Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Pisier

Une propriété du type p-stable

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A10_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

UNE PROPRIETE DU TYPE p-STABLE

par G. PISIER

Exposé N° VIII

19 Décembre 1973

Les résultats de cet exposé ont été démontrés en collaboration avec B. Maurey.

Nous allons démontrer que pour tout espace normé E, l'ensemble des p de]0,2] pour lesquels E est de type p-stable est un intervalle ouvert dans]0,2]. Compte tenu des résultats du séminaire Maurey-Schwartz 72/73, ce théorème généralise un théorème de Rosenthal sur les sous-espaces de L^p (cf. [1]).

Nous conservons les notations de l'exposé précédent ; soit E un espace normé, rappelons que R_E désigne la borne supérieure de l'ensemble des p pour lesquels E est de type p-Rademacher.

L'espace $L^2([0,1],dt\ ;\ E)$ sera noté $L^2(E)$.
(ε_n) désigne - comme d'habitude - la suite des variables de Rademacher sur $([0,1],dt)$. Soit $[\varepsilon_n]$ le sous-espace de $L^2([0,1],dt)$ linéairement engendré par les variables de Rademacher. On note $\mathcal{R}(E)$ le sous-espace $[\varepsilon_n] \otimes E$ de $L^2(E)$; un élément X de $\mathcal{R}(E)$ s'écrit de manière unique $X(t) = \sum \varepsilon_n(t)\, x_n$ où (x_n) est un élément de $E^{(\mathbb{N})}$.

Soit p dans [1,2].

Lemme 1 : Pour tout espace normé E, $\mathcal{R}(E)$ est de type p-stable si et seulement si E est de type p-stable.

Démonstration : Puisque E s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{R}(E)$ la partie "seulement"si est évidente.
Supposons que E est de type p-stable : soit r dans]0,p[, il existe une constante C telle que pour toute suite finie (x_n) dans E :

$$\left(\int \Big\| \sum f_n(t)\, x_n \Big\|^r dt\right)^{1/r} \leq C \left(\sum \|x_n\|^p\right)^{1/p} .$$

D'après les inégalités (K) de l'exposé 3, on a :

$$\forall\, X \in \mathcal{R}(E)\ ,\quad \|X\|_{L^2(E)} \leq R^1_{2,r}\, \|X\|_{L^r(E)} .$$

Soit (X_n) une suite finie dans $\mathcal{R}(E)$, on a :

$$\left(\int \|\Sigma\, X_n\, f_n(t)\|^r_{L^2(E)}\, dt\right)^{1/r} \le R^1_{2,r} \left(\int \|\Sigma\, X_n\, f_n(t)\|^r_{L^r(E)}\, dt\right)^{1/r},$$

$$\le R^1_{2,r} \left(\int \|\Sigma\, X_n(\theta)\, f_n(t)\|^r\, dt\, d\theta\right)^{1/r},$$

$$\le R^1_{2,r}\, C \left(\int \left(\Sigma\, \|X_n(\theta)\|^p\right)^{r/p} d\theta\right)^{1/r},$$

$$\le R^1_{2,r}\, C \left(\Sigma\, \|X_n\|^p_{L^p(E)}\right)^{1/p},$$

$$\le R^1_{2,r}\, C \left(\Sigma\, \|X_n\|^p_{L^2(E)}\right)^{1/p},$$

ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme 2</u> : Soit E un espace normé tel que $R_E = p$ avec $1 \le p < 2$, alors

$$\limsup_{n \to \infty} \left[\sqrt{n}\, \nu_n(E) - \sqrt{n-1}\, \nu_{n-1}(E)\right] n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}} \ge \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right).$$

<u>Démonstration</u> : Posons $\varphi(n) = \left[\sqrt{n}\, \nu_n(E) - \sqrt{n-1}\, \nu_{n-1}(E)\right] n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}$ pour tout $n \ge 2$ et $\varphi(1) = 1$. On a :

$$\sqrt{n}\, \nu_n(E) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}}.$$

Si $n \ge N$, on a :

$$\sqrt{n}\, \nu_n(E) \le \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} + \left(\sup_{m > N} \varphi(m)\right) \sum_{i=N+1}^{i=n} i^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}$$

$$\le \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} + \left(\sup_{m > N} \varphi(m)\right) \int_N^n x^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}\, dx$$

$$\le \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} + \left(\sup_{m > N} \varphi(m)\right) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} \left(n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} - N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}}\right).$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{p'}}\, \nu_n(E)\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}}} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}}}\right) + \left[\sup_{m>N} \varphi(m)\right] \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1-\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}}}$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(n) \geq \limsup_{n\to\infty} \left[n^{\frac{1}{p'}}\, \nu_n(E)\right] \times \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}\right)^{-1} .$$

