Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Applications Λ_p-sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 10, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A12_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

APPLICATIONS Λ_p-SOMMANTES

par B. MAUREY

Exposé N° X

16 Janvier 1974

Si $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ est un espace mesuré (la mesure μ n'étant pas nécessairement finie) et si f est une fonction réelle μ-mesurable, nous poserons :

$$\Lambda_p(f,\mu) = \sup_{c>0} \; c\,(\mu\{|f|>c\})^{1/p} \quad , \quad p \in]0,+\infty[\quad .$$

On notera $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables réelles f telles que $\Lambda_p(f,\mu) < \infty$.

Par exemple, lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, $\mu = \Sigma\, \delta_n$, l'espace Λ_p associé est un espace de suites numériques que nous noterons λ_p. On vérifie immédiatement qu'une suite numérique (c_n) appartient à λ_p si et seulement si :

$$\sup_n \; n^{1/p} \; |c_n|^* \; < \; \infty \quad ,$$

où $|c_n|^*$ désigne la suite réarrangée décroissante associée à la suite $(|c_n|)$.

Dans tous les cas (c'est-à-dire indépendamment de la masse de μ), l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ est contenu dans $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ et $\Lambda_p(f,\mu) \leq \|f\|_{L^p}$.

Lorsque μ est une probabilité, et $p < q$, on a

$$\Lambda_q(\Omega, \mathcal{C}, \mu) \subset L^p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$$

avec plus précisément :

$$\|f\|_{L^p} \leq \left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/p} \Lambda_q(f,\mu) \quad .$$

(Au contraire, on a $\lambda_q \subset l^p$ lorsque $q < p$).

Dans la suite, nous désignerons par J(t) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$J(t) = 0 \;\text{ si }\; |t| \leq 1, \quad J(t) = 1 \;\text{ si }\; |t| > 1 \quad .$$

En utilisant J, on peut écrire :

$$\Lambda_p(f,\mu) = \sup_{c>0} c \left(\int J\left(\frac{f}{c}\right) d\mu \right)^{1/p} .$$

1. Applications Λ_p-sommantes.

Si E est un espace de Banach, (x_i) une suite d'éléments de E et $p \in]0,+\infty[$, on posera :

$$\lambda_p^*((x_i)) = \sup \left\{ c \left(\sum_i J\left(\frac{|<x_i,\xi>|}{c} \right) \right)^{1/p} ; \quad c>0, \quad \|\xi\|_{E'} \leq 1 \right\}.$$

Nous dirons que la suite est scalairement λ_p si $\lambda_p^*((x_i))$ est fini. On posera par ailleurs, si (y_i) est une suite d'éléments d'un espace quasi-normé F :

$$\lambda_p((y_i)) = \lambda_p((\|y_i\|)) .$$

Nous dirons qu'un opérateur linéaire continu u d'un espace de Banach E dans un espace quasi-normé F est λ_p-sommant, $0<p<+\infty$, s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E :

$$\lambda_p((u(x_i))) \leq C \ \lambda_p^*((x_i)).$$

La plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée sera notée $\pi\lambda_p(u)$. On notera $\prod\Lambda_p(E,F)$ l'espace des opérateurs λ_p-sommants de E dans F.

Nous allons donner un exemple simple, mais important:

Proposition 1 : Soit α un opérateur diagonal de l^∞ dans c_o, défini par une suite $\alpha \in l^p$, $0<p<\infty$.
L'opérateur α est λ_p-sommant, avec :

$$\pi\lambda_p(u) \leq \left(\sum |\alpha_i|^p \right)^{1/p} .$$

Démonstration : Soit (x_i) une suite d'éléments de l^∞. Nous noterons $x_i(n)$ la nième coordonnée de x_i, et (e_n) la base canonique de l^1 $(x_i(n) = \langle x_i, e_n \rangle)$.

Soit $c > 0$ donné. On a :

$$c^p \sum_i J\left(\frac{\|\alpha(x_i)\|}{c}\right) = c^p \operatorname{Card}\{i ; \sup_n |\alpha_n x_i(n)| > c\}$$

$$\leq c^p \sum_n \operatorname{Card}\{i ; |\alpha_n x_i(n)| > c\}$$

$$= c^p \sum_n \operatorname{Card}\{i ; |\langle x_i, e_n \rangle| > \frac{c}{|\alpha_n|}\}$$

$$\leq c^p \sum_n \left(\frac{|\alpha_n| \lambda_p^*((x_i))}{c}\right)^p$$

$$= \left(\sum_n |\alpha_n|^p\right) \left(\lambda_p^*((x_i))\right)^p ,$$

d'où le résultat.

