|)$$

quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$.

Cette inégalité est donc vraie quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in L$. Il en résulte que si $b \in L$, $b \geq \alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n$ quels que soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1|^q+\ldots+|\alpha_n|^q \leq 1$, on a $b \geq t_j(a_1,\ldots,a_n)$ et par suite

$$b \geq (|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p)^{1/p} - \varepsilon(|\alpha_1| \cup \ldots \cup |a_n|).$$

Comme ε est arbitraire >0, on a $b \geq (|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p)^{1/p}$.

c. q. f. d.

Montrons la proposition 2 : puisque $\mathcal{U} \geq 0$, et que

$$(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq \alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n \quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R},\ \alpha_1^q+\ldots+\alpha_n^q \leq 1)$$

on a $\mathcal{U}(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)^{1/p} \geq \alpha_1 \mathcal{U}x_1+\ldots+\alpha_n \mathcal{U}x_n$, et donc (proposition 3) $\mathcal{U}(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)^{1/p} \geq (|\mathcal{U}x_1|^p+\ldots+|\mathcal{U}x_n|^p)^{1/p}$.

Donc

$$\|(|\mathcal{U}x_1|^p+\ldots+|\mathcal{U}x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\| \leq \|\mathcal{U}(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)^{1/p}\| \leq \|\mathcal{U}\|\ \|(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\|.$$

c. q. f. d.

Il en résulte immédiatement que, si L, M sont deux $\mathbb{R}$-treillis complets, de types respectivement $\geq p$ et $\leq p$, tout opérateur ≥ 0, $\mathcal{U}: L \to M$ est à la fois de type $\geq p$ et $\leq p$, donc admet deux factorisations par un espace L^p, de chacun des types indiqués au corollaire 1.

Lorsque $p=2$, le théorème suivant permet d'éliminer la restriction $\mathcal{U} \geq 0$.

Théorème 3 : .(Inégalité de Grothendieck). Soient L, M deux $\mathbb{R}$-treillis complets et $\mathcal{U}: L \to M$ un opérateur borné. Alors

$$\|(|\mathcal{U}x_1|^2+\ldots+|\mathcal{U}x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| \leq K_G \|\mathcal{U}\|\ \|(|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|$$

pour $x_1,\dots,x_n \in L$ (K_G est la constante de Grothendieck).

On se ramène au cas particulier où $L = \mathcal{C}(S)$ (S espace compact) et où M est un espace L^1. On suppose connu ce cas (qui sera d'ailleurs démontré plus loin).
Soient $a_1,\dots,a_n \in L$; on pose $a = (|a_1|^2+\dots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, $b = (|\mathcal{U}a_1|^2+\dots+|\mathcal{U}a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.
D'après les remarques du début, il existe deux homomorphismes $h : \mathcal{C}(S) \to L$, $h' : M \to L^1(\Omega,\mu)$, $\|h\| = \|h'\| = 1$; de plus, h est l'identité sur I(a) (donc $h(a_i) = a_i$, $i = 1,\dots,n$), $\|a\|_\infty = \|a\|$, et $\|h'b\| = \|b\|$.
En appliquant l'inégalité de Grothendieck à l'opérateur $h'\circ\mathcal{U}\circ h : \mathcal{C}(S) \to L^1(\Omega,\mu)$, on trouve

$$\| (|h'\mathcal{U}h\, a_1|^2+\dots+|h'\mathcal{U}h a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| \le K_G \|h'\circ\mathcal{U}\circ h\| \ \|a\|_\infty .$$

Or $\|a\|_\infty = \|a\|$ et $\|h'\circ\mathcal{U}\circ h\| \le \|\mathcal{U}\|$. De plus, comme h' est un homomorphisme, le premier membre est $\|h' (|\mathcal{U}ha_1|^2+\dots+|\mathcal{U}ha_n|^2)^{1/2}\|$ donc inférieur ou égal à $\| (|\mathcal{U}ha_1|^2+\dots+|\mathcal{U}ha_n|^2)^{1/2}\|$. D'où le résultat, puisque $ha_i = a_i$.

c. q. f. d.

Il en résulte immédiatement que si L et M sont des $\mathbb{R}$-treillis respectivement de type ≥ 2 et ≤ 2, tout opérateur $\mathcal{U}$: L → M est à la fois de type ≤ 2 et ≥ 2. Par suite

Corollaire 3 : Si L, M sont des $\mathbb{R}$-treillis complets, de types respectivement ≥ 2 et ≤ 2, tout opérateur $\mathcal{U}$: L → M admet deux factorisations :

1) $\mathcal{U} = h'\circ\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}' : L \to L^2(\Omega',\mu')$, $\|\mathcal{U}'\| \le K_G \|\mathcal{U}\| \ K^{(2)}(L)$, et $h' : L^2(\Omega',\mu') \to M$, $\|h'\| \le K_{(2)}(M)$, h' étant un homomorphisme fort.

