NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. RIGOLLET

Solution du problème de mécanique rationnelle donné au concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1895

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14 (1895), p. 415-433

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__415_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1895;

PAR M. P. RIGOLLET,
Étudiant, à Nancy.

On considère un corps solide S *pesant, ayant la forme d'un cône droit dont le rayon de base est* R. *Le centre de gravité de ce corps est situé en un point* O *de l'axe de révolution du cône, à une distance* R *de la base.*

L'ellipsoïde d'inertie du corps S *relatif au centre de gravité* O *est une sphère.*

Le cône S *est mobile autour de son centre de gravité* O, *supposé fixe, et la circonférence de sa base est tangente à un plan horizontal fixe* Π *situé au-dessous du point* O *à une distance* R *de ce point.*

Étudier le mouvement du corps S *en supposant que la circonférence de base du cône glisse avec frottement sur le plan* Π.

Calculer les réactions du plan Π *et du point fixe* O.

CONDITIONS INITIALES. — *Soient* OO' *la perpendiculaire abaissée du point* O *sur le plan* Π *et* OC_0 *la*

position initiale de la perpendiculaire abaissée du point O *sur la base du cône; à l'époque* $t = 0$, *l'axe instantané de rotation est situé dans l'angle* C_0OO', *et le sens de la rotation initiale est choisi de telle sorte que le corps* S *appuie sur le plan* H.

Choix des axes. — 1° *Axes fixes dans l'espace.* — Considérons (*fig.* 2) le cône dans sa position initiale, le sommet S occupant la position S_0; prenons pour axes *fixes dans l'espace* trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, $O\zeta$ étant la verticale vers le haut, $O\xi$ passant par la position C_0 occupée, à cet instant initial $t = 0$, par le point C, centre de la base (B) du cône; $O\eta$ est sur la perpendiculaire au plan $O\xi\zeta$ dans un sens tel, qu'au début du mouvement le point C se meuve de $O\xi$ vers $O\eta$: d'après les données de l'énoncé, le quadrilatère OC_0M_0O', M_0 étant le point de contact de la base avec le plan H, est un carré ; au début du mouvement, le cône devant appuyer sur H, le point C décrira dans $O\xi\eta$ un arc de cercle (γ) dans le sens positif d'après le choix de $O\eta$. (Ce choix de $O\eta$ n'est valable qu'autant que le point C ne reste pas toujours dans le plan $O\xi\zeta$, ce qui n'aurait lieu qu'au cas où l'axe instantané serait dirigé suivant OC_0 ou suivant $O\eta$, ce qu'on ne suppose pas d'après l'énoncé.)

Nous appellerons $O'\xi'\eta'\zeta'$ les axes menés par O' parallèlement aux précédents.

2° *Axes fixes dans le corps.* — Prenons pour axe Oz l'axe situé sur l'axe de révolution dans le sens du segment OC ; pour Ox nous prendrons l'axe issu de O, qui est vertical et dirigé vers le bas au début du mouvement; Oy est alors déterminé par ce fait que $Oxyz$ et $O\xi\eta\zeta$ doivent avoir même disposition.

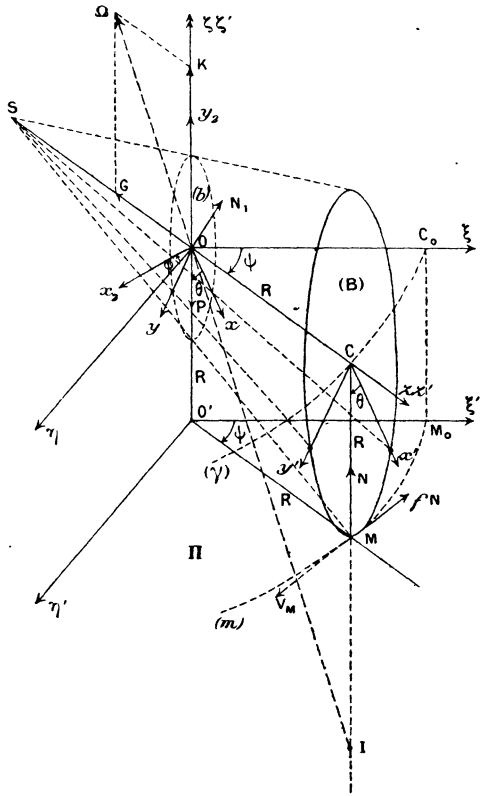
Nous appellerons $Cx'y'z'$ les axes fixes dans le corps menés parallèlement à $Oxyz$ par le point C.

