Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Assouad

Factorisation des applications Λ_p-sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 11, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A13_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

FACTORISATION DES APPLICATIONS Λ_p-SOMMANTES

par P. ASSOUAD

Exposé N° XI

23 Janvier 1974

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle que $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définies μ-presque partout, mesurables et vérifiant :

$$\sup_{y > 0} \; y^p \, \mu \{\omega \mid |f(\omega)| > y\} < \infty .$$

Le cone $\mathcal{Y}$ des fonctions de Young est l'ensemble des fonctions $\Phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ croissantes, continues et nulles à l'origine et non identiquement nulles.

Définition : On note $\mathcal{Y}_p$ le sous-cone des fonctions de Young de la forme $\Phi_\psi(x) = \int_0^\infty z^p \, 1_{x > z} \, \psi(dz)$ où ψ est une mesure de masse totale finie et non nulle sur $]0,\infty[$.

Propriétés : 1) On a $\int_0^\infty \frac{\Phi_\psi(x)}{x^{p+1}} \, dx = \frac{1}{p} \, \psi(]0,\infty[) < \infty$.

Réciproquement une fonction de Young Φ vérifiant $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} \, dx < \infty$ appartient évidemment à $\mathcal{Y}_p$.

2) Soit $\Phi \in \mathcal{Y}_p$. Alors $x \to y^p \, \Phi(\frac{x}{y})$ appartient à $\mathcal{Y}_p$ et on a :

$$\int_0^\infty \frac{y^p \Phi(\frac{x}{y})}{x^{p+1}} \, dx = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} \, dx .$$

3) Les fonctions $x \to 1 \wedge x^{q_1}$, $x \to (x^{q_2} - 1)^+$ et $x \to x^{q_1} \wedge x^{q_2}$ appartiennent à $\mathcal{Y}_p$ si $\infty \geq q_1 > p > q_2 > 0$.

4) On a :

$$\int_0^\infty y^p \, \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > y\} \, \psi(dy) = \int \Phi_\psi(|f(\omega)|) \, \mu(d\omega) .$$

Donc, pour que f appartienne à $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, il faut et il suffit que :

$$\sup \left\{ \int \Phi(|f(\omega)|) \, \mu(d\omega) \;\middle|\; \Phi \in \mathcal{Y}_p , \; \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}} \, dx \leq 1 \right\} < \infty .$$

5) Soit $\Phi \in \mathcal{Y}_p$. Pour que f appartienne à $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, il faut et il suffit que

$$\sup_{y > 0} \; y^p \int \Phi \left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty .$$

Démonstration : En effet, soit c tel que $\Phi(c) > 0$. On a :

$$\Phi(c)\, 1_{x > c} \leq \Phi(x) = \int_0^\infty z^p \, 1_{x > z} \, \nu(dz).$$

Donc

$$\frac{\Phi(c)}{c^p} (cy)^p \, \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > cy\} \leq y^p \int \Phi \left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|\right) \mu(d\omega) ,$$

cette dernière quantité valant $\int (yz)^p \, \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > yz\} \, \nu(dz)$.

6) Sous les mêmes hypothèses que 5) un critère équivalent est

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \; 2^{np} \int \Phi \left(\left|\frac{f(\omega)}{2^n}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty .$$

Démonstration : En effet, soit $y > 0$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2^n \leq y \leq 2^{n+1}$. On a donc :

$$y^p \int \Phi\left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|\right) \mu(d\omega) \leq 2^p \, 2^{np} \int \Phi \left(\left|\frac{f(\omega)}{2^n}\right|\right) \mu(d\omega) .$$

7) Soit $q_2 \leq 1$. Si $p > q_2$ la topologie de $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ peut être définie par la q_2-norme

$$\sup_{y > 0} \; y \left[\int \left(\left|\frac{f(\omega)}{y}\right|^{q_2} - 1\right)^+ \mu(d\omega)\right]^{1/p}$$

(c'est une conséquence des propriétés 3) et 5)).

8) On peut préciser la propriété 4). On a :

$$\Lambda_p = \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Y}_p} L_\Phi .$$

Démonstration : Il est clair que $\Lambda_p \subset \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Y}_p} L_\Phi$ (c'est la propriété 4)).

Par ailleurs, soit $f \in \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Y}_p} L_\Phi$. Soit ν une mesure de masse totale finie et non nulle sur $]0,\infty[$.

On pose $\psi_\nu(x) = \int_0^\infty y^p \, 1 \wedge (\frac{x}{y})^{q_1} \, \nu(dy) \qquad (q_1 > p)$.

On a $\psi_\nu \in \mathcal{Y}_p$ et $\frac{\psi_\nu(x)}{x^{q_1}}$ décroissante.

Donc $\int \psi_\nu (|f(\omega)|) \, \mu(d\omega) < \infty$.

Donc $y \to y^p \int 1 \wedge |\frac{f(\omega)}{y}|^{q_1} \, \mu(d\omega)$ est intégrable par toute mesure de masse totale finie sur $]0,\infty[$, donc est bornée sur $]0,\infty[$.

Ainsi $f \in \Lambda_p$ (propriété 5)).

Remarque : Soit $L_{p.q}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définies μ-presque partout, mesurables et vérifiant

$$\left(\int_0^\infty [y^p \, \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > y\}]^{q/p} \, \frac{dy}{y} \right)^{1/q} < \infty .$$

Λ_p n'est autre que $L_{p,\infty}$. On suppose $q \neq p$ (car $L_{p,p} = L_p$).

Soit $\mathcal{Z}_{p,q}$ le sous-cone des fonctions de Young de la forme

$$\psi_g(x) = \int_0^\infty z^p \, 1_{x > z} \, g(z) \, \frac{dz}{z}$$

où g est positif et $\int_0^\infty g(z)^{\frac{p}{q-p}} dz < \infty$.