Comme dans l'exposé n°I, on peut introduire une notion d'opérateur (λ_p, G)-sommant : si E et G sont deux espaces de Banach, et (z_i) une suite d'éléments de $E \otimes G$, on posera :

$$\lambda_{p,G}^*((z_i)) = \sup \{\lambda_p (\xi(z_i)) \; ; \; \|\xi\|_{E'} \leq 1\}$$

(noter que $\xi(z_i) \in G$).

Si u est un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans un espace quasi-normé F, on dira que u est (λ_p, G)-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite (z_i) d'éléments de $E \otimes G$:

$$\lambda_p((u(z_i))) \leq C \lambda_{p,G}^*((z_i)) ,$$

et la plus petite constante C sera notée $\pi\lambda_{p,G}(u)$.

On a par la même démonstration que précédemment :

Proposition 1 bis : Soit α un opérateur diagonal de l^∞ dans c_o, défini par une suite $\alpha \in l^p$. L'opérateur $\tilde{\alpha} = \alpha \otimes Id$ est (λ_p, G)-sommant de $l^\infty \otimes G$ dans $c_o(G)$, avec :

$$\pi\lambda_{p,G}(\tilde{\alpha}) \leq (\Sigma |\alpha_i|^p)^{1/p} .$$

On a la propriété évidente suivante : si u est (λ_p, G)-sommant de $E \otimes G$ dans F, si u_1 est un opérateur linéaire continu d'un espace de Banach E_1 dans E, et u_2 un opérateur linéaire continu de F dans un espace quasi-normé F_1, $u_2 \circ u \circ \tilde{u}_1$ (où $\tilde{u}_1 = u_1 \otimes Id$) est (λ_p, G)-sommant de $E_1 \otimes G$ dans F_1, avec $\pi\lambda_{p,G}(u_2 \circ u \circ \tilde{u}_1) \leq \|u_1\| \, \|u_2\| \, \pi\lambda_{p,G}(u)$.

Nous allons maintenant voir comment la propriété d'opérateur (λ_p, G)-sommant se traduit sur les probabilités à support fini.

Si μ est une probabilité sur un espace normé, nous poserons :

$$\Lambda_p(\mu) = \sup_{c > 0} \; c \, (\mu \{ \|x\| > c \})^{1/p}$$

Si λ est une probabilité cylindrique sur un espace de Banach E, ou λ' une probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$, (cf. exposé n°I), nous poserons :

$$\Lambda_p^*(\lambda) = \sup \{ \Lambda_p(\xi(\lambda)) \; ; \; \|\xi\|_{E'} \leq 1 \}$$

$$\Lambda_{p,G}^*(\lambda') = \sup \{ \Lambda_p(\xi(\lambda)) \; ; \; \|\xi\|_{E'} \leq 1 \} .$$

Proposition 2 : Soit u un opérateur (λ_p, G)-sommant de $E \otimes G$ dans F. On a pour toute probabilité λ à support fini sur $E \otimes G$:

$$\Lambda_p(u(\lambda)) \leq \pi\lambda_{p,G}(u) \; \Lambda_{p,G}^*(\lambda) .$$

Démonstration : En utilisant un argument de continuité, on se ramène au cas où $\lambda = \Sigma \lambda_i \delta_{z_i}$, $z_i \in E \otimes G$ et λ_i rationnel. Posons $\lambda_i = \frac{p_i}{q}$, $p_i, q \in \mathbb{N}$:

$$\Lambda_p(u(\lambda)) = \sup_{c>0} c \left(\sum_i \frac{p_i}{q} J\left(\frac{\|u(z_i)\|}{c}\right)\right)^{1/p}$$

$$= \sup_{d>0} d \left(\sum_i p_i J\left(\frac{\|u(q^{-1/p} z_i\|}{d}\right)\right)^{1/p} .$$

Si on considère la suite (y_j) dans $E \otimes G$ définie par :

$$\underbrace{q^{-1/p} z_1, \ldots, q^{-1/p} z_1}_{p_1 \text{ fois}}, \underbrace{q^{-1/p} z_2, \ldots, q^{-1/p} z_2}_{p_2 \text{ fois}}, \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on voit que :

$$\Lambda_p(u(\lambda)) = \lambda_p(u(y_j)),$$

et de même : $$\Lambda^*_{p,G}(\lambda) = \lambda^*_{p,G}(y_j)).$$

On conclut aisément.