2) $\mathcal{U} = \mathcal{U}''\circ h''$, $h'' : L \to L^2(\Omega'',\mu'')$, $\mathcal{U}'' : L^2(\Omega'',\mu'') \to M$, $\|h''\| \le K^{(2)}(L)$, $\|\mathcal{U}'\| \le K_G \ K_{(2)}(M) \|\mathcal{U}\|$, h'' étant un homomorphisme fort.

Lemme 1 : Soient $\varphi_1(\omega),\dots,\varphi_n(\omega)$ des variables aléatoires de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable sur l'espace de probabilité (Ω,P) et $\mathcal{U}$: E → L un opérateur de type $\ge p$ d'un espace de Banach E dans $\mathbb{R}$-treillis complet L.

Alors quels que soient $x_1,\dots,x_n \in E$, on a

$$\| \left(\int_\Omega |\mathcal{U} x_1\varphi_1(\omega)+\dots+\mathcal{U}x_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \| \le K^{(p)}(\mathcal{U}) \left(\int_\Omega \| x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De même, si $V : L \to E$ est un opérateur de type $\le p$, on a

$$\left(\int_\Omega \| Vx_1\varphi_1(\omega)+\dots+Vx_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \le K_{(p)}(V) \| \left(\int_\Omega |x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \|$$

On montre seulement la première inégalité ; notons que la fonction $F(y_1,\dots,y_n) = \left(\int_\Omega |y_1\varphi_1(\omega)+\dots+y_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{1/p}$ est continue homogène de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$, ce qui permet de la définir dans L. Notons aussi que l'inégalité à démontrer est évidente lorsque $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ sont étagées, puisque l'intégrale se réduit alors à une somme finie.
On choisit alors des fonctions étagées $\psi_i(\omega)$ telles que

$$\left(\int_\Omega |\varphi_i(\omega) - \psi_i(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \qquad (i = 1,\dots,n).$$

On a alors

$$\left| \left(\int_\Omega \| x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega \| x_1\psi_1(\omega)+\dots+x_n\psi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \right|$$

$$\le \left(\int_\Omega \left| \, \|x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)\| - \|x_1\psi_1(\omega)+\dots+x_n\psi_n(\omega)\| \, \right|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(inégalité triangulaire dans $L^p(\Omega,P)$

$$\le \left(\int_\Omega \| x_1(\varphi_1(\omega)-\psi_1(\omega))+\dots+x_n(\varphi_n(\omega)-\psi_n(\omega))\|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \|x_1\| \left(\int_\Omega |\varphi_1(\omega)-\psi_1(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \|x_n\| \left(\int_\Omega |\varphi_n(\omega)-\psi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \varepsilon(\|x_1\|+\dots+\|x_n\|).$$

Par ailleurs. en posant $y_i = Ux_i$, on a dans L :

$$\left| \left(\int_\Omega |y_1\varphi_1(\omega)+\ldots+y_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega |y_1\psi_1(\omega)+\ldots+y_n\psi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \right| \leq \varepsilon(|y_1|+\ldots+|y_n|)$$

(en effet, cette inégalité serait vraie pour $y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$, par la même démonstration que ci-dessus, donc est vraie pour $y_1,\ldots,y_n \in L$).
Par suite , la norme du premier membre est $\leq \varepsilon(\|y_1\| +\ldots+ \|y_n\|)$.
Comme l'inégalité à démontrer est vraie pour $\psi_1,\ldots,\psi_n$ qui sont étagées, on en déduit

$$\left\| \left(\int_\Omega |y_1\varphi_1(\omega)+\ldots+y_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leq K^{(p)}(U)\left(\int_\Omega \|x_1\varphi_1(\omega)+\ldots+x_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \varepsilon \left(\|y_1\| +\ldots+ \|y_n\| \right) +$$

$$+ \varepsilon\, K^{(p)}(U) \left(\|x_1\| +\ldots+ \|x_n\| \right) .$$

D'où le résultat puisque ε est un réel >0 arbitraire.

c. q. f. d.

Dans la suite $f_1^{(p)}(\omega),\ldots,f_n^{(p)}(\omega)$ (p réel, $0 < p \leq 2$) désignent des variables aléatoires indépendantes p-stables sur (Ω,P), telles que

$$\int_\Omega \exp\, i(\lambda_1 f_1^{(p)}(\omega)+\ldots+\lambda_n f_n^{(p)}(\omega))P(d\omega) = \exp\, (-|\lambda_1|^p-\ldots-|\lambda_n|^p).$$

On écrira $f_i(\omega)$ au lieu de $f_i^{(2)}(\omega)$, on pose $\gamma_q=\left(\int_\Omega |f_i(\omega)|^q P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}}$ pour tout réel $q>0$,
et $\gamma_{p,q} =\left(\int_\Omega |f_i^{(p)}(\omega)|^q P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}}$ pour $0<q<p<2$.