Si $q \in]p,\infty[$, on démontre exactement comme pour $q = \infty$ que

$$L_{p,q} = \bigcap_{\Phi \in \mathcal{Z}_{p,q}} L_\Phi .$$

Si $q \in]0,p[$, on voit aisément que

$$L_{p,q} = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{Z}_{p,q}} L_\Phi .$$

Rappelons la définition des applications Λ_p-sommantes (cf.[4]). On se placera pour simplifier dans le cas d'applications entre espaces de Banach.

Définition : Soient E,F des espaces de Banach, T application linéaire $E \to F$, B boule unité de E'.
On dit que T est Λ_p-sommante si $\exists\, d > 0$ tel que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1,\dots,x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$$

$$\sup_{\xi \in B} \sup_{y>0} y^p \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{|\langle x_i,\xi\rangle| > y} \leq d \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$\Rightarrow \sup_{y>0} y^p \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > y} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,.$$

On dit que T est Λ_p-O sommante si $\forall\, b > 0 \;\; \exists\, d > 0$ tel que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1,\dots,x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$$

$$\sup_{\xi \in B} \sup_{y>0} y^p \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{|\langle x_i,\xi\rangle| > y} \leq d \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > 1} \leq b \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

(naturellement, on peut se contenter de prendre $b < 1$).

On va montrer que ces deux notions ne sont pas distinctes. Pour cela, on a le

Lemme 1 : On se donne pour toute mesure $\mu \geq 0$ à support fini sur E un nombre $M(\mu) \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} &M(\lambda\, \mu) = \lambda\, M(\mu) \qquad \forall\, \lambda \in [0,\infty[\\ &M(\mu + \delta_x) \geq M(\mu) \qquad \forall\, x \in E \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

On suppose que ($b \in]0,1[$ et $d > 0$ étant donnés)

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1,\ldots,x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$$

tels que

$$M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big) \leq d \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>1} \leq b \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,,$$

alors $\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1,\ldots,x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>1} \leq \frac{1}{d}\, M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big).$$

Si de plus, $M(h_y(\mu)) = y^p\, M(\mu) \quad \forall\, y > 0 \qquad (2)$

(h_y est l'application $x \to yx$ et $h_y(\mu)$ l'image directe de μ par h_y), alors $\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1,\ldots,x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$

$$\sup_{y>0} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>y} \leq \frac{1}{d}\, M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big)$$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>1} > b \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$\Rightarrow M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \delta_{x_i}\Big) > d \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,,$$

en particulier comme $b < 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>1})\, 1_{\|Tx_i\|>1} > b \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>1}).$$

Donc $$M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>1}\, \delta_{x_i}\Big) > d \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, 1_{\|Tx_i\|>1}.$$

Or l'hypothèse (1) donne :

$$M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \delta_{x_i}\Big) \geq M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > 1} \, \delta_{x_i}\Big),$$

c'est donc le premier résultat.
Par ailleurs (2) entraîne :

$$y^p \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > y} \leq \frac{1}{d} \, y^p \, M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \delta_{\frac{x_i}{y}}\Big) = \frac{1}{d} \, M\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \delta_{x_i}\Big).$$

<u>Corollaire</u> : T Λ_p-sommante $\Leftrightarrow$ T Λ_p-0 sommante.

<u>Démonstration</u> : $\Rightarrow$ est évident.
L'autre implication est une conséquence du lemme en remarquant que
$M : \mu \to \sup_{\xi \in B} \sup_{y>0} y^p \, \mu\{x \mid |\langle x, \xi \rangle| > y\}$ vérifie les hypothèses (1) et (2) du lemme.

On se propose maintenant d'obtenir une condition nécessaire pour que T : E $\to$ F soit Λ_p-sommante.
Le lemme précédent et les propriétés 3) et 5) permettent de traduire l'hypothèse sur T par : $\exists\, \alpha > 0$

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1, \ldots, x_m \in E \qquad \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|T x_i\| > 1} < \alpha \sup_{\xi \in B} \sup_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \theta\Big(\Big|\frac{\langle x_i, \xi \rangle}{2^n}\Big|\Big)$$

où $\theta(x) = x^{q_1} \wedge x^{q_2}$ avec $\infty > q_1 > p > q_2 > 0$.
Noter que $y^p \theta(\frac{x}{y}) \to 0$ quand $y \to 0$ et $y \to +\infty$.
On a aussi

$$\frac{1}{x^{q_1}} \, \theta\Big(\frac{x}{y}\Big) \searrow \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{q_2}} \, \theta\Big(\frac{x}{y}\Big) \nearrow \quad \text{(en x)}.$$

Proposition 1 : Soient E,F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire Λ_p-sommante.
Alors, il existe une loi de probabilité μ sur B, une fonction mesurable

$$\Phi : B \times [0,\infty[\to [0,\infty[$$
$$(\xi,x) \to \Phi(\xi,x)$$

vérifiant

$$\frac{1}{x^{q_1}} \Phi(\xi,x) \searrow \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{q_2}} \Phi(\xi,x) \nearrow \quad \text{(en x)}$$

et $$\int_B \left(\int_0^\infty \frac{\Phi(\xi,x)}{x^{p+1}} dx\right) \mu(d\xi) < \infty$$

telles que : $\forall\, x \in E$,

$$\int_B \Phi(\xi, |\langle x,\xi\rangle|)\, \mu(d\xi) \leq 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq 1 .$$

Démonstration : a) Les fonctions

$$(\xi,n) \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[\alpha\, 2^{np}\, \theta\left(\left|\frac{\langle x_i,\xi\rangle}{2^n}\right|\right) - 1_{\|Tx_i\|>1}\right]$$

forment une famille convexe de fonctions conitnues sur le compact $B \times \overline{ZZ}$ et chacune d'elles a une valeur ≥ 0.