Ces axes $O'\xi'\eta'\zeta'$ et $Cx'y'z'$ sont introduits dans le but de permettre plus facilement des calculs de composantes et de moments de forces.

Première remarque préliminaire. — De $t = 0$ à $t = t$, où ce dernier t est suffisamment petit, le corps restera en contact avec le plan Π, puisque au début ce cône appuie sur le plan.

Soit S (*fig.* 1) la position du cône à un instant t suf-

Fig. 1.



fisamment petit pour que le contact ait encore lieu; soit M le point d'appui; les axes $Oxyz$, $Cx'y'z'$ ont

pris des positions différentes de celles qu'ils avaient à $t = 0$; à cet instant t, la position du cône est définie par l'angle ψ de Oz avec $O\xi$, ψ étant compté dans $\xi O\eta$ et par l'angle θ de la verticale CM dirigée vers le bas avec l'axe Ox', cet angle θ étant compté dans $x'Oy'$; θ est aussi figuré dans la section circulaire (b) du cône par le plan Oxy.

Ces angles θ et ψ sont donc nos deux inconnues principales tant qu'il y a contact du cône et du plan Π.

Nos autres inconnues sont les suivantes :

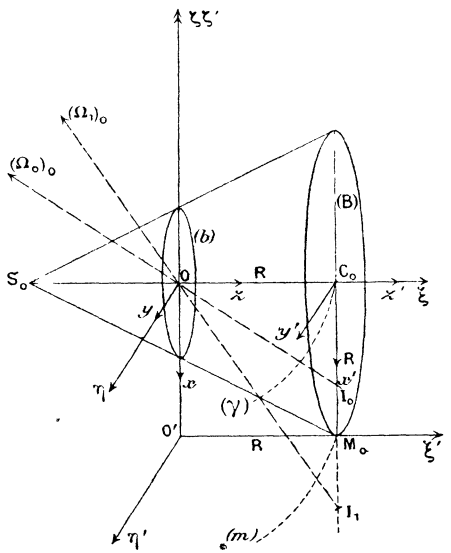
N, réaction de Π sur le cône ;

fN, force de frottement de glissement en M ;

N_1, réaction du point fixe O sur le cône.

Seconde remarque préliminaire. — Au début du

Fig. 2.

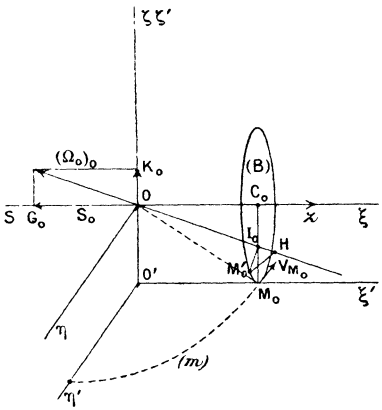


mouvement, l'axe instantané est supposé dans l'angle $\widehat{C_0OO'}$ (*fig.* 2).

Mais ici se présente une petite difficulté : cet axe peut rencontrer C_0M_0 soit en I_0 entre C_0 et M_0, soit en I_1 au-dessous de M_0 ; ce fait a une grande importance au point de vue du sens de la vitesse du point de contact et, par suite, du sens de la force de frottement au départ, comme nous allons le faire voir.