Lemme 2 : Soient L un $\mathbb{R}$-treillis complet et $x_1,\ldots,x_n \in L$. Alors

$$\left(\int_\Omega |x_1f_1(\omega)+\ldots+x_nf_n(\omega)|^q P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} = \gamma_q\left(|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $q > 0$;

$$\left(\int_\Omega |x_1 f_1^{(p)}(\omega)+\ldots+x_n f_n^{(p)}(\omega)|^q P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} = \gamma_{p,q}\left(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $0 < q < p \leq 2$.

Cela résulte immédiatement du fait que ces égalités sont vraies pour $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$.

Théorème 4 : Soient p un réel ≥ 2, M un $\mathbb{R}$-treillis complet de type $\leq p$ et ≥ 2 et E un sous-espace de M. Alors tout opérateur $\mathcal{U}$: E → L, où L est un $\mathbb{R}$-treillis complet, est de type ≥ 2 et

$$K^{(2)}(\mathcal{U}) \leq \|\mathcal{U}\| \, K_{(p)}(M) \, K^{(2)}(M) \, \frac{\gamma_p}{\gamma_1} .$$

Soient $x_1,\ldots,x_n \in E$; on a $\gamma_1 \, \|(|\mathcal{U}x_1|^2+\ldots+|\mathcal{U}x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| =$

$$= \left\| \int_\Omega |\mathcal{U}x_1 f_1(\omega)+\ldots+\mathcal{U}x_n f_n(\omega)| \, P(d\omega) \right\| \text{ (lemme2)} \leq \int_\Omega \|\mathcal{U}x_1 f_1(\omega)+\ldots+\mathcal{U}x_n f_n(\omega)\| \, P(d\omega)$$

$$\leq \|\mathcal{U}\| \int_\Omega \|x_1 f_1(\omega)+\ldots+x_n f_n(\omega)\| \, P(d\omega) \leq \|\mathcal{U}\| \left(\int_\Omega \|x_1 f_1(\omega)+\ldots+x_n f_n(\omega)\|^p \, P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\mathcal{U}\| \; K_{(p)}(M) \; \left\|\left(\int_\Omega |x_1 f_1(\omega)+\ldots+x_n f_n(\omega)|^p \, P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}\right\| \quad \text{(lemme 1)}$$

$$= \|\mathcal{U}\| \; K_{(p)}(M) \; \gamma_p \; \|(|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| \quad \text{(lemme 2)}$$

$$\leq \|\mathcal{U}\| \; K_{(p)}(M) \; \gamma_p \; K^{(2)}(M) \; (\|x_1\|^2+\ldots+\|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

c. q. f. d.

Corollaire 4 : Si E est un sous-espace d'un $\mathbb{R}$-treillis M de type ≥ 2 et $\leq p$ $(p \geq 2)$, alors tout opérateur $\mathcal{U}$: E → L, où L est un $\mathbb{R}$-treillis de type ≤ 2 admet la factorisation $\mathcal{U} = h \circ \mathcal{U}'$, $\mathcal{U}'$: E → $L^2(\mu)$, h : $L^2(\mu)$ → L, h étant un homomorphisme fort.

En particulier les seuls espaces de Banach isomorphes à la fois à un sous-espace de L et un sous-espace de M sont des espaces de Hilbert.

Théorème 4.1 : Soient $1 \leq p < q \leq 2$, et E un sous-espace d'un L^q. Alors tout opérateur de E dans un $\mathbb{R}$-treillis complet L est de type $\geq p$.

On montre d'abord qu'on a pour $x_1, \ldots, x_n \in L^q$:

$$\int_\Omega \| x_1 f_1^{(p)}(\omega) + \ldots + x_n f_n^{(p)}(\omega) \| \, P(d\omega) \leq K \left(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour une certaine constante K dépendant de p, q. Pour cela, on utilise le fait qu'il existe un espace de probabilité (Ω', P') et une isométrie $J : L^q \to L^p(\Omega', P')$, telle que, si $h : L^p(\Omega', P') \to L^1(\Omega', P')$ est l'application identique, $\frac{\gamma_{q,p}}{\gamma_{q,1}} h \circ J$ soit aussi une isométrie (J est le plongement isométrique de L^q dans $L^p(\Omega', P')$ défini au moyen de variables q-stables [4]).