Ce dernier point est l'hypothèse. Parailleurs, les valeurs aux points $(\xi,-\infty)$ et $(\xi,+\infty)$ sont déterminées par continuité.
La vérification de la continuité est sans difficulté.

b) Rappelons le lemme de minimax usuel dans ces questions : soit K un compact, $\mathcal{C}$ un convexe de fonctions réelles continues sur K, chacune d'elles ayant une valeur ≥ 0.
Alors il existe une loi de probabilité μ sur K qui est positive sur tous les éléments de $\mathcal{C}$.

c) Une loi de probabilité μ sur $B \times \overline{\mathbb{Z}}$ est une suite $(\mu_n)_{n \in \overline{\mathbb{Z}}}$ de mesures ≥ 0 sur B telle que $\sum_{n \in \overline{\mathbb{Z}}} \int_B \mu_n(d\xi) = 1$.

Donc, il existe des mesures ≥ 0 $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_B \mu_n(d\xi) \leq 1$

et que $\forall\, m \in \mathbb{N} \quad \forall\, x_1, \ldots, x_m \in E \quad \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, 1_{\|Tx_i\| > 1} \leq \alpha \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \int_B \theta\left(\left| \frac{\langle x_i, \xi \rangle}{2^n} \right|\right) \mu_n(d\xi).$$

On a, en particulier $\forall\, x \in E$

$$1_{\|Tx\| > 1} \leq \alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \int_B \theta\left(\left| \frac{\langle x, \xi \rangle}{2^n} \right|\right) \mu_n(d\xi).$$

Donc, $\forall\, x \in E$

$$2\alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \int_B \theta\left(\left| \frac{\langle x, \xi \rangle}{2^n} \right|\right) \mu_n(d\xi) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|Tx\| \leq 1 .$$

Soit $\mu(d\xi)$ une loi de probabilité telle que $\mu_n \ll \mu \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
On pose $2\alpha\, \mu_n(d\xi) = g(\xi, n)\, \mu(d\xi)$.
On a donc

$$\int_B \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi, n)\, \mu(d\xi) < \infty$$

et $\int_B \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np}\, \theta\left(\left| \frac{\langle x, \xi \rangle}{2^n} \right|\right) g(\xi, n)\, \mu(d\xi) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|Tx\| \leq 1 .$

On pose $\Phi(\xi, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np}\, \theta\left(\frac{x}{2^n}\right) g(\xi, n) = \int_0^{\infty} y^p\, \theta\left(\frac{x}{y}\right) \nu(dy)$

avec $\nu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi, n)\, \delta_{2^n}$.

La propriété 2) montre que $x \to \Phi(\xi, x)$ appartient à $\mathcal{Y}_p$ et

que

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(\xi,x)}{x^{p+1}}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(\xi,n) \int_0^\infty \frac{\theta(x)}{x^{p+1}}\,dx.$$

Le résultat s'ensuit.

Corollaire 1 : si $p>1$ et si $E = C(K)$, on peut supposer que μ est portée par K (identifié à une partie de la boule unité de $C'(K)$).

Démonstration : Il existe $\alpha_1,\alpha_2 > 0$ tels que

$$\sup_{\xi\in B}\sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \sum_{i=1}^m \lambda_i\, \theta\left(\left|\frac{\langle x_i,\xi\rangle}{2^n}\right|\right)$$

$$\le \alpha_1 \sup_{n\in\mathbb{Z}}\sup_{\xi\in B} 2^{np} \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\left|\frac{\langle x_i,\xi\rangle}{2^n}\right| - 1\right)^+$$

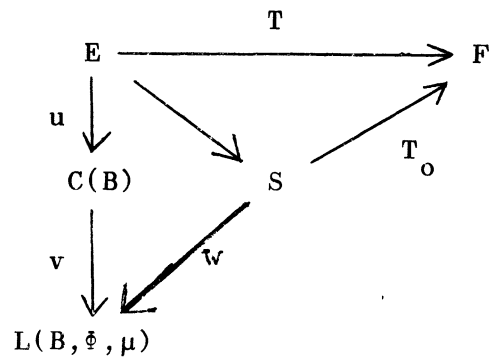
$$\left(\begin{array}{l}(\text{car } x \to (x-1)^+\\ \text{est convexe})\end{array}\right)$$

$$\le \alpha_1 \sup_{n\in\mathbb{Z}}\sup_{t\in K} 2^{np} \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\left|\frac{x_i(t)}{2^n}\right| - 1\right)^+$$

$$\le \alpha_1\alpha_2 \sup_{t\in K}\sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \sum_{i=1}^m \lambda_i\, \theta\left(\left|\frac{x_i(t)}{2^n}\right|\right).$$

Cela permet d'appliquer le lemme de minimax sur $K \times \overline{\mathbb{Z}}$ au lieu de $B \times \overline{\mathbb{Z}}$. On obtient ainsi le résultat.

Corollaire 2 : Soit $T : E \to F$ une application Λ_p-sommante.
Alors T se factorise de la façon suivante :



où u, v sont les injections naturelles, où S est un sous-espace fermé de $L(B,\Phi,\mu)$ et w son injection dans $L(B,\Phi,\mu)$, où T_o est continue, où enfin $L(B,\Phi,\mu)$ est l'espace des fonctions $f : B \to \mathbb{R}$ définies μ-presque partout, mesurables et vérifiant :

$$\exists\, a > 0 \quad \text{tel que} \quad \int_B \Phi(\xi, \left|\frac{f(\xi)}{a}\right|)\, \mu(d\xi) < \infty$$

Φ et μ étant comme dans la proposition 1.
(On dit que $L(B,\Phi,\mu)$ est un espace d'Orlicz non stationnaire).

Démonstration : immédiate .

Remarque : On aura remarqué que la démonstration de la Proposition 1 s'applique aussi bien dans les deux cas suivants (cf. [1] et [2]).