Si $R_E = p$, alors (cf. lemme 4 de l'exposé précédent) $n^{\frac{1}{p'}}\, \nu_n(E) \geq 1$ pour tout entier n, d'où la conclusion du lemme :

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(n) \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{p'} = \frac{1}{p}-\frac{1}{2} .$$

Lemme 3 : Soit p tel que $1 \leq p < 2$, si E est un espace normé tel que $R_E = p$, alors il existe une suite d'entiers (m_k) tendant vers l'infini avec k et vérifiant la propriété suivante - où l'on a posé $\delta = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/p'} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$ - :

Pour tout entier k, il existe un m_k-uple $(x_1^k,\ldots,x_{m_k}^k)$ dans E tel que :

$$(1) \quad \forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{m_k}, \quad \delta \frac{\sum_{i=1}^{m_k} |\alpha_i|}{(m_k)^{\frac{1}{p'}}} \leq \left(\int \Big\| \sum_{i=1}^{i=m_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \Big\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{i=m_k} |\alpha_i| .$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, si $R_E = p$ il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) tel que

$$n_k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}} \left[\sqrt{n_k}\, \nu_{n_k}(E) - \sqrt{n_k-1}\, \nu_{n_k-1}(E)\right] > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) ,$$

soit encore

$$\sqrt{n_k}\, \nu_{n_k}(E) > \sqrt{n_k-1}\, \nu_{n_k-1}(E) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) n_k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}} ;$$

pour tout entier k, on peut donc trouver un n_k-uple $(x_1^k,\dots,x_{n_k}^k)$ vérifiant :

$$(2)\qquad \Big(\sum_{i=1}^{i=n_k} \|x_i^k\|^2\Big)^{1/2} = \sqrt{n_k}$$

et

$$(3)\qquad \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2} \geq \sqrt{n_k} \times \Big[\sqrt{n_k - 1}\, \varphi_{n_k-1}(E) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) n_k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}}\Big]$$

soit alors (α_i) dans $\mathbb{R}^{n_k}$ tel que $\sum |\alpha_i| = 1$, on a :

$$\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{n_k} \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2} \leq \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2} + \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{i=n_k} (1-|\alpha_i|)\varepsilon_i(t) x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2};$$

la borne supérieure de $\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{i=n_k} (1-t_i)\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2}$ sur l'ensemble convexe $\{(t_i) \in \mathbb{R}_+^{n_k} \mid \sum t_i = 1\}$ est atteinte sur un point extrêmal de cet ensemble, c'est-à-dire sur un point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une égale à 1 ; on peut donc écrire :

$$\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \varepsilon_i(t) x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \sup_{1\leq j\leq n_k} \Big(\int \Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{i=n_k} \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2} + \sqrt{n_k - 1}\, \varphi_{n_k-1}(E) \Big(\sum_{i=1}^{i=n_k} \|x_i^k\|^2\Big)^{1/2}$$

d'où, d'après (2) et (3) :

$$\Big(\int \Big\|\sum \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big) \frac{1}{n_k^{1/p'}},$$

soit par homogénéité :

$$(4)\quad \forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{n_k}\ ,\qquad \Big(\int \Big\| \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \Big\|^2\, dt\Big)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\Big)\, \frac{\sum_{i=1}^{n_k} |\alpha_i|}{(n_k)^{1/p'}}\ .$$

Mais, si $\sum_{i=1}^{i=n_k} \|x_i^k\|^2 = n_k$, alors, en posant $B_k = \{i \mid 1 \leq i \leq n_k\ \|x_i^k\| \leq 2\}$, nécessairement le cardinal de B_k - noté $|B_k|$ - est supérieur à $\frac{3n}{4}$ puisque trivialement :

$$4(n_k - |B_k|) \leq n_k\ .$$

Supposons - pour simplifier les notations - que :

$$B_k = \{1,\ldots,m_k\} \quad \text{avec} \quad m_k = |B_k|\ ;$$

(4) devient alors :

$$\Big(\frac{3}{4}\Big)^{\frac{1}{p'}} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\Big)\, \frac{\sum_{i=1}^{m_k} |\alpha_i|}{(m_k)^{1/p'}} \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\Big)\, \frac{\sum_{i=1}^{i=m_k} |\alpha_i|}{(n_k)^{1/p'}} \leq \Big(\int \Big\| \sum_{i=1}^{i=m_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \Big\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \sum_{i=1}^{i=m_k} |\alpha_i|\ ;$$

la conclusion du lemme découle de ce dernier résultat puisque m_k tend vers l'infini avec k.