On a alors

$$\frac{\gamma_{q,1}}{\gamma_{q,p}} \int_\Omega \| x_1 f_1^{(p)}(\omega) + \ldots + x_n f_n^{(p)}(\omega) \| \, P(d\omega) =$$

$$= \int_\Omega \| hJx_1 f_1^{(p)}(\omega) + \ldots + hJx_n f_n^{(p)}(\omega) \|_1 \, P(d\omega) =$$

$$= \left\| \int_\Omega | hJx_1 f_1^{(p)}(\omega) + \ldots + hJx_n f_n^{(p)}(\omega) | \, P(d\omega) \right\|_1 \quad \text{(théorème de Fubini)} =$$

$$= \gamma_{p,1} \left\| \left(|hJx_1|^p + \ldots + |hJx_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_1 \quad \text{(lemme 2)}$$

$$= \gamma_{p,1} \left\| h \left(|Jx_1|^p + \ldots + |Jx_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_1 \quad \text{(h est un homomorphisme)}$$

$$\leq \gamma_{p,1} \left\| \left(|Jx_1|^p + \ldots + |Jx_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_p$$

$$= \gamma_{p,1} \left(\|Jx_1\|^p + \ldots + \|Jx_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{car } Jx_i \in L^p)$$

$$= \gamma_{p,1} \left(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

D'où le résultat annoncé avec $K = \gamma_{q,p} \dfrac{\gamma_{q,1}}{\gamma_{p,1}}$.

On a alors, si $U : E \to L$:

$$\gamma_{p,1} \left\| \left(|Ux_1|^p + \ldots + |Ux_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| = \left\| \int_\Omega \left(|Ux_1 f_1^{(p)}(\omega) + \ldots + Ux_n f_n^{(p)}(\omega)| \right) P(d\omega) \right\|$$

(lemme 2)

$$\leq \int_\Omega \left\| Ux_1 f_1^{(p)}(\omega) + \ldots + Ux_n f_n^{(p)}(\omega) \right\| P(d\omega)$$

$$\leq \|U\| \int_\Omega \left\| x_1 f_1^{(p)}(\omega) + \ldots + x_n f_n^{(p)}(\omega) \right\| P(d\omega)$$

$$\leq K \|U\| \left(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

c. q. f. d.

Dualité des opérateurs de type $\geq p$ et $\leq q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$.

Lemme 3 : Soit U un opérateur défini sur un espace de Banach E à valeurs dans $L^1(\Omega,\mu)$. Pour que $K^{(p)}(U) \leq K$, il faut et il suffit que U admette la factorisation

$$E \xrightarrow{U'} L^p(\Omega',\mu') \xrightarrow{h} L^1(\Omega,\mu), \text{ avec } \|U'\| \leq K, \quad \|h\| \leq 1,$$

h étant un homomorphisme (resp. un homomorphisme fort).

La condition est évidemment nécessaire d'après le corollaire 1. Elle est suffisante car si $x_1, \ldots, x_n \in E$, on a

$$\left\| \left(|Ux_1|^p + \ldots + |Ux_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| = \left\| \left(|hU'x_1|^p + \ldots + |hU'x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|$$

$$= \left\| h \left(|U'x_1|^p + \ldots + |U'x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|$$

(puisque h est un homomorphisme)

$$\leq \| (|U'x_1|^p + \ldots + |U'x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| = (\|U'x_1\|^p + \ldots + \|U'x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(car $U'x_i \in L^p(\Omega',\mu')$)

$$\leq K (\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

c. q. f. d.

Lemme 4 : Soit $V : \mathcal{C}(S) \to E$ (S espace compact, E espace de Banach). Pour que $K_{(p)}(V) \leq K$, il faut et il suffit que V admette la factorisation $\mathcal{C}(S) \xrightarrow{h} L^p(\Omega,\mu) \xrightarrow{V'} E$, $\|h\| \leq 1$, $\|V'\| \leq K$, h étant un homomorphisme (resp. un homomorphisme fort).

La condition est évidemment nécessaire d'après le corollaire 1. Elle est suffisante car si $x_1,\ldots,x_n \in \mathcal{C}(S)$, on a

$$(\|Vx_1\|^p + \ldots + \|Vx_n\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\|V'hx_1\|^p + \ldots + \|V'hx_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq K (\|hx_1\|^p + \ldots + \|hx_n\|^p)^{\frac{1}{p}} = K \| (|hx_1|^p + \ldots + |hx_n|^p)^{\frac{1}{p}} \|$$

(car $hx_i \in L^p(\Omega,\mu)$)

$$= K \| h (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \|$$

(car h est un homomorphisme)

$$\leq K \| (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| .$$

c. q. f. d.

Proposition 4 : Si $U : E \to L^1(\Omega,\mu)$ défini sur un espace de Banach E est de type $\geq p$, alors U^* est de type $\leq q$ et $K^{(p)}(U) = K_{(q)}(U^*)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Si $V : \mathcal{C}(S) \to E$ (S espace compact) est de type $\leq p$, alors V^* est de type $\geq q$ et $K_{(p)}(V) = K^{(q)}(V^*)$.

En effet, U admet la factorisation $E \xrightarrow{U'} L^p(\Omega',\mu') \xrightarrow{h} L^1(\Omega,\mu)$, donc U^* admet la factorisation $L^\infty(\Omega,\mu) \xrightarrow{h^*} L^q(\Omega',\mu') \xrightarrow{U'^*} E^*$. Donc U^* est de type $\leq q$ et $K_{(q)}(U^*) \leq K^{(p)}(U)$ (car $\|U'\| = K^{(p)}(U)$).