1) $T : E \to F$ où F est quasi normé et E est un e.v.t. à dual quasi normé. Dans ce cas si B est la boule unité de E', on doit baser la mesure μ sur le compact B^* fermeture de B dans $\sigma(E^*,E)$ (E^* dual algébrique de E).

2) $T : E \otimes G \to F$, E et F étant comme ci-dessus et G étant (non complété)
un espace quasi normé. Dans ce cas T est supposée (Λ_p,G)-sommante, ce qui signifie que : $\exists\, d > 0$ tel que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \qquad \forall\, x_1,\dots,x_m \in E \otimes G \qquad \forall\, \lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$$

$$\sup_{\xi \in B} \sup_{y > 0} y^p \sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\| < x_i,\xi > \|_G > y} \leq d \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

$$\Rightarrow \sup_{y > 0} y^p \sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\| T x_i \|_F > y} \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \,.$$

On voit que la démonstration reste identique quitte à remplacer partout $| < x_i,\xi > |$ par $\| < x_i,\xi > \|_G$.

Le corollaire 1) reste valable si $E = C(K)$, G espace de Banach et F quasi normé.

Le corollaire 2) reste valable dans tous les cas quitte à remplacer $L(B,\Phi,\mu)$ par $L(B,\Phi,\mu ; G)$, et $L^\infty(B,\mu)$ par $L^\infty(B,\mu ; G)$ (en fait $L^\infty(B,\mu) \otimes G$).

On a choisi dans Λ_p un module de définition "peu éloigné" de celui de L_p. On va voir une conséquence de ce choix (et étudier certains espaces d'Orlicz non stationnaires).

Proposition 2 : Soit E, F des espace de Banach, $T : E \to F$ une application Λ_p-sommante, $p > 1$.
On peut alors choisir l'espace de factorisation $L(B,\Phi,\mu)$ de façon qu'il soit un espace de Banach réflexif.

Démonstration : On choisit q_2 et q_1 de façon que $1 < q_2 < p < q_1 < \infty$.
La fonction Φ vérifie donc

$$\frac{1}{x^{q_1}} \Phi(\xi,x) \searrow \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{q_2}} \Phi(\xi,x) \nearrow \qquad \text{(en x)}$$

et

$$\int_B \left(\int_0^\infty \frac{\Phi(\xi,x)}{x^{p+1}}\, dx\right) \mu(d\xi) < \infty .$$

On va montrer que $L(B,\Phi,\mu)$ est alors un espace de Banach réflexif.
La démonstration se fait en plusieurs points :

1) $L^\infty(B,\mu) \subset L(B,\Phi,\mu)$

(noter qu'il aurait été préférable de le vérifier au corollaire 2).

Démonstration : La fonction $\psi : x \to \int_B \Phi(\xi,x)\, \mu(d\xi)$ est croissante et vérifie $\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{x^{p+1}}\, dx$. Elle est donc finie presque partout donc finie partout. Donc $L(B,\Phi,\mu)$ contient les constantes, c'est le résultat.

2) On note $L^o(B,\Phi,\mu)$ la fermeture de $L^\infty(B,\mu)$ dans $L(B,\Phi,\mu)$. On a $L^o(B,\Phi,\mu) = L(B,\Phi,\mu)$.

Démonstration : Soit $a > 0$, $b > 0$, soit $f \in L(B,\Phi,\mu)$. Il existe donc $a' > 0$ tel que $\int_B \Phi(\xi, |\frac{f(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < \infty$.

Mais comme $\frac{1}{x^{q_1}}\ \Phi(\xi,x) \searrow$, on a $\Phi(\xi,2x) \leq 2^{q_1}\ \Phi(\xi,x)$.

On peut donc supposer que $\int_B \Phi(\xi, 2\ |\frac{f(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < \infty$.

Or il existe une suite $f_n \in L^\infty(B,\mu)$ telle que :

$$f_n \to f \quad \mu \text{ p.p.} \quad \text{et} \quad |f_n| \leq |f| .$$

Par ailleurs

$$\Phi(\xi, |\frac{f(\xi) - f_n(\xi)}{a}|) \leq \Phi(\xi, 2\ |\frac{f(\xi)}{a}|) + \Phi(\xi, 2\ |\frac{f_n(\xi)}{a}|).$$

Donc, (par convergence dominée), il existe n tel que

$$\int_B \Phi(\xi, |\frac{f(\xi) - f_n(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < b .$$

C'est le résultat.
(On rappelle qu'une base de voisinage dans $L(B,\Phi,\mu)$ est la famille des

$$\{ f \mid \int_B \Phi(\xi, |\frac{f(\xi)}{a}|)\ \mu(d\xi) < b \} \qquad \forall\ a,b > 0).$$

3) Le dual de $L(B,\Phi,\mu)$ est inclus dans $L_o(B,\mu)$.

Démonstration : Le même raisonnement qu'n 2) montre que les combinaisons linéaires finies d'indicatrices sont denses dans $L(B,\Phi,\mu)$.
Soit, donc, u une forme linéaire continue sur $L(B,\Phi,\mu)$, elle est déterminée par ses valeurs sur les indicatrices.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $a,b > 0$ tels que

$$\int_A \Phi(\xi,\tfrac{1}{a})\ \mu(d\xi) \ < \ b \quad \Rightarrow \quad u(1_A) < \varepsilon \ .$$

Or $\xi \to \Phi(\xi,\frac{1}{a})$ est intégrable, donc il existe $c > 0$ tel que

$$\mu(A) < c \quad \Rightarrow \quad \int_A \Phi(\xi,\tfrac{1}{a})\ \mu(d\xi) < b \quad \Rightarrow \quad u(1_A) < \varepsilon \ .$$

donc, il existe $g \in L_o(B,\mu)$ tel que

$$u(1_A) \ = \ \int_A g(\xi) \ \ \mu(d\xi) \qquad \forall \text{ A mesurable.}$$

Le résultat suit aisément.

