Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Une nouvelle caractérisation des applications (p,q)-sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 12, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A14_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES APPLICATIONS (p,q)-SOMMANTES

par B. MAUREY

Exposé N° XII

30 Janvier 1974

Dans cet exposé, nous allons étudier systématiquement la "propriété de remontée de L^p à Λ_q", qui est définie de la façon suivante :

Soient $0 \leq p < q < \infty$, v un opérateur linéaire continu entre E et F espaces de Banach. Nous dirons que v vérifie la propriété de remontée de L^p à Λ_q si pour tout opérateur linéaire continu u de F dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, l'opérateur $u \circ v$ est "presque borné" de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mu)$ (cf. exposé IV).

En fait, nous modifierons un peu cette définition, en y incluant quelques hypothèses techniques.

Soit E un espace de Banach, et soit $p \in]0,+\infty[$. Comme dans l'exposé X, § 2, nous dirons qu'un opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, est p-approximable si la probabilité cylindrique $\tilde{\lambda}$ sur E définie par u est limite cylindrique d'un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur E, tel que l'on ait pour tout j :

$$\|\lambda_j\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^* = \|u\| .$$

Nous dirons qu'un opérateur u de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, est 0-approximable si pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur E, convergeant cylindriquement vers λ, et tel que pour tout j :

$$J_\alpha^*(\lambda_j) \leq J_\alpha^*(\lambda) .$$

(λ étant la probabilité cylindrique représentée par u).

Soient maintenant E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F, et v^* son transposé de F' dans E'. Nous poserons les définitions suivantes :

Soient p,q tels que $0 < p \leq q < \infty$, et soit $\alpha \in]0,1[$. Nous dirons

que v^* vérifie $R_{p,q}$ (resp: $R_{p,q,\alpha}$) s'il existe une constante C telle que l'on ait pour tout opérateur linéaire continu u p-approximable de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité : pour toute suite finie $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ d'éléments de F' :

$$\left(\int \sup_i |u\, v^*(\xi_i)(\omega)|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C \, \|u\| \, \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}$$

$$\left[\text{ resp: } J_\alpha\left(\sup |u\, v^*(\xi_i)(\omega)|, d\mu(\omega)\right) \leq C \, \|u\| \, \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q} \right] .$$

On notera $R_{p,q}(v^*)$ (resp. $R_{p,q,\alpha}(v^*)$) la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

On dira que v^* vérifie $R_{0,q}$ si pour tout opérateur linéaire continu u 0-approximable de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, l'opérateur $u \circ v^*$ est presque borné de E'dans $\Lambda_q(\Omega,\mu)$.

Remarque 1 : Si E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, ou bien dans le cas $p \geq 1$, tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ est p-approximable.
Dans le premier cas, on raisonne comme dans l'exposé X, début du § 2.
Supposons maintenant $p \geq 1$, et soit u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega,\mathcal{C},\mu)$, définissant une probabilité cylindrique λ dans E.
Pour chaque sous-tribu finie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$, on considère l'opérateur $\pi_{\mathcal{S}}$ d'espérance conditionnelle sur la sous-tribu $\mathcal{S}$.
L'opérateur $\pi_{\mathcal{S}} \circ u$ définit une probabilité $\lambda_{\mathcal{S}}$ à support fini sur E", telle que $\|\lambda_{\mathcal{S}}\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^*$, et le filtre $(\lambda_{\mathcal{S}})$ converge cylindriquement vers λ, lorsque "$\mathcal{S}$ tend vers $\mathcal{C}$". Pour finir on peut ramener les probabilités $\lambda_{\mathcal{S}}$ dans E, sans augmenter $\|\lambda_{\mathcal{S}}\|_p^*$, en utilisant le principe de reflexivité locale [2] : si E est un espace de Banach, W un voisinage de zéro de $\sigma(E'',E')$, $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite finie de points de E", il existe un opérateur w de E" dans E, $\|w\| \leq 1$, tel que $w(x_i) - x_i \in W$ pour chaque i.