De même V^* est de type $\leq q$ et $K^{(q)}(V^*) \leq K_{(p)}(V)$.

En appliquant de nouveau ce résultat à U^* (puisque $L^\infty(\Omega,\mu)$ est un espace $\mathcal{C}(S)$), on trouve $K^{(p)}(U^{**}) \leq K_{(q)}(U^*) \leq K^{(p)}(U)$.

Or, évidemment, $K^{(p)}(U^{**}) \geq K^{(p)}(U)$ puisque U^{**} est un prolongement de U.

Il en résulte que $K^{(p)}(U^{**}) = K_{(q)}(U^*) = K^{(p)}(U)$.

De même, $K^{(q)}(V^*) = K_{(p)}(V)$.

c. q. f. d.

Théorème 5 : Soit $U : E \to L$ un opérateur de type $\geq p$ (E espace de Banach, L $\mathbb{R}$-treillis complet). Alors U^* est de type $\leq q$ ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$) et $K_{(q)}(U^*) = K^{(p)}(U)$.

Compte tenu du théorème suivant et du fait que $K^{(p)}(U^{**}) \geq K^{(p)}(U)$, il suffit de montrer que $K_{(q)}(U^*) \leq K^{(p)}(U)$. On suppose $K^{(p)}(U) = 1$.

Soient $t_1,\ldots,t_n \in L^*$, $t = (|t_1|^q+\ldots+|t_n|^q)^{\frac{1}{q}}$. On a à montrer que $(\|U^*t_1\|^q+\ldots+\|U^*t_n\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|t\|$; on peut supposer $\|t\| = 1$.

Sur L on met la norme définie par $\|x\|_1 = t(|x|)$. Alors le complété de $(L, \|\ \|_1)$ est un espace $L^1(\Omega,\mu)$ et l'identité est un homomorphisme fort $h : L \to L^1(\Omega,\mu)$. De plus, $K^{(p)}(h \circ U) \leq 1$ (car $\|h\| \leq 1$ et h est un homomorphisme).

D'après la proposition précédente, on a : $K_{(q)}(U^* \circ h^*) \leq 1$.

Comme l'image de $h^* : L^\infty(\Omega,\mu) \to L^*$ est un idéal de L^* (voir remarques du début) et que $h^*(1) = t$, il existe $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in L^\infty(\Omega,\mu)$ tels que $h^*\varphi_i = t_i$ $(i = 1,\ldots,n)$. On pose $\varphi = (|\varphi_1|^q+\ldots|\varphi_n|^q)^{1/q}$ et on a

$$(\|U^*h^*\varphi_1\|^q+\ldots+\|U^*h^*\varphi_n\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|_\infty \text{ (parce que } K_{(q)}(U^* \circ h^*) \leq 1) ;$$

soit $(\|U^*t_1\|^q+\ldots+\|U^*t_n\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|_\infty$.

Or $\|\varphi\|_\infty = \sup\{<\varphi,f> ;\ f \in L^1(\Omega,\mu),\ \|f\|_1 = 1\}$

$= \sup\{<\varphi,hx> ;\ x \in L,\ t(|x|) = 1\}$

puisque l'image de h est dense dans $L^1(\Omega,\mu)$ (par construction de cet espace).

Or $\langle \varphi, hx \rangle = \langle h^* \varphi, x \rangle = \langle h^* (|\varphi_1|^q + \ldots + |\varphi_n|^q)^{\frac{1}{q}}, x \rangle = \langle (|t_1|^q + \ldots + |t_n|^q)^{\frac{1}{q}}, x \rangle$

(car h^* est un homomorphisme et $h^* \varphi_i = t_i$)

$= t(x)$.

Il en résulte que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.

c. q. f. d.

Théorème 6 : Soit $V : L \to E$ un opérateur de type $\leq p$ (E espace de Banach, L $\mathbb{R}$-treillis). Alors V^* est de type $\geq q$ et $K^{(q)}(V^*) = K_{(p)}(V)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$.

Compte tenu du résultat précédent, il suffit de montrer que $K^{(q)}(V^*) \leq K_{(p)}(V)$. On suppose $K_{(p)}(V) = 1$. Soient $t_1, \ldots, t_n \in E^*$ et $u = (|V^* t_1|^q + \ldots + |V^* t_n|^q)^{1/q}$. Comme u est une forme linéaire ≥ 0 sur L, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir $a \in L_+$, $\|a\| = 1$, $u(a) \geq \|u\| - \varepsilon$.
On a construit au début de cet exposé un espace $\mathcal{C}(S)$ et un homomorphisme fort $h : \mathcal{C}(S) \to L$, $\|h\| = 1$ tel que $h(1) = a$.
On a alors $K_{(p)}(V \circ h) \leq 1$; donc, d'après la proposition 4, $K^{(q)}(h^* \circ V^*) \leq 1$, et, par suite,

$$\| (|h^* V^* t_1|^q + \ldots + h^* V^* t_n|^q)^{\frac{1}{q}} \| \leq (\|t_1\|^q + \ldots + \|t_n\|^q)^{\frac{1}{q}} .$$