4) Le dual de $L(B,\Phi,\mu)$ est $L(B,\Phi^*,\mu)$ où $\Phi^*(\xi,x) = \sup\limits_{y\,>\,0} [xy - \Phi(\xi,y)]$.

<u>Démonstration</u> : On va supposer que μ est sans atome (le cas où μ a des atomes s'y ramène aisément.)
Soit g un élément du dual de $L(B,\Phi,\mu)$.
Il existe donc $b > 0$, $d > 0$ tels que $\forall\ f \in L^\infty(B,\mu)$:

$$\int_B \Phi(\xi,|f(\xi)|)\ \mu(d\xi) \ \leq \ d \quad \Rightarrow \quad \int_B |f(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi) \ \leq \ b \ .$$

Or l'ensemble des couples $(\int_B \Phi(\xi,|f(\xi)|)\ \mu(d\xi), \int_B |f(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi))$ pour $f \in L^\infty(B,\mu)$ est convexe.

Pour le voir, on prend $f_1, f_2 \in L^\infty(B,\mu)$ et on considère la mesure vectorielle

$$A \ \to \ (\int_A \Phi(\xi,|f_1(\xi)|)\ \mu(d\xi),\ \int_A \Phi(\xi,|f_2(\xi)|)\ \mu(d\xi),$$

$$\int_A |f_1(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi),\ \int_A |f_2(\xi)\ g(\xi)|\ \mu(d\xi))$$

dont l'image est convexe.

Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, f \in L^{\infty}(B,\mu)$:

$$\int_B |f(\xi)\, g(\xi)|\, \mu(d\xi) - b \leq \alpha \left[\int_B \Phi(\xi, |f(\xi)|)\, \mu(d\xi) - d\right].$$

(C'est un résultat très simple de séparation dans $\mathbb{R}^2$, cf. [3], p. 85).
Donc, $\exists\, a > 0$ tel que

$$\sup_{f \in L^{\infty}(B,\mu)} \int_B \left[\left|f(\xi)\, \frac{g(\xi)}{a}\right| - \Phi(\xi, |f(\xi)|)\right] \mu(d\xi) < \infty$$

c'est-à-dire $\int_B \Phi^*(\xi, \left|\frac{g(\xi)}{a}\right|)\, \mu(d\xi) < \infty$.

La réciproque est évidente.

5) $L^{\infty}(B,\mu) \subset L(B,\Phi^*,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que $L(B,\Phi,\mu) \subset L^1(B,\tilde{\mu})$ où $\tilde{\mu}(d\xi)$ est la mesure $\Phi(\xi,1)\, \mu(d\xi)$.

En effet, on a $\Phi(\xi,x) \geq \Phi(\xi,1)\, x^{q_1} \geq \Phi(\xi,1)x \qquad \forall\, x \geq 1$.

Donc

$$L^{\infty}(B,\tilde{\mu}) \subset L(B,\Phi^*,\mu) .$$

Or les fonctions $\xi \to \Phi(\xi,x)$ ont toutes même support et on doit supposer que c'est le support de μ. (Ce qui revient à séparer $L(B,\Phi,\mu)$).

Donc

$$L^{\infty}(B,\tilde{\mu}) = L^{\infty}(B,\mu).$$

C'est le résultat.

6) $L^{o}(B,\Phi^*,\mu) = L(B,\Phi,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : On va montrer que $\frac{\Phi^*(\xi,x)}{x^{q_2'}} \searrow$ où q_2' est l'indice conjugué de q_2. Cela entraînera alors le résultat comme en 2).

Soit donc $\lambda \geq 1$ et $x > 0$.

On a

$$\Phi^*(\xi,\lambda x) = \sup_{y > 0} [\lambda xy - \Phi(\xi,y)]$$

$$= \sup_{y > 0} xy - \Phi(\xi,\frac{y}{\lambda}) .$$

Or $\frac{\Phi(\xi,x)}{x^{q_2}} \nearrow$.

Donc

$$\Phi^*(\xi,\lambda x) \geq \sup_{y > 0} [xy - \frac{1}{\lambda^{q_2}} \Phi(\xi,y)]$$

$$= \frac{1}{\lambda^{q_2}} \sup_{y > 0} [\lambda^{q_2} xy - \Phi(\xi,y).$$

Donc

$$\Phi^*(\xi,\lambda x) \geq \frac{1}{\lambda^{q_2}} \Phi^*(\xi,\lambda^{q_2} x).$$

Posant $\lambda' = \lambda^{q_2 - 1}$ et $x' = \lambda x$, on trouve

$$\Phi^*(\xi,\lambda' x') \leq \lambda'^{q_2'} \Phi^*(\xi,x'),$$

ce qui est le résultat.

7) Le dual de $L(B,\Phi^*,\mu)$ est $L(B,\Phi,\mu)$.

Démonstration : On trouve en fait comme en 4) que le dual de $L(B,\Phi^*,\mu)$ est $L(B,\overline{\Phi},\mu)$ où $\overline{\Phi} = (\Phi^*)^*$. Il reste donc à comparer $\overline{\Phi}$ et Φ.
D'abord il est classique (et immédiat) que $\overline{\Phi}$ est la régularisée convexe (à ξ fixé) de Φ. Donc $\overline{\Phi}(\xi,x) \leq \Phi(\xi,x) \quad \forall\, x,\xi$.

Par ailleurs, on a $\frac{1}{x} \Phi(\xi,x) \nearrow$ (en x).

Posons $\Phi(\xi,x) = x\, h(\xi,x)$ avec $h(\xi,x) \nearrow$.