Remarque 2 : Soit v un opérateur linéaire continu de E dans F, tel que v^* vérifie $R_{p,q}$, $p > 0$, et soit u un opérateur linéaire continu de E' dans l^p. Considérons une suite (α_n) de réels > 0, telle que $\Sigma \alpha_n = 1$, posons $\mu = \Sigma \alpha_n \delta_n$, et considérons l'isométrie j entre l^p et $L^p(\mathbb{N},\mu)$ définie par :

$$j((c_n)) = (\alpha_n^{-1/p} c_n)_n .$$

L'opérateur $j \circ u$ est p-approximable (car $L^p(\mathbb{N},\mu)$ vérifie l'hypothèse d'approximation métrique : on adapte le raisonnement de la remarque 1,) donc :

$\forall (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in F'$:

$$\left(\int \sup_i |j\circ u\circ v^*(\xi_i)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq R_{p,q}(v^*) \, \|j\circ u\| \, (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left(\sum_n \sup_i |u\circ v^*(\xi_i)\,(n)|^p\right)^{1/p} \leq R_{p,q}(v^*) \, \|u\| \, (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

Proposition 1 : Soient p,q, $0 < p < q < \infty$, E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F, et C une constante. Considérons les assertions :

a) Pour tout espace quasi normé G et pour tout opérateur linéaire w λ_q-sommant de F dans G :

$$\pi_p(w \circ v) \leq C \, \pi \, \lambda_q(w) .$$

b) Pour toute suite finie $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ d'éléments de F' :

$$\pi_p(v_\xi \circ v) \leq C \, (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

(où $v_\xi \in L(F,l_n^\infty)$ est défini par $v_\xi(y) = (\langle y,\xi_i \rangle)$.)

c) $\qquad R_{p,q}(v^*) \leq C$.

d) $\qquad \forall\, \alpha \in]0,1[, \quad R_{p,q,\alpha}(v^*) \leq C\, \alpha^{-1/p}$.

e) $\qquad \exists\, \alpha_o \in]0,1[, \quad R_{p,q,\alpha_o}(v^*) \leq C\, \alpha_o^{-1/p}$

a') Pour tout espace quasi normé G, et pour tout opérateur linéaire w λ_q-sommant de F dans G :

$$\pi_p(w \circ v) \leq C\, \alpha_o^{-1/p} \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} \pi\, \lambda_q(w).$$

On a les implications : a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a').

Démonstration : a) $\Rightarrow$ b) est évident, compte tenu de $\pi\, \lambda_q(v_\xi) \leq (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q}$ (cf. exposé X). Montrons que b) $\Rightarrow$ c). Soient u un opérateur linéaire p-approximable de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, λ la probabilité cylindrique sur E représentée par u, et (λ_j) un filtre de probabilités à support fini sur E, convergeant cylindriquement vers λ et tel que :

$$\forall\, j, \qquad \|\lambda_j\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^* = \|u\| .$$

D'après b), on aura pour chaque j :

$$\|v_\xi \circ v(\lambda_j)\|_p \leq \pi_p(v_\xi \circ v)\, \|\lambda_j\|_p^* \leq C\, \|u\|\, (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

Puisque l_n^∞ est de dimension finie, les $(v_\xi \circ v(\lambda_j))$ convergent étroitement vers $v_\xi \circ v(\lambda)$, et on obtient à la limite :

$$\|v_\xi \circ v(\lambda)\|_p \leq C\, \|u\|\, (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

Par ailleurs, $v_\xi \circ v(\lambda)$ coïncide avec l'image de μ par $\omega \to (u\, v^*(\xi_1)(\omega), \ldots, u\, v^*(\xi_n)(\omega))$, donc :

$$\left(\int \sup_i |u \circ v^*(\xi_i)(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} = \|v_\xi \circ v(\lambda)\|_p \leq C\, \|u\|\, (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q},$$

ce qui démontre b) ⇒ c). L'implication c) ⇒ d) résulte simplement de l'inégalité :

$$J_\alpha(f,\mu) \leq \alpha^{-1/p} \|f\|_{L^p(\mu)} ,$$

et d) ⇒ e) est trivial.