Le premier membre est $\|h^* u\|$ puisque h^* est un homomorphisme.
Or, $h^* : L^* \to \mathcal{C}(S)^*$ et $u \geq 0$; il en résulte que $h^* u$ est une mesure de Radon ≥ 0 sur S, donc $\|h^* u\| = \langle h^* u, 1 \rangle = \langle u, h(1) \rangle = u(a) \geq \|u\| - \varepsilon$.
Comme ε est arbitraire, on a

$$\|u\| \leq (\|t_1\|^q + \ldots + \|t_n\|^q)^{1/q} .$$

c. q. f. d.

Théorème 7 : Soit $U : E \to L$ un opérateur borné (E espace de Banach, L $\mathbb{R}$-treillis complet). Alors $K^{(p)}(U)$ est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1 (ce qui veut dire que $\operatorname{Log} K^{(\frac{1}{x})}(U)$ est une fonction convexe de x, $0 \leq x \leq 1$). de même si $V : L \to E$ est un opérateur borné, $K_{(p)}(V)$ est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1.

Par dualité, on voit qu'il suffit de montrer la première partie du théorème.

Lemme 5 : Soient $x,y \in L_+$, $0 \le \theta \le 1$. Alors

$$\|x^\theta y^{1-\theta}\| \le \|x\|^\theta \, \|y\|^{1-\theta} .$$

Noter que $x^\theta y^{1-\theta}$ étant homogène et de degré 1 est définie dans L et on a $x^\theta y^{1-\theta} \le \theta x + (1-\theta)y$ pour $x,y \in L_+$ (car cette inégalité est vraie pour $x,y \in \mathbb{R}_+$ d'après la concavité de la fonction Log).
Donc

$$\|x^\theta y^{1-\theta}\| \le \theta \, \|x\| + (1-\theta) \|y\| ,$$

d'où le résultat en remplaçant x par $x/\|x\|$, y par $y/\|y\|$.

c. q. f. d.

Lemme 6 : Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $a_1,\ldots,a_n \in L_+$, alors

$$\|(\alpha_1 a_1^p + \ldots + \alpha_n a_n^p)^{1/p}\|$$

est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1.

Soit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, $p,q \ge 1$, $0 \le \theta \le 1$. On a à prouver que

$$\|(\alpha_1 a_1^r + \ldots + \alpha_n a_n^r)^{1/r}\| \le \|(\alpha_1 a_1^p + \ldots + \alpha_n a_n^p)^{1/p}\|^\theta \, \|\alpha_1 a_1^q + \ldots + \alpha_n^q)^{1/q}\|^{1-\theta} .$$

D'après le lemme 5, il suffit de montrer que

$$(\alpha_1 a_1^r + \ldots + \alpha_n a_n^r)^{1/r} \le (\alpha_1 a_1^p + \ldots + \alpha_n a_n^p)^{\theta/p} (\alpha_1 a_1^q + \ldots + \alpha_n a_n^q)^{1-\theta/q} .$$

Il suffit de voir que cette inégalité est vraie quels que soient $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}_+$. Or, c'est alors l'inégalité de Hölder

$$b_1 c_1 + \ldots + b_n c_n \le (b_1^{p'} + \ldots + b_n^{p'})^{1/p'} (c_1^{q'} + \ldots + c_n^{q'})^{1/q'}$$

avec $\frac{1}{p'} = \frac{\theta r}{p}$, $\frac{1}{q'} = \frac{(1-\theta)r}{q}$, $b_i = (\alpha_i a_i^p)^{1/p'}$, $c_i = (\alpha_i a_i^q)^{1/q'}$.

c. q. f. d.

On montre alors le théorème 7. On a

$$K^{(p)}(U) = \sup \{ \| (|Ux_1|^p + \ldots + |Ux_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| \; ; \; x_1, \ldots, x_n \in E \, , \; \|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p = 1 \}$$

$$= \sup \{ \| \alpha_1 |Ux_1|^p + \ldots + \alpha_n |Ux_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| \; ; \; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+ , \; \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1 \; ; \; x_1, \ldots, x_n \in E \, , \; \|x_1\| = \ldots = \|x_n\| = 1 \}$$

D'où le résultat cherché d'après le lemme 6 et le fait que la borne supérieure d'une famille de fonctions log-convexe l'est aussi.

c. q. f. d.

Notons que si $p \geq q \geq 1$, et si on définit θ par $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + 1-\theta$, on a donc

$$K^{(q)}(U) \leq K^{(p)}(U)^{\theta} K^{(1)}(U)^{1-\theta} = K^{(p)}(U)^{\theta} \|U\|^{1-\theta} .$$

Comme $K^{(p)}(U) \geq \|U\|$, on voit que $K^{(p)}(U) \geq K^{(q)}(U)$. Donc <u>$K^{(p)}(U)$ est une fonction croissante de p, et de même $K_{(p)}(U)$ est fonction décroissante de p</u>.