Donc $zh(\xi,\frac{x}{2}) \leq \frac{x}{2} h(\xi,\frac{x}{2}) + zh(\xi,z) \quad \forall\, x,z > 0.$

Posons $y = h(\xi,\frac{x}{2})$. On a donc que $\forall\, x$, $\exists\, y$ tel que $\forall\, z$:

$$xy - \frac{x}{2}\, h(\xi,\frac{x}{2}) \quad \geq \quad zy - zh(\xi,z) \ .$$

Donc $\forall\, x$, $\exists\, y$ tel que $xy - \frac{1}{2}\,\Phi(\xi,\frac{x}{2}) \geq \Phi^{*}(\xi,y)$.

Donc $\forall\, x$, on a $\overline{\Phi}(\xi,x) \geq \frac{1}{2}\,\Phi(\xi,\frac{x}{2})$.

Donc

$$L(B,\overline{\Phi},\mu) = L(B,\Phi,\mu).$$

Comme de plus $\overline{\Phi}$ est convexe, $L(B,\Phi,\mu)$ est un espace de Banach et la proposition est démontrée.

Remarques : 1) La propositon 2 permet (comme dans le cas classique des applications p-sommantes) de montrer sans hypothèse d'approximation qu'une application Λ_p-sommante de E dans F est Λ_p-radonifiante de E dans F. (Même démonstration que dans [5]).

2) Le point 2) de la démonstration de la proposition 2 montre que, si $E = C(K)$ et si $p > 1$, la factorisation du corollaire 2 de la proposition 1 se réduit à :

$$C(K) \longrightarrow L(K,\Phi,\mu) \longrightarrow F$$

puisqu'alors $C(K)$ est dense dans $L(K,\Phi,\mu)$ et donc que $S = L(K,\Phi,\mu)$.

On va maintenant rechercher des exemples d'application Λ_p-sommante et des conditions suffisantes.

Proposition 3 : Soit $\Omega,\mathcal{A},\mu$ un espace mesuré de masse totale finie. Soit Φ une fonction mesurable de $\Omega \times [0,\infty[$ dans $[0,\infty[$ vérifiant : $\forall\, \omega \in \Omega$ $\quad x \to \Phi(\omega,x)$ est un élément de $\mathcal{Y}$ et

$$\int_{\Omega} \int_{1}^{\infty} \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \ \mu(d\omega) < \infty \qquad (i).$$

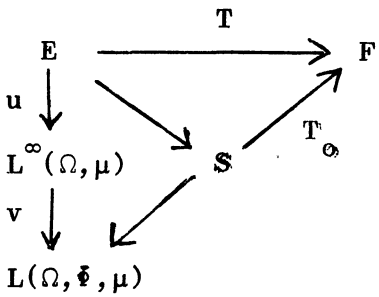
On sait qu'alors $L^\infty(\Omega,\mu) \subset L(\Omega,\Phi,\mu)$, (cela a été démontré en 1) dans la démonstration, de la proposition 2).

Soit E un e.v.t. à dual quasi normé.

Soit F un e.v.t. quasi normé.

Soit T une application linéaire $E \to F$.

On suppose que T factorise de la façon suivante :



où u est continue, v est l'injection naturelle, où S est un sous-espace fermé de $L(\Omega,\Phi,\mu)$ et w son injection dans $L(\Omega,\Phi,\mu)$, où T_o est continue.
Alors, T est Λ_p-sommante de E dans F.

<u>Démonstration</u> : 1) Il est clair qu'on peut remplacer sans changer $L(\Omega,\Phi,\mu)$ ni sortir des hypothèses la fonction $\Phi(\omega,x)$ par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(\omega,2^n)\ 1_{2^{n-1}< x \le 2^n}$.

L'hypothèse (i) devient alors

$$\int_\Omega \sum_{n \ge 0} 2^{-np}\ \Phi(\omega,2^n)\ \mu(d\omega) < \infty .$$

Soit j^{-1} l'isomorphisme d'algèbres de $C(K) \to L^\infty(\Omega,\mu)$, (K étant l'espace des caractères de $L^\infty(\Omega,\mu)$).
L'application $h \to \int_\Omega j^{-1}h(\omega)\ \mu(d\omega)$ se prolonge en une mesure $\tilde{\mu}$ sur K de même masse que μ.
j étant positif se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de $L_o(\Omega,\mu) \to L_o(K,\tilde{\mu})$ commutant avec la composition des fonctions boréliennes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et vérifiant $\int_K f(t)\ \tilde{\mu}(dt) = \int_\Omega j\ f(\omega)\ \mu(d\omega) \quad \forall\ f \ge 0$.

On pose alors $\tilde{\Phi}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} j\ \Phi(.,2^n)\ (t)\ 1_{2^n \le x < 2^{n+1}}$.

On a donc :

$$\tilde{\Phi}(t,2^n) = j\ \Phi(.,2^n)\ (t).$$

Donc

$$\int \sum_{n \geq 0} 2^{-np}\, \widetilde{\Phi}(t,2^n)\, \widetilde{\mu}(dt) \;<\; \infty\ .$$

Donc $\widetilde{\Phi}$ satisfait à (i) relativement à $\widetilde{\mu}$.

Par ailleurs,

$$\widetilde{\Phi}(t,|j\,f(t)|) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} j\,\Phi(.,2^n)(t)\; 1_{2^n \leq |j\,f(t)| < 2^{n+1}}$$

$$= j\,\Phi(.,|f(.)|)\,.$$

Donc j est une isométrie de $L(\Omega,\Phi,\mu)$ dans $L(K,\widetilde{\Phi},\widetilde{\mu})$.

On peut donc remplacer dans la factorisation $L^\infty(\Omega,\mu)$ par $C(K)$ et $L(\Omega,\Phi,\mu))$ par $L(K,\widetilde{\Phi},\widetilde{\mu})$.

C'est ce que l'on va supposer dans la suite.