Montrons pour finir que e) ⇒ a'). Soient G un espace quasi normé et w un opérateur linéaire λ_q-sommant de F dans G. Soit, d'autre part, λ une probabilité à support fini sur E, et soit u un opérateur linéaire de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ qui représente λ. L'opérateur u est évidemment p-approximable.

Considérons $\nu = v(\lambda)$, probabilité à support fini, représentée par $u \circ v^*$. D'après e), la définition de $R_{p,q,\alpha_o}(v^*)$ et d'après le théorème de Nikishin (exposé IV), il existe une partie $\Omega' \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega - \Omega') \leq \alpha_o$, et que :

$$\forall\, \xi \in F', \qquad \Lambda_q(u\, v^*(\xi)\chi_{\Omega'}, \mu) \leq C\, \alpha_o^{-1/p}\, \|u\|\, \|\xi\| .$$

L'opérateur u' de F' dans $L^p(\Omega', \chi_{\Omega'}\mu)$ obtenu par restriction de $u \circ v^*$ définit une mesure à support fini ν' sur F, telle que :

$$\Lambda_q^*(\nu') \leq C\, \alpha_o^{-1/p}\, \|u\|,$$

donc :

$$\Lambda_q(w(\nu')) \leq C\, \alpha_o^{-1/p}\, \|u\|\, \pi_{\lambda_q}(w) = C\, \alpha_o^{-1/p}\, \|\lambda\|_p^*\, \pi_{\lambda_q}(w) .$$

Finalement, on a pour tout $R \geq 0$:

$$\lambda\{x \in E ; \|w \circ v(x)\| > R\} \leq \alpha_o + \nu'\{y \in F ; \|w(y)\| > R\}$$

$$\leq \alpha_o + \left(\frac{1}{R}\, C\, \alpha_o^{-1/p}\, \pi_{\lambda_q}(w)\, \|\lambda\|_p^*\right)^q .$$

En posant $R_o = \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} C\, \alpha_o^{-1/p}\, \pi\, \lambda_q(w)\, \|\lambda\|_p^*$, on obtient :

$$\lambda\, \{x \in E ;\ \|w \circ v(x)\| > R_o\} \leq \alpha_o + \frac{1-\alpha_o}{2} = \frac{1+\alpha_o}{2},$$

soit encore :

$$J_{(1+\alpha_o)/2}\,(w \circ v(\lambda)) \leq C\, \alpha_o^{-1/p} \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} \pi\, \lambda_q(w)\, \|\lambda\|_p^*,$$

pour toute λ à support fini sur E, ce qui implique d'après le lemme de l'exposé X :

$$\pi_p(w \circ v) \leq C\, \alpha_o^{-1/p} \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} \pi\, \lambda_q(w),$$

et e) $\Rightarrow$ a') est démontré.

Proposition 2 : Soient E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F et $q \geq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur v^* vérifie $R_{p,q}$ pour un $p < 1$.

b) Pour tout p tel que $0 \leq p < 1$, v^* vérifie $R_{p,q}$.

Démonstration : Soit $p \in]0,1[$. Il suffit de montrer que $R_{p,q}$ implique $R_{0,q}$. Soient u un opérateur linéaire 0-approximable de E' dans un espace $L^0(\Omega,\ldots)$, et $\alpha \in]0,1[$.

D'après le théorème 2, exposé IV (plus exactement, d'après la démonstration de ce théorème), on sait que :

il existe $\beta \in]0,1[$ (par exemple $\beta = \alpha/8$) tel que pour tout opérateur linéaire continu u_1 de E' dans $L^0(\Omega,\mu)$, il existe $\Omega' \subset \Omega$, avec $\mu(\Omega - \Omega') \leq \alpha/2$, et :

$$\forall\, \xi \in E', \qquad \Lambda_1(u_1(\xi)\, \chi_{\Omega'}, \mu) \leq J_\beta(u_1)\, \|\xi\|,$$

où l'on a posé : $J_\beta(u_1) = \sup\{J_\beta(u(\xi),\mu) ;\ \|\xi\| \leq 1\}$.