Supposons que l'axe instantané rencontre C_0M_0 en I_0 (*fig.* 3); appelons *plan du tableau* le plan $O\xi\zeta$, $O\eta_1$ étant supposé en avant de ce plan ; le point C_0 devant venir en avant de ce plan, le segment représentatif de la rotation instantanée est $O(\Omega_0)_0$ de sens contraire au segment $\overline{OI_0}$; le *point du cône* qui est en M_0 a donc une vitesse V_{M_0} située en arrière du plan du tableau ; par suite, la force de frottement est parallèle à $O'\eta_1'$ et de même sens. Dans ce cas, le corps appuie sur le plan ; menons par M_0 (*fig.* 3) le plan perpendiculaire à OI_0 ; soit H le pied de OI_0 sur ce plan ; soit M_0' le point qui viendra au contact un temps infiniment petit après M_0 ; on a, dans le cercle (B),

Fig. 3.



$$I_0M_0' > IM_0,$$

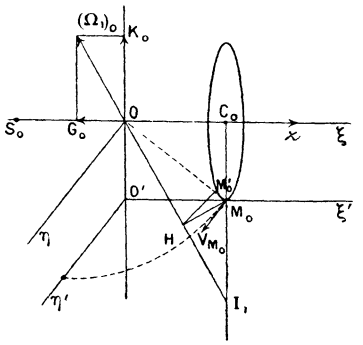
d'où, puisque I_0H est perpendiculaire au plan $HM_0M'_0$,

$$HM'_0 > HM_0 ;$$

le corps tournant autour de OI_0, les points M_0 et M'_0 tournent autour de H ; comme $HM'_0 > HM_0$, c'est que le corps appuie sur le plan II.

Supposons que l'axe instantané rencontre C_0M_0 en I_1 (*fig.* 4) ; le segment représentatif de la rotation instan-

Fig. 4.



tanée au départ est $O(\Omega_1)_0$ de sens contraire au segment OI_1 ; *le point du cône* qui est en M_0 a une vitesse V_{M_0} parallèle à $O'\tau_1'$ et de même sens ; la force de frottement est en sens contraire ; H étant le pied de OI_1 sur le plan mené par M_0 perpendiculairement à OI_1, et M'_0 étant le point qui viendra au contact après M_0, on a, de même que dans le cas précédent, l'inégalité

$$HM'_0 > HM_0 ;$$

dans ce cas aussi, le corps appuie sur le plan II.

Dans ces deux hypothèses initiales, le corps appuie donc sur le plan II ; cependant, un sentiment physique pourrait faire dire avec peu de rigueur qu'il appuie plus dans le deuxième cas que dans le premier.

Troisième remarque préliminaire. — Tant que le corps reste au contact avec le plan Π, le point M (*fig.* 1) a une vitesse tangente à la base du cône; il en résulte que l'axe instantané rencontre constamment la base du cône (B) en un point situé sur CM; cet axe est donc dans le plan OCMO'; le segment OΩ mesurant la rotation instantanée se décompose en deux autres

$$\overline{OG} = -\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{et} \qquad OK = \frac{d\psi}{dt}.$$

La figure OC_0M_0O' (*fig.* 3 et 4) étant un carré, dans le cas de la *fig.* 3, on a

$$\overline{OG_0} > \overline{OK_0},$$

et dans le cas de la *fig.* 4

$$\overline{OG_0} > \overline{OK_0};$$

si $\overline{O\Omega_0}$ était située sur OM_0, le point du corps qui est en M_0 aurait une vitesse nulle; dans ce cas, ce point ne se déplace pas; dans le cas de la *fig.* 3, la rotation autour de l'axe de révolution du cône étant plus grande que la rotation autour de Oζ, on s'explique pourquoi V_{M_0} est dirigée derrière le plan du tableau; dans le cas de la *fig.* 4, on voit de même pourquoi V_{M_0} est dirigée en avant du plan du tableau.

En résumé, nous avons à étudier deux cas qui correspondent aux conditions initiales données par les *fig.* 3 ou 4.

Nous allons étudier celui de la *fig.* 4; nous connaîtrons celui de la *fig.* 3 en changeant le coefficient de frottement f en $-f$; car, dans les deux cas, les forces de frottement de glissement sont de sens opposés, les vitesses V_{M_0} étant de sens opposés.

Pendant un certain temps, la vitesse du point M sera

dirigée dans le sens des arcs croissants sur (m) et la force de frottement en sens contraire (*fig.* 1).

Nous allons calculer

$$\theta, \quad \psi, \quad N, \quad fN$$

par plusieurs procédés.

Théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à $O\xi\eta\zeta$. — Ce théorème donne les trois équations suivantes où n'entrent ni le poids du corps, ni la réaction du point fixe O, $Ax^2 + Ay^2 + Az^2 = 1$ étant la sphère d'inertie,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(-A\frac{d\theta}{dt}\cos\psi\right) &= \quad RN\sin\psi - fNR\cos\psi,\\
\frac{d}{dt}\left(-A\frac{d\theta}{dt}\sin\psi\right) &= -RN\cos\psi - fNR\sin\psi,\\
\frac{d}{dt}\left(A\frac{d\psi}{dt}\right) &= -Rf N
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
-A\theta''\cos\psi + A\theta'\sin\psi\psi' &= \quad RN\sin\psi - fNR\cos\psi,\\
-A\theta''\sin\psi - A\theta'\cos\psi\psi' &= -RN\cos\psi - fNR\sin\psi,\\
A\psi'' &= -Rf N;
\end{aligned}$$

en multipliant les deux premières par $\cos\psi$ et $\sin\psi$ et additionnant, puis par $\sin\psi$ et $-\cos\psi$ et additionnant, on obtient le système

$$(e) \qquad \begin{cases} A\theta'' = fNR, \\ A\theta'\psi' = NR, \\ A\psi'' = -fNR. \end{cases}$$

Equations d'Euler. — Appliquons les équations d'Euler au système $Oxyz$; on a

$$\begin{aligned}
p &= -\psi'\cos\theta,\\
q &= -\psi'\sin\theta,\\
r &= -\theta'
\end{aligned}$$

obtenues en projetant

$$OG = -\theta', \qquad OK = \psi'$$

sur Ox, Oy, Oz,

$$\begin{aligned} -A\psi''\cos\theta + A\psi'\sin\theta\theta' &= NR\sin\theta + fNR\cos\theta, \\ -A\psi''\sin\theta - A\psi'\cos\theta\theta' &= -NR\cos\theta + fNR\sin\theta, \\ -A\theta'' &= -Rf N; \end{aligned}$$

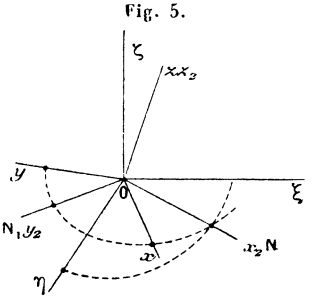
en multipliant la première par $\cos\theta$ et la deuxième par $\sin\theta$, puis additionnant, en multipliant ensuite la première par $+\sin\theta$ et la deuxième par $-\cos\theta$ et additionnant, on a

$$\begin{aligned} -A\psi'' &= fNR, \\ A\psi'\theta' &= NR, \\ A\theta'' &= fNR \end{aligned}$$

qui sont les équations (e).

Equations de M. Resal. — Considérons un système d'axes fixes $O\xi\eta\zeta$ et un système mobile $Oxyz$; les axes

Fig. 5.



de M. Resal (gyroscope) sont les axes $Ox_2y_2z_2$, Ox_2 étant la ligne des nœuds ON dans un sens déterminé, Oy_2 la ligne ON_1 faisant avec Ox_2 l'angle $+\frac{\pi}{2}$ compté dans le sens défini par Oxy; soient p_2, q_2, r_2 les quantités analogues aux p, q, r d'Euler et définissant sur $Ox_2y_2z_2$

le mouvement de ce trièdre PAR RAPPORT A $O\xi\eta\zeta$, de même que, dans les équations d'Euler, p, q, r définissent sur $Oxyz$ le mouvement de ce trièdre $Oxyz$ par rapport à $O\xi\eta\zeta$; M. Resal a établi *de même qu'on fait, pour trouver les équations d'Euler*, les équations suivantes dites *équations de M. Resal :*