2) La factorisation se traduit donc ainsi :

Il existe $b > 0$, $d > 0$ tels que $\forall\, x \in E$:

$$\int_K \widetilde{\Phi}(t,|u\,x(t)|)\,\widetilde{\mu}(dt) \;\leq\; d \;\Rightarrow\; \|Tx\| \leq b\ .$$

Donc $1_{\|Tx\| > b} \leq \frac{1}{d} \int_K \widetilde{\Phi}(t,|u\,x(t)|)\,\widetilde{\mu}(dt)$.

Posant $g(t,u) = \widetilde{\Phi}(t,2^{n+1}) - \widetilde{\Phi}(t,2^n)$, on peut écrire

$$\widetilde{\Phi}(t,x) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t,n)\; 1_{x > 2^n}\ .$$

La condition (i) se traduit par :

$$\int_K \widetilde{\Phi}(t,2^k)\;\mu(dt) < \infty \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

et $$\int \sum_{n \geq k} 2^{-np}\, g(t,u)\;\widetilde{\mu}(dt) \;<\; \infty \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\ .$$

On a donc : $\forall\, x \in E$

$$1_{\|Tx\| > b} \leq \frac{1}{d} \int_K \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-np}\, g(t,n)\; 2^{np}\, 1_{|ux(t)| > 2^n}\; \widetilde{\mu}(dt)$$

$$\leq \frac{1}{d}\left[\int_K \widetilde{\Phi}(t,2^k)\;\widetilde{\mu}(dt) + \int_K \sum_{n \geq k} 2^{-np}\, g(t,u)\; 2^{np} 1_{|ux(t)| > 2^n}\,\widetilde{\mu}(dt)\right]$$

On choisit k de façon que $\int_K \tilde{\Phi}(t,2^k)\ \tilde{\mu}(dt) < \frac{d}{2}$, et on trouve :

$$1_{\|T\,x\| > b} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{d} \int_K \sum_{n \ge k} 2^{-np}\, g(t,n)\, 2^{np}\, 1_{|u\,x(t)| > 2^n}\ \tilde{\mu}(dt) .$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_m \in E$, $\lambda_1,\dots,\lambda_m > 0$, on a donc :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T\,x_i\| > b} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \frac{1}{d} \int_K \sum_{n\ge k} \Big(\sum_{i=1}^m 2^{np}\lambda_i\, 1_{|u\,x_i(t)| > 2^n} \Big) 2^{-np} g(t,\omega)\ \tilde{\mu}(dt$$

$$\le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \frac{\alpha}{d} \sup_{t\in K} \sup_{n\ge k} \sum_{i=1}^m 2^{np}\lambda_i\, 1_{|ux_i(t)| > 2^n}$$

$(\alpha = \int \sum_{n \ge k} 2^{-np}\, g(t,n)\ \tilde{\mu}(dt))$.

Or $|ux_i(t)| = |\langle x_i, {}^t u\ \varepsilon_t \rangle|$. Posant $\beta = \|{}^t u\|$, on trouve

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{\|T\,x_i\| > b} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \frac{\alpha}{d} \sup_{\xi\in B} \sup_{y>0} y^p \sum_{i=1}^m \lambda_i\, 1_{|\beta \langle x_i, \xi\rangle| > y}$$

ce qui établit la proposition.

<u>Remarque</u> : Il est en fait inutile de supposer $\mu(\Omega) < \infty$. En effet, soit μ tel que $\mu(\Omega) = \infty$ et $\Phi : (\omega,x) \to \Phi(\omega,x)$.
Soit g tel que $\int_\Omega g(\omega)\ \mu(d\omega) < \infty$, $g > 0$ μ p s.
On pose alors $\mu_1(d\omega) = g(\omega)\ \mu(d\omega)$ et $\Phi_1(\omega,x) = \frac{1}{g(\omega)}\ \Phi(\omega,x)$,

on a alors

$$\mu_1(\Omega) < \infty\ ,\ \mu(\Omega) = \infty\ ,\quad L(\Omega,\Phi,\mu) = L(\Omega,\Phi_1,\mu_1)$$

$$\int_\Omega \Big(\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \Big)\ \mu(d\omega) = \int_\Omega \Big(\int_1^\infty \frac{\Phi_1(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \Big)\ \mu_1(d\omega) .$$

<u>Corollaire</u> : Le résultat de la proposition 3 vaut encore si on ne fait aucune hypothèse sur $\int_\Omega \Big(\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \Big)\ \mu(d\omega)$ mais que v est un opéra-

teur de multiplication par une fonction h vérifiant :

$$\int_\Omega |h(\omega)|^p \left(\int_{|h(\omega)|}^{\infty} \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \right) \mu(d\omega) < \infty$$

et $h \in L(\Omega, \Phi, \mu)$.

Démonstration : On factorise l'application $v : f \to hf$ de $L^\infty(\Omega,\mu)$ dans $L(\Omega,\Phi,\mu)$ de la façon suivante :

$$L^\infty(\Omega,\mu) \xrightarrow{v_1} \{f \mid hf \in L(\Omega,\Phi,\mu)\} = G \xrightarrow{v_2} L(\Omega,\Phi,\mu)$$

où v_1 est l'injection naturelle et v_2 la multiplication par h (qui est d'ailleurs une isométrie de G dans $L(\Omega,\Phi,\mu)$).
Posons $\Phi_1(\omega,x) = \Phi(\omega, |h(\omega)|\, x)$.
On a

$$f \in G \Leftrightarrow \exists\, a > 0 \text{ tel que } \int \Phi\left(\omega, \left|\frac{h(\omega)\, f(\omega)}{a}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \exists\, a > 0 \text{ tel que } \int \Phi_1\left(\omega, \left|\frac{f(\omega)}{a}\right|\right) \mu(d\omega) < \infty .$$

Donc $G = L(\Omega,\Phi_1,\mu)$. De plus

$$\int_\Omega \left(\int_1^\infty \frac{\Phi_1(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \right) \mu(d\omega) = \int_\Omega |h(\omega)|^p \left(\int_{|h(\omega)|}^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\, dx \right) \mu(d\omega) < \infty .$$

On est ramené aux conditions de la proposition 3.