Puisque u est O-approximable, on peut trouver un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur E, convergeant cylindriquement vers λ, et tel que :

$$\forall\, j\,, \qquad J_\beta^*(\lambda_j) \;\leq\; J_\beta^*(\lambda)\ .$$

Soit u_j un opérateur de E' dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$ représentant λ_j. On peut trouver $\Omega' \subset \Omega$, $\mu(\Omega - \Omega') \leq \alpha/2$, et :

$$\begin{aligned} \Lambda_1(u_j(\xi)\ \chi_{\Omega'},\mu) \;&\leq\; J_\beta(u_j)\ \|\xi\| \\ &=\; J_\beta^*(\lambda_j)\ \|\xi\| \\ &\leq\; J_\beta^*(\lambda)\ \|\xi\|\ . \end{aligned}$$

Désignons par λ_j' la mesure à support fini associée à l'opérateur u_j', restriction de u_j à Ω'. Puisque $p \in]0,1[$, il existe une constante C(p,1) telle que :

$$\|\lambda_j\|_p \;\leq\; C(p,1)\ \Lambda_1^*(\lambda_j) \;\leq\; C(p,1)\ J_\beta^*(\lambda)\ .$$

Soit $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ une suite finie d'éléments de F'. Puisque v^* vérifie $R_{p,q}$, on a :

$$\pi_p(v_\xi \circ v) \;\leq\; C\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q}\ ,$$

donc :

$$\begin{aligned} \|v_\xi \circ v(\lambda_j')\|_p \;&\leq\; C\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q}\ \|\lambda_j'\|_p \\ &\leq\; C.\ C(p,1)\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q}\ J_\beta^*(\lambda)\ . \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \lambda_j\{x \in E\ ;\ \|v_\xi \circ v(x)\| > R\} \;&\leq\; \alpha/2 + \lambda_j'\ \{x \in E\ ;\ \|v_\xi \circ v(x)\| > R\} \\ &\leq\; \alpha/2 + \left(\frac{1}{R}\ C.\ C(p,1)\ J_\beta^*(\lambda)\ (\Sigma\|\xi_i\|^q)^{1/q}\right)^p \end{aligned}$$

En posant :

$$R_o = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/p} C.C(p,1)\ J_\beta^*(\lambda)\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q}\ ,$$

on obtient :

$$J_\alpha\ (v_\xi \circ v(\lambda_j)) \ \leq\ R_o\ ,$$

d'où puisque $(v_\xi \circ v(\lambda_j))$ converge étroitement vers $v_\xi \circ v(\lambda)$:

$$J_\alpha\ (v_\xi \circ v(\lambda)) \ \leq\ R\ .$$

On en déduit, puisque $v_\xi \circ v(\lambda)$ coïncide avec l'image de μ par $\omega \to (u\ v^*(\xi_i)(\omega))_{i=1,\ldots,n}$:

$$J_\alpha\ (\sup_i\ |u\ v^*(\xi_i)(\omega)|,\ d\mu(\omega) \leq C\ (\tfrac{\alpha}{2})^{-1/p}\ C(p,1)\ J_\beta(u)\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q},$$

ce qui achève la démonstration, d'après le théorème de Nikishin, exposé IV.

Remarque 3 : D'après l'exposé IV, théorème 2, on sait que si E est un espace de Banach, l'identité de E' vérifie $R_{0,1}$. On en déduit facilement, par des arguments analogues aux précédents (cf. e) $\Rightarrow$ a') dans la proposition 1) : pour tout $p \in [0,1[$, et pour tout espace quasi-normé G :

$$\Pi_p(E,G) = \Pi\Lambda_1(E,G).$$

Cela semble être une version définitive de la "conjecture (démontrée) de Pietsch", cf. ([4], exposé V, théorème 3).

Nous rappellerons maintenant la définition des opérateurs (p,r)-sommants : soient p,r tels que $0 < p \leq r < \infty$, E un espace de Banach, G un espace quasi-normé. Un opérateur linéaire continu v de E dans G est dit (p,r)-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E :

$$(\ \Sigma\ \|v(x_i)\|^r)^{1/r} \ \leq\ C\ \|(x_i)\|_p^*\ .$$ ♦

♦ Un certain nombre d'auteurs adoptent la convention inverse pour l'ordre des indices.