$$A\frac{dp_2}{dt} - q_2(Ar_2 - Cr) = L_2,$$

$$A\frac{dq_2}{dt} + p_2(Ar_2 - Cr) = M_2,$$

$$C\frac{dr}{dt} = N,$$

qui ne sont valables que pour un corps de révolution autour de Oz; la troisième est la troisième équation d'Euler; cherchons ici nos *axes de M. Resal;* la ligne des nœuds (*fig.* 1) est la ligne d'intersection de Oxy avec $O\xi\eta$; prenons pour Ox_2 la direction qui fait l'angle ψ avec $O\eta$; Oy_2 se trouve être $O\zeta$ et Oz_2 est confondu avec Oz; on a

$$p_2 = 0,$$

$$q_2 = \frac{d\psi}{dt},$$

$$r_2 = 0,$$

$$r = -\frac{d\theta}{dt};$$

on a alors

$$-\psi'(A\theta') = -NR,$$

$$A\psi'' = -fNR,$$

$$+A\theta'' = fNR,$$

qui sont encore les équations (e).

Intégration des équations (e). — Ces équations sont

$$(e) \qquad \begin{cases} A\theta'' = fNR, \\ A\theta'\psi' = NR, \\ A\psi'' = -fNR; \end{cases}$$

la première et la troisième donnent par addition

$$\theta'' + \psi'' = 0,$$

d'où

$$\theta' + \psi' = \alpha,$$

et

$$\theta + \psi = \alpha t + \alpha',$$

α et α' étant deux constantes; on a (*fig.* 4), à l'instant $t = 0$,

$$\theta'_0 + \psi'_0 = |OG_0| + |OK_0| = \alpha,$$

qui donne α, et

$$0 + 0 = \alpha.0 + \alpha',$$

d'où

$$\alpha' = 0;$$

on a donc

$$\theta'' + \psi'' = 0,$$
$$\theta' + \psi' = \alpha,$$
$$\theta + \psi = \alpha t;$$

l'équation

$$\theta' + \psi' = \alpha$$

donne

$$\theta' = \alpha - \psi',$$

qui, avec la deuxième équation (e), donne

$$A\psi'(\alpha - \psi') = NR;$$

divisons la dernière équation (e) par celle-ci; nous avons l'équation différentielle

$$(d) \qquad \frac{\psi''}{\psi'(\alpha - \psi')} = -f,$$

qui donne ψ en fonction du temps; elle ne contient ni A, ni R, ce qui montre que le problème ne dépend ni de la densité du corps, ni du rayon R, comme on pouvait s'y attendre après une première réflexion, en remarquant que le centre de gravité est précisément le point fixe.

Intégrons (d); on peut l'écrire

$$\frac{d\psi'}{\psi'(\alpha-\psi')} = -f.dt,$$

ou, en multipliant les deux membres par α et séparant le premier en fractions simples,

$$\frac{d\psi'}{\psi'} + \frac{d\psi'}{\alpha-\psi'} = -f\alpha\, dt,$$

d'où

$$\mathrm{Log}\psi' - \mathrm{Log}(\alpha-\psi') + f\alpha t = \beta, \qquad \text{où } \beta \text{ est une constante,}$$

ou

$$\mathrm{Log}\frac{\psi'}{\alpha-\psi'} = \beta - f\alpha t,$$

équation qui permet de déterminer β; on a

$$\beta = \mathrm{Log}\frac{\psi'_0}{\alpha-\psi'_0}$$

pour $t=0$; ψ'_0 est positif d'après le choix des axes; on a

$$\alpha - \psi'_0 = 0'_0,$$

d'où

$$\beta = \mathrm{Log}\frac{\psi'_0}{0'_0},$$

$0'_0$ étant aussi positif, car

$$\overline{OG_0} = -0'_0 < 0$$

(*fig.* 4); dans le cas de la *fig.* 4, on a

$$\frac{\psi'_0}{0'_0} = \frac{\overline{OK_0}}{-\overline{OG_0}} > 1,$$

et, par suite,

$$\beta > 0;$$

on a enfin ψ' par

$$\frac{\psi'}{\alpha-\psi'} = e^{\beta - f\alpha t},$$

d où

$$(g) \qquad \psi' = \frac{\alpha e^{\beta - f\alpha t}}{1 + e^{\beta - f\alpha t}},$$

qui s'intègre par une quadrature; écrivons

$$d\psi = \frac{\alpha e^{\beta - f\alpha t}}{1 + e^{\beta - f\alpha t}}\, dt = -\frac{1}{f}\,\frac{-f\alpha e^{\beta - f\alpha t}}{1 + e^{\beta - f\alpha t}}\, dt,$$

d'où

$$(h) \qquad \psi = -\frac{1}{f}\,\mathrm{Log}(1 + e^{\beta - f\alpha t}) + \gamma$$