2. Sur les égalités $\Pi\Lambda_q = \Pi_p$.

Soient E et G deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega,\mu,G)$,♦ $0 < p < \infty$. Désignons par λ la probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$ définie par u (exposé n°I, §3). Nous dirons que u est p-approximable s'il existe un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur $E \otimes G$ tel que :

1) $\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_n \in E'$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\lambda_j)$ converge vers $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\lambda)$ étroitement sur $\mathbb{R}^n \otimes G$,

2) $\forall\, j$, $\|\lambda_j\|^*_{p,G} \leq \|\lambda\|^*_{p,G} = \|u\|$ (exposé n°II, lemme 1).

♦ μ étant une probabilité.

Lorsque E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, tout opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ est p-approximable. Tout d'abord, d'après un résultat de S. Simmons, le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique au sens de ([2], exposé 5, §4). Cela permet d'approcher λ par des mesures de Radon (λ_j) sur $E \otimes G$, telles que $\|\lambda_j\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^*$ pour tout j.

On se ramène ensuite à des mesures à support fini, car le poids Λ_p vérifie la propriété de la proposition (V,5,1) de [2].

Nous utiliserons la propriété suivante, qui sera démontrée dans le prochain exposé : soient p et q tels que $0 < p < q$. Un opérateur (λ_q,G)-sommant est a fortiori (q,G)-sommant, et un opérateur (p,G)-sommant est (λ_q,G)-sommant. Symboliquement :

$$\Pi_{p,G} \subset \Pi\Lambda_{q,G} \subset \Pi_{q,G} .$$

Proposition 3 : Soient E et G deux espaces de Banach, p,q tels que $0 < p < q < \infty$, et C une constante.
Considérons les assertions :

a) Pour tout espace quasi-normé F, et pour tout opérateur v $\lambda_{q,G}$-sommant de $E \otimes G$ dans F, on a :

$$\pi_{p,G}(v) \leq C \ \pi\lambda_{q,G}(v) .$$

b) Pour toute suite $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ d'éléments de E', on a :

$$\pi_{p,G}(v_{\xi,G}) \leq C \ (\sum_i \|\xi_i\|^q)^{1/q} ,$$

où $v_{\xi,G}$ désigne l'opérateur de $E \otimes G$ dans $l_n^\infty(G)$ défini par

$$v_{\xi,G}(z) = (\langle z,\xi_i \rangle)_{i=1,\ldots,n} .$$

c) Pour tout opérateur p-approximable u de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu,G)$♦, et pour toute suite $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ d'éléments de E', on a :

♦ μ étant une probabilité.

$$\left(\int \left(\sup_i \|u(\xi_i)(\omega)\|\right)_G^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C \, \|u\| \, \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}.$$

d) Pour tout espace quasi-normé F et pour tout opérateur v $\lambda_{q,G}$-sommant de $E \otimes G$ dans F, on a :

$$\pi_{p,G}(v) \leq C \; 3^{1/p + 1/q} \; \pi\lambda_{q,G}(v).$$

On a les implications :

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d).$$

Démonstration : Notons tout d'abord qu'un opérateur $v_{\xi,G}$ admet la factorisation :

$$E \otimes G \longrightarrow l_n^\infty \otimes G \longrightarrow l_n^\infty(G)$$

où le premier opérateur est $v_{\tilde{\xi},G}$, $\tilde{\xi} = \left(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \ldots, \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}\right)$, et où le second est de la forme $\alpha \otimes Id$, α étant l'opérateur diagonal défini par la suite $(\|\xi_i\|)$.
D'après la proposition 1 bis, et la propriété d' "idéal" :

$$\pi\lambda_{q,G}(v_{\xi,G}) \leq \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q},$$

ce qui permet de vérifier immédiatement a) ⇒ b).

Montrons que b) ⇒ c). Supposons b) réalisée, et soient u un opérateur linéaire continu p-approximable de E' dans $L^p(\Omega,\mu,G)$, λ la probabilité G-cylindrique définie par u, et (λ_j) un filtre de probabilités à support fini vérifiant les propriétés 1) et 2) indiquées ci-dessus.
Soit, d'autre part, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ une suite finie d'éléments de E'.
On a pour chaque indice j :

$$\|v_{\xi,G}(\lambda_j)\|_p \leq \pi_{p,G}(v_{\xi,G}) \; \|\lambda_j\|_p^* \leq C \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q} \|\lambda\|_p^*$$
$$= C \, \|u\| \, \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Lorsque $j \to \infty$ dans le filtre, $v_{\xi,G}(\lambda_j)$ converge étroitement vers $v_{\xi,G}(\lambda)$ sur $l_n^\infty(G)$ d'après la condition 1). D'autre part, $\nu \to \|\nu\|_p$ est sci pour la topologie étroite, donc :