<u>Une preuve de l'inégalité de Grothendieck</u>.

<u>Proposition 5</u> : Soit $V : L \to M$ un opérateur de type $\leq p$, L, M étant des $\mathbb{R}$-treillis normés complets.
Alors

$$\| (|Vx_1|^2 + \ldots + |Vx_n|^2)^{\frac{1}{2}} \| \leq K_{(p)}(V) \frac{\gamma_p}{\gamma_1} \| (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \|$$

pour $x_1, \ldots, x_n \in L$.

En effet, on a

$$\gamma_1 \| (|Vx_1|^2 + \ldots + |Vx_n|^2)^{\frac{1}{2}} \| = \| \int_\Omega |Vx_1 f_1(\omega) + \ldots + Vx_n f_n(\omega)| \, P(d\omega) \|$$

(lemme 2)

$$\leq \int_\Omega \| Vx_1 f_1(\omega) + \ldots + Vx_n f_n(\omega) \| \, P(d\omega) \leq \left(\int \| Vx_1 f_1(\omega) + \ldots + Vx_n f_n(\omega) \|^p \, P(d\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq K_{(p)}(V) \; \| \left(\int_\Omega |x_1 f_1(\omega)+\ldots+x_n f_n(\omega)|^p \, P(d\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \| \qquad \text{(lemme 1)}$$

$$= K_{(p)}(V) \; \gamma_p \; \| \left(|x_1|^2+\ldots|x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| \qquad \text{(lemme 2).}$$

c. q. f. d.

Proposition 6 : Soit $V : L \to L^1(\Omega,\mu)$ un opérateur de type $\leq p$ (p réel >2, L $\mathbb{R}$-treillis complet). Alors V est de type ≤ 2 et

$$K_{(2)}(V) \leq \left(\frac{\gamma_p}{\gamma_1}\right)^{\frac{p}{p-2}} \|V\| .$$

D'après la proposition précédente, et le fait que $L^1(\Omega,\mu)$ est de type ≤ 2, on voit que V est de type ≤ 2, et que $K_2(V) \leq \frac{\gamma_p}{\gamma_1} K_{(p)}(V)$.

Comme $K_{(p)}(V)$ est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ et que $K_\infty(V) = \|V\|$, on voit que si $\theta = \frac{2}{p}$, on a $K_{(p)}(V) \leq K_2(V)^\theta \, \|V\|^{1-\theta}$.

Donc $K_2(V) \leq \frac{\gamma_p}{\gamma_1} K_2(V)^\theta \, \|V\|^{1-\theta}$, ce qui donne le résultat cherché.

c. q. f. d.

Théorème 8 : Pour tout opérateur $V : \mathcal{C}(S) \to L^1(\Omega,\mu)$, on a

$$K_{(2)}(V) \leq C \|V\| ,$$

$$K^{(2)}(V) \leq C \|V\|$$

où $C = \inf \left\{ \left(\frac{\gamma_p}{\gamma_1}\right)^{\frac{p}{p-2}} ; \; p>2 \right\}$.

Il suffit de montrer la première inégalité (puis de l'appliquer à V^*). En remplaçant V par V^{**}, on peut supposer que $V : L^\infty(\Omega',\mu') \to L^1(\Omega,\mu)$. Supposons d'abord $L^\infty(\Omega',\mu')$ de dimension finie, donc $L^\infty(\Omega',\mu') = l_n^\infty$. Alors V est de type $\leq p$ pour tout $p \geq 1$ (par exemple d'après le lemme 4 et le fait que l_n^∞ et l_n^p sont isomorphes).
La proposition précédente donne alors le résultat.

Dans le cas général, soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_k \in L^\infty(\Omega',\mu')$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées $\psi_1,\ldots,\psi_k \in L^\infty(\Omega',\mu')$ telles que $\|\varphi_i-\psi_i\|_\infty \leq \varepsilon$

(i = 1, ..., k)

Donc

$$\| (|\varphi_1|^2 + \ldots + |\varphi_k|^2)^{\frac{1}{2}} - (|\psi_1|^2 + \ldots + |\psi_k|^2)^{\frac{1}{2}} \|_2 \leq \varepsilon \sqrt{k}$$

et

$$| (\|V\varphi_1\|^2 + \ldots + \|V\varphi_k\|^2)^{\frac{1}{2}} - (\|V\psi_1\|^2 + \ldots + \|V\psi_k\|^2)^{\frac{1}{2}} | \leq \varepsilon \|V\| \sqrt{k} .$$

Soit Λ le sous-espace réticulé de $L^\infty(\Omega',\mu')$ engendré par $1,\psi_1,\ldots,\psi_k$. Alors Λ est un espace L^∞ de dimension finie, et on a $V : \Lambda \to L^1(\Omega,\mu)$. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$(\|V\psi_1\|^2 + \ldots + \|V\psi_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C \|V\| \, \| (\psi_1^2 + \ldots + \psi_n^2)^{\frac{1}{2}} \| .$$

Donc

$$(\|V\varphi_1\|^2 + \ldots + \|V\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C \|V\| \, \| (\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2)^{\frac{1}{2}} \| + \varepsilon \sqrt{k} + \varepsilon \|V\| \sqrt{k}$$

D'où le résultat puisque ε est > 0 arbitraire.

c. q. f. d.