(Lorsque p = r, on retrouve les opérateurs p-sommants.)
On note $\pi_{p,r}(v)$ la plus petite constante C telle que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite.

Lemme 1 : Soient F un espace quasi normé, $p \geq 1$ et v un opérateur linéaire de l_n^∞ dans F. Pour que l'on ait $\pi_p(v) \leq 1$, il faut et il suffit que v admette la factorisation :

$$l_n^\infty \xrightarrow{\alpha} l_n^p \xrightarrow{v_1} F ,$$

avec $\|v_1\| \leq 1$, et où α est un opérateur diagonal, tel que $\Sigma |\alpha_i|^p \leq 1$.
En particulier, si p = 1, on a $\pi_1(v) = N_1(v)$, où $N_1(v)$ désigne la norme nucléaire de v.

Démonstration : Puisque l'on a $p \geq 1$, on peut trouver la mesure de Pietsch pour v sur les points extrêmaux de la boule unité de l_n^1, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de base $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ (exposé I, théorème 1).
On a donc $\pi_p(v) \leq 1$ si et seulement s'il existe $\mu = \Sigma \lambda_i \delta_{e_i}$, $\lambda_i \geq 0$, $\Sigma \lambda_i = 1$, telle que :

$$\forall x \in l_n^\infty , \qquad \|v(x)\| \leq \left(\int |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\mu(\xi)\right)^{1/p} = \left(\Sigma |\lambda_i^{1/p} x_i|^p\right)^{1/p} ,$$

d'où on déduit le résultat, avec $\alpha_i = \lambda_i^{1/p}$. La dernière affirmation de l'énoncé est évidente.

Lemme 2 : Soient $p, r \geq 1$, E et F deux espaces de Banach et v un opérateur linéaire continu de E dans F. On considère tous les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{v} & F \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ l_n^{p'} & \xleftarrow[\alpha]{} & l_n^\infty \end{array}$$

avec α diagonal, et n entier variable.

On a :

$$\pi_{p,r}(v) = \sup \{ Tr\ (\alpha \circ w \circ v \circ u)\ ;\ \|u\| \le 1\ ;\ \|w\| \le 1\ ;\ \Sigma\ |\alpha_i|^{r'} \le 1 \}.$$

Démonstration : Soit (e_i) la base de $l_n^{p'}$, et posons $x_i = u(e_i)$.
L'opérateur w peut s'écrire : $w(y) = (\langle y, \xi_i \rangle)_{i=1,\dots,n}$, avec $\xi_i \in F'$, et :

$$\|u\| = \|(x_i)\|_p^* \quad ; \quad \|w\| = \sup_i \|\xi_i\|$$

$$Tr\ (\alpha \circ w \circ v \circ u) = \Sigma\ \alpha_i \langle v(x_i), \xi_i \rangle .$$

On a alors :

$$\sup \{\ Tr(\alpha \circ w \circ v \circ u)\ ;\ \|w\| \le 1,\ \Sigma\ |\alpha_i|^{r'} \le 1 \} = (\Sigma\ \|v(x_i)\|^r)^{1/r},$$

ce qui donne le résultat, puisque $\pi_{p,r}(v)$ est le sup de $(\Sigma\ \|v(x_i)\|^r)^{1/r}$ lorsque $\|(x_i)\|_p^* = \|u\| \le 1$.