$$\|v_{\xi,G}(\lambda)\|_p \leq C \|u\| \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Considérons la probabilité ν sur $l_n^\infty(G)$, image de μ par $\omega \to (u(\xi_1)(\omega),\ldots,u(\xi_n)(\omega))$.
On voit facilement que $\nu = v_{\xi,G}(\lambda)$.
D'après la définition de l'image d'une probabilité G-cylindrique (exposé I, §3), $v_{\xi,G}(\lambda)$ est égale à la projection de λ sur $E/v_\xi^{-1}(0)$ (noter que $v_{\xi,G} = v_\xi \otimes \mathrm{Id}$). D'après la construction de λ à partir de u (exposé I, §3), il est clair que $\nu = v_{\xi,G}(\lambda)$. Alors :

$$\left(\int \left(\sup \|u(x_i)(\omega)\|_G\right)^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} = \|v_{\xi,G}(\lambda)\|_p \leq C \|u\| \left(\sum \|\xi_i\|^q\right)^{1/q},$$

ce qui démontre b) $\Rightarrow$ c).

Pour montrer c) $\Rightarrow$ d), nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme : Soit v un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans F, tel qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ et $\rho \geq 0$ tels que l'on ait pour toute probabilité λ à support fini sur $E \otimes G$:

$$J_\alpha(v(\lambda)) \leq \rho \|\lambda\|_{p,G}^* .$$

On a alors

$$\pi_{p,G}(v) \leq \rho .$$

Démonstration : Soit (z_i) une suite finie d'éléments de $E \otimes G$, telle que $\sum \|u(z_i)\|^p = 1$, et que $u(z_i) \neq 0$ pour chaque i (le lecteur vérifiera que cette restriction est sans importance).

Considérons la probabilité à support fini λ définie par :

$$\lambda = \sum_i \|v(z_i)\|^p \, \delta_{z_i/\|v(z_i)\|} .$$

On voit que l'image $v(\lambda)$ est portée par la sphère unité de F, donc :

$$J_\alpha(\lambda) = 1.$$

Alors :

$$(\sum \|v(z_i)\|^p)^{1/p} = J_\alpha(\lambda) \leq \rho \, \|\lambda\|^*_{p,G}$$

$$= \rho \sup_{\|\xi\| \leq 1} (\sum \|v(z_i)\|^p \, \| < \frac{z_i}{\|v(z_i)\|} , \xi > \|^p_G)^{1/p}$$

$$= \rho \, \|(z_i)\|^*_{p,G}$$

ce qui démontre le lemme.

Montrons que c) $\Rightarrow$ d). Nous utiliserons le théorème de Nikishin de l'exposé n°IV. Soit v un opérateur linéaire (λ_q, G)-sommant de $E \otimes G$ dans un espace quasi-normé F quelconque. Soit λ une probabilité à support fini sur $E \otimes G$. Représentons λ par un opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu, G)$. Cet opérateur sera trivialement p-approximable, et on aura d'après c), pour toute suite finie $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E'$:

$$J_{1/3}(\sup \|u(\xi_i)(\omega)\|_G, d\mu(\omega)) \leq 3^{1/p} (\int (\sup \|u(\xi_i)(\omega)\|_G)^p d\mu(\omega))^{1/p}$$

$$\leq C \, 3^{1/p} \, \|u\| (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

$$= C \, 3^{1/p} \, \|\lambda\|^*_{p,G} (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

D'après le théorème de Nikishin (exposé IV), il existe une partie $\Omega' \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega - \Omega') \leq 1/3$, et :

$$\forall\ \xi \in E', \quad \Lambda_q(u(\xi)\chi_{\Omega'}, \mu) \leq C\, 3^{1/p}\, \|\lambda\|^*_{p,G}\ \|\xi\| \ .$$

L'opérateur u' de E' dans $L^p(\Omega', \chi_{\Omega'}, \mu, G)$ définit une <u>mesure</u> G-cylindrique λ', de masse $\mu(\Omega')$, telle que :

$$\Lambda^*_{q,G}(\lambda') \leq C\, 3^{1/p}\, \|\lambda\|^*_{p,G},$$

et on voit immédiatement que λ' est en fait une mesure à support fini, donc d'après la proposition 2 (encore valable pour des mesures à support fini de masse quelconque) :

$$\Lambda_q(v(\lambda')) \leq \pi\lambda_{q,G}(v)\ \Lambda^*_q(\lambda') \leq C\, 3^{1/p} \pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}.$$