(γ *constante arbitraire*). γ se détermine en faisant $t = 0$; on a

$$0 = -\frac{1}{f}\,\mathrm{Log}(1 + e^{\beta}) + \gamma = -\frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\psi'_0}{\theta'_0}\right) + \gamma,$$

car

$$\beta = \mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0}{\theta'_0};$$

d'ou

$$\gamma = \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0},$$

d'où

$$\psi = -\frac{1}{f}\,\mathrm{Log}(1 + e^{\beta - f\alpha t}) + \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0},$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0}\,\frac{1}{1 + e^{\beta - f\alpha t}} \\ &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\theta'_0}\,\frac{1}{1 + \frac{\psi'_0}{\theta'_0}\,e^{-f\alpha t}} \\ &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0\, e^{-f\alpha t} + \theta'_0};\end{aligned}$$

si, au lieu de faire porter le calcul sur ψ, on l'avait fait porter sur θ, en remplaçant ψ' par $\alpha - \theta'$ au lieu de remplacer θ' par $\alpha - \psi'$, on aurait trouvé

$$\theta = -\frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0 + \theta'_0}{\psi'_0 + \theta'_0\, e^{f\alpha t}};$$

on trouve donc les deux formules

$$(i)\qquad \begin{cases} \psi = \dfrac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{\psi'_0+\theta'_0}{\psi'_0 e^{-f\alpha t}+\theta'_0}, \\ \theta = -\dfrac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{\psi'_0+\theta'_0}{\psi'_0+\theta'_0 e^{f\alpha t}}, \end{cases}$$

où

$$\alpha = \psi'_0 + \theta'_0,$$

ψ'_0 et θ'_0 étant, je le répète, deux nombres positifs, valeurs absolues des grandeurs des segments $\overline{OK_0}$ et $\overline{OG_0}$ à l'instant $t = 0$; si l'on ajoute membre à membre ces deux équations, on doit retrouver

$$\theta + \psi = \alpha t;$$

on a, en effet,

$$\begin{aligned} \theta + \psi &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0+\theta'_0}{\psi'_0 e^{-f\alpha t}+\theta'_0}\,\frac{\psi'_0+\theta'_0 e^{f\alpha t}}{\psi'_0+\theta'_0} \\ &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,\frac{\psi'_0+\theta'_0 e^{f\alpha t}}{\psi'_0+\theta'_0 e^{f\alpha t}}\,e^{f\alpha t} \\ &= \frac{1}{f}\,\mathrm{Log}\,e^{f\alpha t} = \frac{1}{f} f\alpha t = \alpha t. \end{aligned}$$

Ces deux formules montrent que quand t croît à partir de $t = 0$, ψ et θ augmentent; dans ψ le Log est positif, tandis qu'il est négatif dans θ.

La formule (g) qui donne ψ' et l'analogue pour θ', qui peuvent s'écrire

$$(k)\qquad \begin{cases} \psi' = \dfrac{\alpha}{e^{f\alpha t-\beta}+1}, \\ \theta' = \dfrac{\alpha}{e^{-f\alpha t+\beta}+1}, \end{cases}$$

montrent que ψ' et θ' sont positifs; on voit que ψ' décroît avec t, tandis que θ' croît; du reste, $\theta' + \varphi'$ est égal à une constante α; ainsi donc, en valeur absolue (*fig.* 1), $\overline{OG}$ croît et $\overline{OK}$ décroît; le point I se rapproche donc de M d'un mouvement continu. Au moment où I sera

en M, la vitesse de M sera nulle et par suite il n'y aura plus de frottement; à ce moment, on aura