Théorème 1 : Soient $p,q,r \ge 1$, $1/p = 1/q + 1/r$, E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F.
On a :

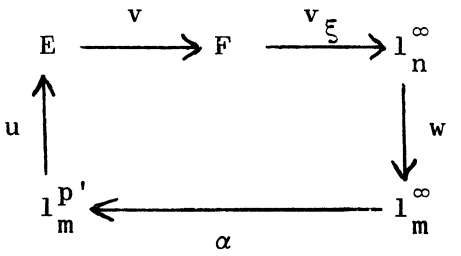
$$\pi_{p,r}(v) = R_{p,q}(v^*) \quad .\ ♦$$

Démonstration : Nous allons d'abord voir que $R_{p,q}(v^*) \le \pi_{p,r}(v)$. Nous utiliserons l'implication b) ⇒ c) de la proposition 1. Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ une suite finie d'éléments de F'. Pour montrer que $R_{p,q}(v^*) \le \pi_{p,r}(v)$, il suffit de montrer que

$$\pi_p(v_\xi \circ v) \le \pi_{p,r}(v)\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

♦ Dans l'exposé oral, j'avais montré que $\pi_{p,r}(v) \le 3^{1/p + 1/q}\ R_{p,q}(v^*)$.
Je dois l'amélioration à G. Pisier.

Pour évaluer $\pi_p(v_\xi \circ v)$, nous devons d'après le lemme 2 considérer les diagrammes :



$\|u\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$, α diagonal, $\Sigma\, |\alpha_i|^{p'} \leq 1$.

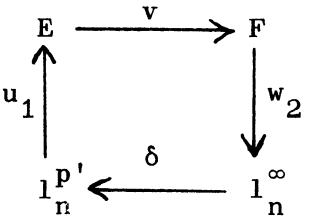
L'opérateur $\alpha \circ w$ est p'-sommant, $\pi_{p'}(\alpha \circ w) \leq 1$, donc admet d'après le lemme 1 la factorisation :

$$l_n^\infty \xrightarrow{\beta} l_n^{p'} \xrightarrow{w_1} l_m^{p'},$$

$\|w_1\| \leq 1$, β diagonal, $\Sigma\, |\beta_i|^{p'} \leq 1$.

L'opérateur v_ξ peut aussi se décomposer en : $F \xrightarrow[w_2]{} l_n^\infty \xrightarrow{\gamma} l_n^\infty$,

$\|w_2\| \leq 1$, $\gamma_i = \|\xi_i\|$, ce qui permet de transformer le diagramme :



$\|u_1\| \leq 1$, $\|w_2\| \leq 1$, $\delta_i = \beta_i\, \gamma_i$, donc : $(1/r' = 1/q + 1/p')$:

$$\Sigma\, |\delta_i|^{r'} \leq (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q}.$$

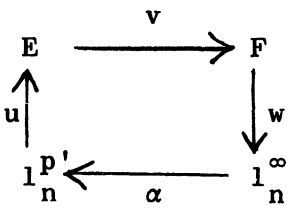
On en déduit :

$$\mathrm{Tr}(\delta \circ w_2 \circ v \circ u_1) = \mathrm{Tr}(\alpha \circ w \circ v_\xi \circ v \circ u) \leq \pi_{p,r}(v)\, (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

ce qui démontre la première inégalité.

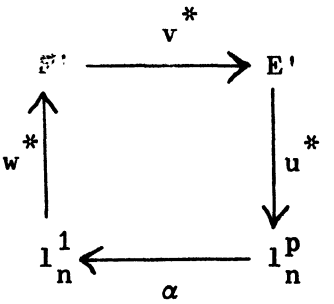
Montrons maintenant que $\pi_{p,r}(v) \leq R_{p,q}(v^*)$.

Pour cela, nous devons majorer la trace des diagrammes de la forme :



$\|u\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$, α diagonal, $\sum |\alpha_i|^{r'} \leq 1$.

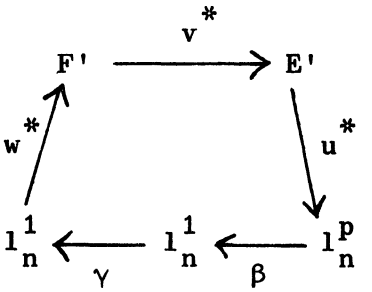
La trace est égale à celle du diagramme transposé:



Puisque $1/r' = 1/q + 1/p'$, on peut écrire :

$$\alpha_i = \beta_i \gamma_i, \quad \sum |\beta_i|^{p'} \leq 1, \quad \sum |\gamma_i|^q \leq 1,$$

d'où la décomposition :



Soit (e_i) la base de l_n^1, et posons : $\xi_i = w^* \circ \gamma (e_i)$.