<u>Théorème 1</u> : Soit p dans l'intervalle $[1,2[$. Tout espace normé de type p-stable est de type $(p+\varepsilon)$-stable pour un certain ε dans $]0,2-p]$.

Nous supposerons que E est de type p-stable mais que $R_E = p$; (ce qui équivaut - d'après le corollaire 1 et la proposition 3 de l'exposé 3 - à supposer que $\forall\, \varepsilon \in\,]0,2-p]$, E n'est pas de type $(p+\varepsilon)$-stable) et nous allons aboutir à une contradiction.

a Dans le cas $p = 1$, le lemme 3 signifie que $\mathcal{R}(E)$ contient des l^1_n uniformément, donc (cf. proposition 5 de l'exposé précédent) que $\mathcal{R}(E)$ n'est pas de type 1-stable, donc (cf. lemme 1) que E n'est pas de type 1-stable, ce qui est une contradiction.

b Supposons $1 < p < 2$. Puisque l'on suppose que $R_E = p$, on peut appliquer le lemme 3 (dont nous conservons les notations) : soit $\mathcal{R}_k$ le sous-espace de $\mathcal{R}(E)$ engendré par $(\varepsilon_i(.)x_i^k)_{1\le i\le m_k}$, le lemme 3 permet de construire pour tout entier k un opérateur u_k de $\mathcal{R}_k$ dans $l^1_{m_k}$ en posant :

$$u_k\Big(\sum_{i=1}^{i=m_k} \alpha_i\ \varepsilon_i(.)x_i^k\Big) = (\alpha_i)_{1\le i\le m_k} \in l^1_{m_k} \quad .$$

On a :

$$\begin{cases} \|u_k\| \le \dfrac{(m_k)^{1/p'}}{\delta} \\ \|u_k^{-1}\| \le 1 \quad . \end{cases}$$

Puisque par hypothèse E est de type p-stable, $\mathcal{R}(E)$ est de type p-stable d'après le lemme 1 ; donc les sous-espaces $(\mathcal{R}_k)$ de $\mathcal{R}(E)$ sont "uniformément" de type p-stable, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que :

Pour tout entier k, pour toute suite finie (Y_n) dans $\mathcal{R}_k$, on a :

$$\int \|\Sigma\ f_n(t)\ Y_n\|\,dt \le C\ (\Sigma\ \|Y_n\|^p)^{1/p} \quad \blacklozenge$$

où (f_n) est une suite stable d'ordre p telle que $\int |f_1(t)|\,dt = 1$.

On en déduit alors, d'après la propriété des suites stables :

Pour tout entier k ,pour toute suite finie Y_n dans $\mathcal{R}_k$,

---

$\blacklozenge$ où l'on a noté $\|.\|$ la norme de $\mathcal{R}(E)$.

$$\frac{\delta}{m_k^{1/p'}} \sum_{i=1}^{i=m_k} \Big(\sum_n |u_k(Y_n)(i)|^p\Big)^{1/p} \le \frac{\delta}{m_k^{1/p'}} \|u_k\| \int \|\sum f_n(t)\, Y_n\|\, dt$$

$$\le C \Big(\sum \|Y_n\|^p\Big)^{1/p} .$$

D'après les théorèmes de factorisation (cf. [2], exposé XV, théorème 1), cette dernière inégalité assure l'existence, pour tout k, d'une suite (β_i) dans $\mathbb{R}^{m_k}$ ♦♦ vérifiant :

$$(5) \qquad \Big(\sum_{i=1}^{m_k} |\beta_i|^{p'}\Big)^{1/p'} \le 1$$

et

$$(6) \quad \forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{m_k},\ \frac{\delta}{C m_k^{1/p'}} \Big(\sum_{i=1}^{i=m_k} \Big|\frac{\alpha_i}{\beta_i}\Big|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{i=m_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\Big\|^2 dt\Big)^{1/2} .$$

On pose $D = \frac{\delta}{C}$, soit d réel suffisamment grand pour que

$$d > D \qquad \text{et} \qquad \frac{d^{p'} - 1}{d^{p'} - D^{p'}} > \frac{1}{2} .$$

On pose, pour tout entier k :

$$A_k = \Big\{ i \in \{1, \ldots, m_k\} \ \Big|\ |\beta_i| \le \frac{d}{m_k^{1/p'}} \Big\} .$$

Puisque $\sup_{1 \le i \le m_k} \|x_i^k\| \le 1$, la relation (6) entraîne :

