NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON AUTONNE

Sur une différentielle exacte

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15 (1896), p. 232-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__232_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[C1a] SUR UNE DIFFÉRENTIELLE EXACTE;

PAR M. LÉON AUTONNE,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon.

Les candidats à la Licence usent rarement des ressources qu'offrent, dans beaucoup de cas, les coordonnées homogènes dans l'espace. Cela m'engage à insérer l'exercice ci-dessous, lequel n'a, d'ailleurs, aucune prétention à la haute science.

Connaissant la position d'un point dans l'espace, on possède, non ses quatre coordonnées homogènes

$$x_j (j = 1, 2, 3, 4),$$

mais seulement leurs rapports. Pour fixer les valeurs absolues, on pose

$$(o) \qquad \varepsilon = \sum_j e_j x_j = 1, \qquad e_j = \text{const. arbitr.}$$

Alors les points du plan e, $e=0$, ont leurs coordonnées infinies. Ce plan joue le rôle du plan de l'infini avec les coordonnées ordinaires. Conservons au plan e son nom de *plan de l'infini;* les droites de e sont les *droites à l'infini.* Chaque plan possède une droite à l'infini.

Seulement alors une même expression

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

s'écrit d'une infinité de façons différentes, car les coefficients de F peuvent être considérés comme des fonctions arbitraires de la quantité e, laquelle est l'unité en vertu de (0). On doit donc, en toute généralité, écrire pour la dérivée partielle

$$(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial e} e_j, \qquad \frac{\partial F}{\partial e} = \text{quelconque}.$$

Voici maintenant le problème :

Sur la surface algébrique S

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

f forme quaternaire, indécomposable, on envisage l'expression différentielle

$$dU = \sum A_j dx_j,$$

A_j = fraction rationnelle homogène en x_j, de degré m.

En vertu des relations (0) et (2) les quatre variables x_j se réduisent à deux distinctes u et v, que l'on n'a pas besoin de spécifier plus exactement; u et v seront, par exemple, si l'on veut, deux combinaisons linéaires homogènes, à coefficients constants, des x_j.

Exprimons que dU est la différentielle exacte d'une fonction U de u et v.

Posons j ou $k = 1, 2, 3, 4$

$$A_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k}; \qquad P_{jk} = -P_{kj} = A_{jk} - A_{kj}, \qquad p_j = \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

$$u_j = \frac{\partial x_j}{\partial u}; \qquad v_j = \frac{\partial x_j}{\partial v}; \qquad [jk] = u_j v_k - u_k v_j$$

$$(jk) = e_j p_k - e_k p_j.$$

Il viendra

$$dU = du \sum_j A_j u_j + dv \sum_j A_j v_j$$

La condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial}{\partial v} \sum_j A_j u_j = \sum_j A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial v \partial u} - \sum_j \sum_k A_{jk} u_j v_k$$

$$- \frac{\partial}{\partial u} \sum_j A_j v_j = \sum_j A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial u \partial v} \quad \sum_j \sum_k A_{jk} u_k v_j,$$

c'est-à-dire

$$\sum_j \sum_i P_{ij} [jk] = 0$$

Les $[jk]$ sont les six coordonnées homogènes de la droite qui joint les deux points de coordonnées u_j et v_j respectivement. Or

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u} - \sum_j p_j u_j = \frac{\partial e}{\partial u} = \sum_j e_j u_j,$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial v} - \sum_j p_j v_j = \frac{\partial e}{\partial v} = \sum_j e_j v_j$$

La droite est la droite à l'infini du plan tangent à la surface S et l'on a

$$\frac{[12]}{(34)} = \frac{[34]}{(12)} = \frac{[23]}{(14)} = \frac{[14]}{(23)} = \frac{[31]}{(24)} = \frac{[24]}{(31)}.$$

La condition d'intégrabilité est donc que l'expression

$$\Theta = P_{12}(34) + P_{34}(12) + P_{23}(14) + P_{14}(23) + P_{31}(24) + P_{24}(31)$$

soit divisible par f.

Exprimons que la condition ne change pas par l'effet de la formule (1), c'est-à-dire quand on remplace

$$p_j \text{ par } p_j + e_j \frac{\partial f}{\partial e}, \qquad A_{jk} \text{ par } A_{jk} + \frac{\partial A_j}{\partial e} e_k.$$

Les (jk) ne changent pas; les P_{kj} s'augmentent du terme

$$[jk]' = e_k \frac{\partial A_j}{\partial e} - e_j \frac{\partial A_k}{\partial e};$$

Θ s'augmente de l'expression

$$\begin{aligned}&(12)[34]' - (23)[14]' + (31)[24]' \\ &+ [12]'(34) + [23]'(14) + [31]'(24),\end{aligned}$$

laquelle est identique au déterminant

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e}\ e\ p\ e\right),$$

c'est-à-dire nulle.

Θ est donc un invariant vis-à-vis de la formule (1).

La condition s'interprète géométriquement. Les P_{jk} sont les six coefficients d'un complexe linéaire $\mathfrak{C}$. La condition est celle-ci : *la droite à l'infini du plan tangent à la surface* S *est située sur le complexe* $\mathfrak{C}$.

Pour revenir aux coordonnées ordinaires, posons

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = 1;\ A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_3 = C;$$

il viendra, puisque $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, $e_4 = 1$,

$$dU = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

$$\Theta = \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y},$$

ce qui se vérifie directement sans peine.

On sait que M. Em. Picard a étudié d'une façon très approfondie l'expression

$$\int (A\,dx + B\,dy + C\,dz),$$

intégrale de différentielle exacte, sur une surface algébrique.