On aura :

$$\sum \|\xi_i\|^q \leq 1 .$$

Par ailleurs, la trace du diagramme est égale à :

$$\Sigma\, \beta_i \;<\; u^*\, v^*\, (\xi_i),\, e_i \,> .$$

D'après la remarque 2, on a :

$$\Big(\Sigma_j \sup_i \big|\, < u^*\, v^*\, (\xi_i), e_j > \big|^p\Big)^{1/p} \le R_{p,q}(v^*)\; \big(\Sigma\, \|\xi_i\|^q\big)^{1/q} .$$

Alors :

$$\Sigma\, \beta_j \,< u^*\, v^*\, (\xi_j), e_j > \;\le\; \Sigma\, |\beta_j| \sup_i \big|\, < u^*\, v^*\, (\xi_i), e_j > \big|$$

$$\le \big(\Sigma\, |\beta_j|^{p'}\big)^{1/p'} \Big(\Sigma_j \sup_i \big|< u^* v^* (\xi_i), e_j > \big|^p\Big)^{1/p}$$

$$\le R_{p,q}\,(v^*),$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 4 : J'ignore si le théorème 1 subsiste lorsque $p \in]0,1[$. Si oui, cela fournit une réponse affirmative à une question de A. Pietsch : si u est p-sommant, et v q-sommant, avec $1/p + 1/q > 1$, le composé $v \circ u$ est-il 0-sommant.

Remarque 5 : En employant la même méthode que dans l'exposé X, on peut obtenir une généralisation vectorielle du théorème 1 : si v est (p,r)-sommant de E dans F, et si u est un opérateur linéaire p-approximable de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu,G)$, G Banach quelconque, $u \circ v^*$ est presque borné de F' dans $\Lambda_q(\Omega,\mu,G)$.

Nous allons appliquer le théorème 1 dans le cas de l'identité d'un espace :

Corollaire : Soient E un espace de Banach, et $q > 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Id_E est (1,q')-sommante [ce qui équivaut à dire que pour

toute suite (x_n) sommable dans E, on a $\Sigma \|x_n\|^{q'} < \infty$.]

b) $Id_{E'}$ vérifie $R_{1,q}$.

c) Pour tout espace quasi normé G, et tout $p \in [0,q[$:

$$\Pi_p(E,G) = \Pi\Lambda_q(E,G) .$$

d) $Id_{E'}$ vérifie $R_{p,q}$ pour tout $p \in [0,q[$.

Démonstration : a) $\Leftrightarrow$ b) résulte directement du théorème 1. D'après la proposition 1, (implication c) $\Rightarrow$ a')), b) implique que :

$$\forall\, G \quad , \quad \Pi_1(E,G) = \Pi\Lambda_q(E,G) .$$

Soit q_1 tel que $1 < q_1 < q$. On aura a fortiori :

$$\forall\, G, \qquad \Pi_1(E,G) = \Pi_{q_1}(E,G).$$

D'après le théorème d'extrapolation, exposé VI, théorème 3, on a alors :

$$\forall\, p \in [0,1] \ , \qquad \Pi_p(E,G) = \Pi_1(E,G),$$

et $\Pi_1(E,G) = \Pi\Lambda_q(E,G)$, ce qui démontre que b) $\Rightarrow$ c). Pour finir, il suffit de montrer que c) implique $R_{p,q}(Id_{E'}) < \infty$ pour $p > 0$, d'après la proposition 2. Cela résulte alors de la proposition 1 (implication a) $\Rightarrow$ b)). Enfin, d) $\Rightarrow$ b) est trivial.