L'inégalité de Grothendieck se déduit aisément de ce théorème : si $U : \mathcal{C}(S) \to L^1(\Omega,\mu)$, d'après le théorème 8 et le corollaire 1, U admet la factorisation $\mathcal{C}(S) \xrightarrow{h} L^2(\Omega',\mu') \xrightarrow{U'} L^1(\Omega,\mu)$, $\|h\| = 1$, $\|U'\| \leq C \|U\|$, h étant un homomorphisme.

Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \mathcal{C}(S)$ et $x_i = h\varphi_i$. D'après la proposition 5, appliquée à U' avec $p = 2$ (tout opérateur défini sur un espace de Hilbert est de type ≤ 2), on a

$$\| (|U'x_1|^2 + \ldots + |U'x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \| (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \| \, \|U'\| .$$

Or $U'x_i = U\varphi_i$, et, d'autre part,

$$\| (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \| = \| (|h\varphi_1|^2 + \ldots + |h\varphi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \| = \| h (|\varphi_1|^2 + \ldots + |\varphi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \|$$

(car h est un homomorphisme)

$$\leq \| (|\varphi_1|^2 + \ldots + |\varphi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \| .$$

On en déduit $\| (|U\varphi_1|^2 + \ldots + |U\varphi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \| \leq C \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \|U\| \, \| (|\varphi_1|^2 + \ldots + |\varphi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \|$.

Notons d'autres applications du théorème 7. Si U est un opérateur d'un espace de Banach E dans un $\mathbb{R}$-treillis complet L, la fonction $K^{(p)}(U)$ étant une fonction log-convexe et décroissante de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1 est donc continue en tout point p au voisinage duquel elle est finie (y compris p=1). Soient alors E un sous-espace de L^p $(1 \leq p < 2)$ et U l'application identique de E dans L^p ; si $K^{(p')}(U) < +\infty$ pour un $p' > p$ (ce qui, d'après un théorème de Rosenthal [5] équivaut à dire que E ne contient pas de sous-espace isomorphe à l^p), alors $K^{(q)}(U) \to K^{(p)}(U) = 1$ quand q tend en décroissant vers p.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc $q > p$ tel que U admette la factorisation $E \xrightarrow{U'} L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{h} L^p$, $\|U'\| \leq 1+\varepsilon$, $\|h\| = 1$. Autrement dit, on a une légère amélioration du résultat de Rosenthal :

Si $1 \leq p < 2$ et si E est un sous-espace de L^p, ou bien pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X de E tel que $d(X,l^p) \leq 1+\varepsilon$, ou bien pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q > p$ et un sous-espace Y de L^q tel que $d(E,Y) \leq 1+\varepsilon$.

Pour $1 \leq p, q \leq 2$, on peut définir $K(p,q) = \sup \{K^{(q)}(U) ; U : L^\infty \to L^p, \|U\| \leq 1\}$; on a $1 \leq K(p,q) \leq K_G$ et K(p,q) est une fonction log-convexe décroissante de $\frac{1}{q}$, donc continue.

Comme K(p,p) = 1, on a montré que :

Pour tout p, $1 \leq p < 2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe q, $p < q \leq 2$ tel que tout opérateur $U : L^\infty \to L^p$ admette la factorisation $L^\infty \xrightarrow{U'} L^q \xrightarrow{h} L^p$ avec $\|U'\| \leq (1+\varepsilon) \|U\|$, $\|h\| = 1$, h étant un homomorphisme fort.

*
**

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. KAKUTANI : Concrete representation of abstract L-spaces et Concrete representations of abstract M-spaces. Annals of Math. (42) 1941 p. 523-537 et p. 994-1024.

[2] B. MAUREY : Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973, exposés XV, XVII, XXII.

[3] H. NAKANO : Über normierte teilwesgeorgnete Moduln. Proc. Imp. Acad. Tokyo 17 (1941) p. 301-307.

[4] J. BRETAGNOLLE, D. DACUNHA-CASTELLE, J.L. KRIVINE : Lois stables et espaces L^p . Ann. Inst. H. Poincaré 2(1966) p. 231-259.

[5] H.P. ROSENTHAL : On subspaces of L^p. Ann. of Math. Vol 97 n°2 (1973) p. 344-373.

****