On aura alors, si R est une constante quelconque :

$$\lambda\ \{z \in E \otimes G\ ;\ \|v(z)\| > R\} \leq 1/3 + \lambda'\ \{z \in E \otimes G\ ;\ \|v(z)\| > R\}$$

$$\leq 1/3 + \left(\frac{1}{R}\, C\, 3^{1/p}\ \pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}\right)^q.$$

Posons $R_o = C\, 3^{1/p+1/q}\ \pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}$; on aura :

$$\lambda\ \{z \in E \otimes G\ ;\ \|v(z)\| > R_o\} \leq 2/3,$$

soit :

$$J_{2/3}(v(\lambda)) \leq C\, 3^{1/p+1/q}\ \pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}$$

ce qui implique que $\pi_{p,G}(v) \leq C\, 3^{1/p+1/q}\ \pi\lambda_{q,G}(v)$ d'après le lemme, et

achève la démonstration.

Théorème : Soient E un espace de Banach, et p,q deux nombres réels tels que $0 < p < q < \infty$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une constante C telle que l'on ait pour tout espace quasi-normé F, et pour tout opérateur linéaire v λ_q-sommant de E dans F :

$$\pi_p(v) \leq C\, \pi\lambda_q(v) .$$

b) Il existe une constante C telle que l'on ait pour tout espace de Banach G, tout espace quasi-normé F, et pour tout opérateur linéaire v (λ_q,G)-sommant de $E \otimes G$ dans F :

$$\pi_{p,G}(v) \leq \pi\lambda_{q,G}(v).$$

Démonstration : b) $\Rightarrow$ a) est trivial (prendre $G = \mathbb{R}$). Pour montrer que a) $\Rightarrow$ b), on va raisonner sur la condition b) de la proposition 3. Supposons a) réalisée, et soit $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ une suite finie d'éléments de E'. On a vu que :

$$\pi\lambda_q(v_\xi) \leq \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q},$$

donc, d'après a) :

$$\pi_p(v_\xi) \leq C \left(\sum \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Maintenant l'opérateur $v_{\xi,G}$ de $E \otimes G$ dans $l_n^\infty(G)$ est égal à $v_\xi \otimes Id$, et $l_n^\infty(G) = l_n^\infty \underset{\varepsilon}{\otimes} G$.

D'après la proposition 2, exposé n°I, on a :

$$\pi_{p,G}(v_{\xi,G}) \leq \pi_p(v_\xi) \leq C \left(\sum \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}$$

ce qui démontre le théorème d'après la proposition 3. (b ⇒ c) ⇒ d)).

Remarque : Les λ_q-sommants sont bien adaptés au théorème précédent. L'énoncé analogue pour des inégalités $\pi_p(v) \leq \pi_q(v)$ serait faux pour $q = 2$. Il reste cependant vrai pour $q < 2$, mais par un argument très indirect. C'est ce résultat qui a été utilisé dans l'exposé VI, théorème 2 :

Corollaire : Soient E un espace de Banach, et p,q tels que $0 < p < q < 2$. On suppose que $\Pi_p(E,F) = \Pi_q(E,F)$ pour tout espace quasi-normé F. Il existe une constante C telle que l'on ait pour tout espace de Banach G, tout espace quasi -normé F et tout opérateur linéaire v (q,G)-sommant de $E \otimes G$ dans F :

$$\pi_{p,G}(v) \leq C\, \pi_{q,G}(v) .$$

Démonstration : Puisque l'on a $q < 2$, il existe d'après ([1], exposé XXII, corollaire 3) un réel q' tel que $q < q' < 2$, et tel que l'on ait encore :

$$\forall F, \quad \Pi_p(E,F) = \Pi_{q'}(E,F).$$

On aura alors, a fortiori :

$$\forall F, \quad \Pi_p(E,F) = \Pi\Lambda_{q'}(E,F) \quad (\text{car } \Pi\Lambda_{q'} \subset \Pi_{q'}) .$$

Par une technique classique, on se ramène à l'énoncé de la condition a) du théorème précédent.
D'après ce théorème, il existe une constante C telle que l'on ait pour tout opérateur $(\lambda_{q'},G)$-sommant de $E \otimes G$ dans F :

$$\pi_{p,G}(v) \leq C\, \pi\lambda_{q',G}(v).$$

Pour conclure, il suffit maintenant de savoir que pour $q < q'$, il existe une constante K(q,q') telle que :

$$\pi\lambda_{q',G}(v) \leq K(q,q')\, \pi_{p,G}(v),$$

ce qui sera vu dans l'exposé suivant.

*
* *

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.

[2] Séminaire Laurent Schwartz 1969/1970.

****