Exemple : Soit $q \in]p,\infty]$ et $\alpha \in l_p$. Alors l'application diagonale $l^\infty \xrightarrow{\alpha} l_q$ satisfait aux conditions du corollaire et est donc Λ_p-sommante.

Démonstration : En effet, l_q peut être défini par $\Phi(x) = 1 \wedge x^q$ et $\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_i$.

On a $\Phi \in \mathcal{Y}_p$ c'est-à-dire $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}}\,dx < \infty$.

Donc $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i|^p \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x^{p+1}}\,dx < \infty$, c'est le résultat

(si $q = \infty$, $1 \wedge x^\infty = 1_{x>1}$).

Remarque : La démonstration du corollaire montre qu'en réalité :

$$\int_\Omega |h(\omega)|^p \left(\int_{|h(\omega)|}^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\,dx\right) \mu(d\omega) < \infty \Rightarrow h \in L(\Omega,\Phi,\mu).$$

Proposition 4 : Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré sans atome et soit $p > 1$. Soit $\Phi : (\omega,x) \to \Phi(\omega,x)$ telle que $x \to \Phi(\omega,x)$ appartient à $\mathcal{Y}$ $\forall\, \omega$.

On suppose que $L(\Omega,\Phi,\mu)$ est quasi normé, contient $L^\infty(\Omega,\mu)$ et que l'injection $L^\infty(\Omega,\mu) \to L(\Omega,\Phi,\mu)$ est Λ_p-sommante.

Alors $\int_\Omega \left(\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\,dx\right) \mu(d\omega) < \infty$.

Démonstration : 1) On suppose μ de masse totale = 1, (car on sait qu'on peut toujours s'y ramener).
Utilisant l'homomorphisme d'algèbre de la proposition 3, on peut supposer que $\Omega = K$ compact et remplacer L^∞ par $C(K)$.
Comme on l'a remarqué après la proposition 2, l'injection de $C(K)$ dans $L(K,\Phi,\mu)$ se factorise ainsi :

$$C(K) \xrightarrow{v_1} L(K,\Phi_1,\mu_1) \xrightarrow{v_2} L(K,\Phi,\mu)$$

v_1 est l'injection naturelle, de même que $v_2 \circ v_1$.

Donc $L(K,\Phi_1,\mu_1) \subset L(K,\Phi,\mu)$.
De plus, on a $\int_K \left(\int_0^\infty \frac{\Phi_1(t,x)}{x^{p+1}}\,dx\right) \mu_1(dt) < \infty$ et μ_1 est sans atome.

D'autre part, quitte à remplacer μ et μ_1 par $\frac{\mu+\mu_1}{2}$ et à changer Φ et Φ_1 en conséquence, on peut supposer $\mu = \mu_1$.

Il faut noter que ces changements successifs de mesure n'altèrent pas les quantités du type $\int_\Omega (\int_1^\infty \frac{\Phi(\omega,x)}{x^{p+1}}\,dx)\,\mu(d\omega)$ ni la non-atomicité.

2) On va montrer que si μ est sans atome

$$L^\infty(K,\mu) \subset L(K,\Phi_1,\mu) \in L(K,\Phi,\mu)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c \in L^1(\mu) \text{ et } a,\alpha > 0 \text{ tels que } \forall\, (t,x) \in K \times [0,\infty[$$

$$\Phi(t,x) \leq \alpha\, \Phi_1(t,\frac{x}{a}) + c(t)\ .$$

Démonstration : L'hypothèse se traduit ainsi (par le graphe fermé), il existe $a,b,d > 0$ tels que : $\forall f \in L^\infty(K,\mu)$

$$\int_K \Phi_1(t,|\frac{f(t)}{a}|)\,\mu(dt) \leq b \Rightarrow \int_K \Phi(t,|f(t)|)\,\mu(dt) \leq d\ .$$

On en tire (comme en 4) de la proposition 2) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_K [\Phi(t,|f(t)|) - \alpha\, \Phi_1(t,|\frac{f(t)}{a}|)]\,\mu(dt) \leq d - \alpha b\ .$$

On en tire (par un choix approprié de f) que :

$$c(t) = [\sup_{x>0} (\Phi(t,x) - \alpha\, \Phi_1(t,\frac{x}{a}))]^+$$

est μ-intégrable. Ce qui est le résultat.

3) On peut maintenant démontrer la proposition :

on a en effet

$$\int_K (\int_1^\infty \frac{\Phi(t,x)}{x^{p+1}}\,dx)\,\mu(dt) \leq \int_K (\int_1^\infty \frac{\Phi_1(t,\frac{x}{a})}{x^{p+1}}\,dx)\,\mu(dt) + \int_K c(t)\,\mu(dt \int_1^\infty \frac{dx}{x^{p+1}}$$

$$< +\infty\ .$$

Remarque : Dans le cas où μ est sans atome et où $p > 1$, on a donc caractérisé complètement (à l'aide aussi du corollaire) les opérateurs de multiplication par une fonction $h \in L^{\infty}_{(\Omega,\mu)} \to L(\Omega, \Sigma, \mu)$ quasi normé qui sont Λ_p-sommants.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MAUREY : Séminaire Maurey-Schwartz 1973 - 1974 (exposé 1)

[2] L. SCHWARTZ : Séminaire Maurey-Schwartz 1972 - 1973 (exposés 2 et 3).

[3] P. ASSOUAD : Applications sommantes et radonifiantes. Annales de l'Institut Fourier 1972 - tome XXII (fasc. 4).

[4] B. MAUREY : Séminaire Maurey-Schwartz 1973 - 1974 (exposé 10).

[5] L. SCHWARTZ : Séminaire Schwartz 1969 - 1970 (exposés 11 et 12).

****