On sait qu'il existe des opérateurs (p,r)-sommants, $p \neq r$, qui ne sont s-sommants pour aucune valeur finie de s. Il n'en est pas ainsi lorsque l'espace de départ est un espace du type $\mathcal{L}^\infty$.
(Rappelons que E est du type $\mathcal{L}^\infty$ s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout sous-espace de dimension finie E_o de E, il existe un sous-espace de dimension finie E_1 de E, contenant E_o, et tel que :

$$d(E_1, l^\infty_{\dim E_1}) \leq \lambda, \quad \text{cf. [1].})$$

Proposition 3 : Soient E un espace de Banach du type $\mathcal{L}^\infty$, et p,q,r tels que $1 \leq p < q < r < \infty$.
On a pour tout espace de Banach G :

$$\Pi_{1,q}(E,G) = \Pi_{p,q}(E,G) \subset \Pi_r(E,G).$$

Démonstration : Par une technique standard (cf. les raisonnements [1]), on se ramène à montrer que :

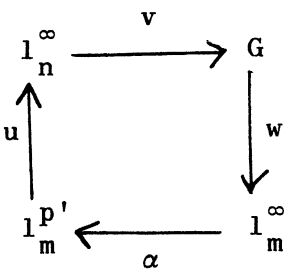
$$\pi_{p,q}(v) \leq c_1(p,q)\, \pi_{1,q}(v)$$

et

$$\pi_r(v) \leq c_2(q,r)\, \pi_{1,q}(v),$$

pour tout opérateur linéaire v de l_n^∞ (n quelconque) dans un espace de Banach G.

Soit $v \in \mathcal{L}(l_n^\infty, G)$. Pour calculer $\pi_{p,q}(v)$, nous devons majorer la trace des diagrammes :



$\|u\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$; α diagonal, $\Sigma\, |\alpha_i|^{q'} \leq 1$.

Il résulte de l'exposé XI qu'il existe une constante $C_1(p,q)$ (pour $p < q$) telle que :

$$\pi\lambda_{q'}(\alpha) \leq C_1(p,q)\, (\Sigma\, |\alpha_i|^{q'})^{1/q'} \leq C_1(p,q).$$

D'après le théorème 1, on a $R_{1,q'}(v^*) = \pi_{1,q}(v)$, donc d'après la proposition 1 (c ⇒ a'), avec $\alpha_o = 1/3$) :

$$\pi_1(\alpha \circ w \circ v) \leq 3^{1+1/q'} \pi\lambda_{q'}(\alpha \circ w).\ \pi_{1,q}(v)$$

$$\leq 3^{1+1/q'} C_1(p,q).\pi_{1,q}(v)\ .$$

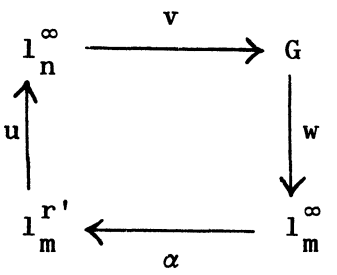
Mais d'après le lemme 1, on a $\pi_1(\alpha \circ w \circ v) = N_1(\alpha \circ w \circ v)$, donc :

$$Tr(\alpha \circ w \circ v \circ u) \leq N_1(\alpha \circ w \circ v \circ u) \leq \|u\| \, N_1(\alpha \circ w \circ v)$$

$$\leq 3^{1+1/q'} C_1(p,q) \, \pi_{1,q}(v),$$

ce qui démontre que $\pi_{p,q}(v) \leq 3^{1+1/q'} C_1(p,q) \, \pi_{1,q}(v)$.

La démonstration de la deuxième inégalité est identique : on considère un diagramme :



$\|u\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$, α diagonal, $\Sigma \, |\alpha_i|^{r'} \leq 1$,

et on raisonne comme précédemment, à partir de l'inégalité :

$$\pi\lambda_{q'}(\alpha) \leq C_2(q,r) \, (\Sigma \, |\alpha_i|^{r'})^{1/r'} .$$

On trouvera l'énoncé de quelques résultats complémentaires dans [3].

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. LINDENSTRAUSS et A. PELCZYNSKI : Studia Math t. 29 (1968) p.275 - 326.

[2] J. LINDENSTRAUSS et H. ROSENTHAL : Israel J. of Math 7 (1969) p. 325 - 349.

[3] B. MAUREY : C. R. A. S. t. 77, p. 1053 - 1055.

[4] Séminaire MAUREY-SCHWARTZ 1972 - 1973.

****