$$\overline{OK} = -\overline{OG},$$

ou

$$\psi' = \theta';$$

du reste, si l'on cherche la vitesse du point du corps qui est en M, on a

$$V_M = R\psi' - R\theta' = R(\psi' - \theta');$$

elle s'annule pour

$$\psi' = \theta';$$

comme on a

$$\psi' + \theta' = \alpha,$$

la vitesse de M s'annulera pour

$$\psi' = \theta' = \frac{\alpha}{2};$$

l'instant T correspondant est donné par $\psi' = \frac{\alpha}{2}$ ou $\theta' = \frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire, en prenant $\psi' = \frac{\alpha}{2}$, par

$$\frac{\alpha e^{\beta - f\alpha T}}{1 + e^{\beta - f\alpha T}} = \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$2e^{\beta - f\alpha T} = 1 + e^{\beta - f\alpha T},$$

d'où

$$e^{\beta - f\alpha T} = 1,$$

d'où

$$\beta - f\alpha T = 0,$$

ou

$$T = \frac{\beta}{f\alpha}.$$

A partir de ce moment, nous allons chercher si la vitesse du point du corps qui est en M_1 reste constam-

ment nulle ; en cet instant, on a

$$\theta_T = -\frac{1}{f}\operatorname{Log}\frac{\psi'_0+\theta'_0}{\psi'_0+\theta'_0 e^{\beta}} = -\frac{1}{f}\operatorname{Log}\frac{\psi'_0+\theta'_0}{2\psi'_0}$$

et

$$\psi_T = \frac{1}{f}\operatorname{Log}\frac{\psi'_0+\theta'_0}{\psi'_0 e^{\beta}+\theta'_0} = \frac{1}{f}\operatorname{Log}\frac{\theta'_0+\psi'_0}{2\theta'_0}.$$

Auparavant, remarquons que le problème résultant des conditions initiales données par la *fig.* 3 serait absolument le même que le précédent, à cette différence près que la vitesse du point de contact serait en sens contraire et, par suite, aussi la force de frottement ; on déduira donc les résultats relatifs à la *fig.* 3 de ceux que nous venons de trouver pour la *fig.* 4, en changeant f en $-f$; comme $\frac{\psi'_0}{\theta'_0} < 1$ dans ce nouveau cas,

$$\beta = \operatorname{Log}\frac{\psi'_0}{\theta'_0}$$

est négatif, et pour le temps T où la vitesse du point du corps qui est au contact devient nulle, donné par

$$T = -\frac{\beta}{f\alpha},$$

on a encore au deuxième membre une quantité positive, car $\alpha = \psi'_0 + \theta'_0 > 0$, puisqu'on a $\psi'_0 > 0$ et $\theta'_0 > 0$, d'après le choix des axes.

Nous avons donc ainsi, par un même calcul, traité les deux cas des *fig.* 3 et 4 ; dans ces deux cas, le point de rencontre de l'axe instantané avec la verticale MC du point de contact se rapproche constamment de ce point de contact.

Le cas intermédiaire serait celui où l'on aurait $\psi'_0 = \theta'_0$; au début l'axe instantané serait $\overline{OM_0}$; la vitesse du point de contact serait nulle ; on serait, dès le

début du mouvement, dans le cas qui se présente à l'instant T ; c'est un cas limite des deux précédents ; ainsi prenons, dans le calcul fait pour ces deux cas, la valeur de T ; si $\dot{\psi}'_0 = \theta'_0$, on a

$$\beta = \mathrm{Log}\,1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad T = 0.$$

Etude du mouvement à partir du temps T. — Il est clair qu'à partir du temps T le point du cône qui est au contact avec le plan Π aura une vitesse nulle ; supposons, en effet, que cette vitesse cesse d'être nulle ; il naît alors une force de frottement qui, si petite qu'elle soit, d'après l'étude des cas relatifs aux *fig.* 3 et 4, tend à rendre nulle la vitesse du point du cône qui est au contact.