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, m_k\},\ |\beta_i| \ge \frac{D}{m_k^{1/p'}} ;$$

♦♦ La suite (β_i) dépend de k, nous ne le notons pas pour alléger l'écriture.

et (5) entraîne alors (en notant $|A_k|$ le cardinal de A_k) :

$$(m_k - |A_k|)\ \frac{d^{p'}}{m_k} + |A_k|\ \frac{D^{p'}}{m_k} \leq 1 \ ,$$

soit :

$$(7) \qquad \frac{|A_k|}{m_k} \geq \frac{d^{p'} - 1}{d^{p'} - D^{p'}} > \frac{1}{2} \ .$$

De la relation (6), on déduit en particulier :

$$\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{|A_k|}\ ,\ \frac{D}{m_k^{1/p'}} \left(\sum_{i \in A_k} \left|\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int \Big\| \sum_{i \in A_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \Big\|^2 dt \right)^{1/2} ;$$

mais puisque $\frac{1}{|\beta_i|} \geq \frac{m_k^{1/p'}}{d}$ quand i est dans A_k, on a fortiori :

$$\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{|A_k|}\ ,\ \frac{D}{d} \left(\sum_{i \in A_k} |\alpha_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int \Big\| \sum_{i \in A_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \Big\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sum_{i \in A_k} |\alpha_i| \ .$$

Comme - d'après (7) - $|A_k|$ tend vers l'infini avec k, ce dernier résultat permet d'appliquer à $\mathcal{R}(E)$ la proposition 5 de l'exposé précédent et de conclure que $\mathcal{R}(E)$ n'est pas de type p-stable.

On en déduit finalement (cf. lemme 1) que E n'est pas de type p-stable, ce qui est enfin la contradiction annoncée.

Remarque : Le théorème précédent généralise un résultat de Rosenthal [1] : si $0 < p < 2$, tout sous-espace de L^p ne contenant pas l^p se plonge dans $L^{p+\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. En effet, d'après les résultats de Kadec et Pelczynski (voir [2], exposé XVII, proposition 4), un sous-espace de L^p est de type p-stable si et seulement si il ne contient pas l^p ; de plus, un sous-espace de L^p se plonge dans $L^{p+\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$ si et seulement si il est de type $(p+\varepsilon)$-stable pour un certain $\varepsilon > 0$ (cette dernière affirmation résulte des théorèmes de factorisation, voir [2], exposé XV, théorème 1).

La démonstration précédente n'utilise pas le lemme de Rosenthal, néanmoins on peut grâce à ce lemme démontrer le :

Théorème 2 : Soit E un espace normé tel que $R_E = p$ avec $1 < p < 2$. Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que pour tout entier n il existe un n-uple $X_1,..,X_n$ dans $\mathcal{R}(E)$ vérifiant :

$$(8)\quad \forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n,\quad \delta\Big(\sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \Big\|_{\mathcal{R}(E)} \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| .$$

Démonstration (rapide) : Le lemme 3 permet de construire une suite d'opérateurs (u_k) comme dans la démonstration précédente.

Alors (nous employons les notations de [2], exposé XXI) :

. ou bien $\sup_k \dfrac{C_{1,p}(u_k)}{\|u_k\|} < \infty$; dans ce cas, la démonstration précédente s'applique et permet de conclure.

. ou bien $\sup_k \dfrac{C_{1,p}(u_k)}{\|u_k\|} = \infty$ et dans ce cas, le lemme de Rosenthal ([2], exposé XXI) nous permet de conclure.

Remarque 2 : La démonstration du théorème précédent permet de montrer de manière analogue que :

si E est un espace normé vérifiant la propriété :

Il existe une constante δ et une suite d'entiers m_k tendant vers l'infini avec k tels que :

$\forall\, k \in \mathbb{N}$, il existe un m_k-uple $(x_i)_{1 \leq i \leq m_k}$ satisfaisant à

$$\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{m_k},\quad \frac{\delta \sum |\alpha_i|}{(m_k)^{1/p'}} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i x_i \Big\| \leq \sum |\alpha_i| ,$$

alors E vérifie en fait :

$\mathcal{P}(p)$ { Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, il existe un n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E tel que :

$$\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad (1-\varepsilon)\, (\Sigma\, |\alpha_i|^p)^{1/p} \leq \| \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\, x_i \| \leq \Sigma\, |\alpha_i| \ .$$

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.P. ROSENTHAL : On subspaces of L^p . Annals of Math. Vol 97. $n^o 2$ p.343-373 (1973).

[2] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973.

****