Nous nous trouvons donc, à partir du temps T, en face d'un nouveau problème dans lequel la base du cône roule sans glisser sur le plan ; au début de ce nouveau mouvement, on a

$$\dot{\psi}'_T = \theta'_T = \frac{\alpha}{2} = \frac{\dot{\psi}'_0 + \theta'_0}{2}.$$

Les équations de ce nouveau problème peuvent se déduire de celles du précédent en faisant $f = 0$, car il n'y a plus de frottement de glissement (le frottement de roulement est négligé) ; les équations (e) deviennent

$$(m) \qquad \begin{cases} A\dot{\psi}'\theta' = NR, \\ A\dot{\psi}'' = 0, \\ A\theta'' = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\theta = \theta'_T . t + \theta_T \qquad \text{et} \qquad \dot{\psi} = \dot{\psi}'_T . t + \dot{\psi}_T,$$

avec

$$\theta' = \theta'_T = \frac{\theta'_0 + \dot{\psi}'_0}{2}, \qquad \dot{\psi}' = \dot{\psi}'_T = \frac{\theta'_0 + \dot{\psi}'_0}{2};$$

rappelons qu'on a trouvé

$$\theta_T = -\frac{1}{f}\log\frac{\psi'_0+\theta'_0}{2\psi'_0}, \qquad \psi_T = +\frac{1}{f}\log\frac{\theta'_0+\psi'_0}{2\theta'_0},$$

formules valables pour le cas (*4*); pour (3) on change f en $-f$.

A partir de T donc, le cône roule jusqu'à $t=\infty$ d'un mouvement uniforme, puisque ψ' et θ' sont constants; ceci s'explique par ce fait qu'on a négligé le frottement de roulement et qu'aucune force ne produit du travail; pour $t=\infty$, θ et ψ sont infinis.

Calcul des réactions. — 1° *Réaction* N. — Avant le temps T, N est donnée par exemple par la deuxième équation (*e*); on a

$$N = \frac{A\theta'\psi'}{R} = \frac{A}{R}\cdot\frac{\alpha.e^{\beta-f\alpha t}}{1+e^{\beta-f\alpha t}}\cdot\frac{\alpha.e^{-\beta+f\alpha t}}{1+e^{-\beta+f\alpha t}} = \frac{\alpha^2 e^{-\beta+f\alpha t}}{(1+e^{-\beta+f\alpha t})^2}\frac{A}{R};$$

à l'instant T, elle a pour valeur

$$N_T = \frac{\alpha^2\,1}{(1+1)^2}\cdot\frac{A}{R} = \frac{A\alpha^2}{R\,4} = \left(\frac{\theta'_0+\psi'_0}{2}\right)^2\frac{A}{R} = \frac{A}{R}(\theta'_T)^2 = (\psi'_T)^2\frac{A}{R}.$$

A partir de T, N est donnée par la même formule $N=\frac{A\psi'\theta'}{R}$, d'après les équations (*m*); on a donc, à partir de T,

$$N' = \frac{A}{R}\frac{\alpha^2}{4} = \frac{A}{R}\left(\frac{\theta'_0+\psi'_0}{2}\right)^2 = \frac{A}{R}\cdot\theta'^2_T = \frac{A}{R}\cdot\psi'^2_T;$$

N' a ainsi plusieurs expressions.

2° *Réaction* N_1. — Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité : ce centre O est fixe; on a donc (*fig.* 1), avant T, a, b, c étant les cosinus directeurs de N_1,

$$\left|\begin{array}{l} 0 = \quad f N\sin\psi + N_1\cos a,\\ 0 = -f N\cos\psi + N_1\cos b,\\ 0 = \qquad\qquad + N_1\cos c - P + N, \end{array}\right.$$

qui donnent N_1, a, b, c en utilisant

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Après T, on a

$$\left| \begin{array}{l} 0 = N_1 \cos a, \\ 0 = N_1 \cos b, \\ 0 = N_1 \cos c - P + N', \end{array} \right.$$

d'où

$$a = \frac{\pi}{2}, \qquad b = \frac{\pi}{2}, \qquad c = 0;$$

on a

$$N_1 = P - N' = P - \frac{A}{R}\left(\frac{\theta'_0 + \psi'_0}{2}\right)^2;$$

cette réaction, qui a une valeur constante, est dirigée verticalement vers le haut si $P > N'$, vers le bas si $P < N'$, comme le montre la troisième formule : elle est nulle si $P = N'$.