NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GOURSAT

Sur une application de la formule de multiplication des arcs

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14 (1895), p. 245-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__245_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE MULTIPLICATION DES ARCS;

PAR M. E. GOURSAT.

1. La formule qui donne cos ma en fonction de cos a permet de déterminer tous les arcs, commensurables avec la circonférence, pour lesquels $\cos^2 a$ est égal à un nombre rationnel. On trouve par là même tous ceux de ces arcs dont une des lignes trigonométriques est commensurable.

La formule qui donne cos ma en fonction de cos a, m étant un nombre entier positif, peut s'écrire

$$(1)\quad \begin{cases} 2\cos ma = (2\cos a)^m - A_m^1 (2\cos a)^{m-2} + A_m^2 (2\cos a)^{m-4} \\ \qquad + (-1)^q A_m^q (2\cos a)^{m-2q} + \dots; \end{cases}$$

le second membre est un polynome entier, de degré m par rapport à $2\cos a$, ne contenant que des termes dont le degré est de même parité que m, et tous les coefficients $A_m^1, A_m^2, \dots, A_m^q, \dots$ sont *des nombres entiers*. La loi se vérifie pour les premières valeurs de m

$$\begin{aligned} 2\cos 2a &= (2\cos a)^2 - 2, \\ 2\cos 3a &= (2\cos a)^3 - 3(2\cos a), \\ 2\cos 4a &= (2\cos a)^4 - 4(2\cos a)^2 + 2, \\ 2\cos 5a &= (2\cos a)^5 - 5(2\cos a)^3 + 5(2\cos a), \\ &\dots\dots\dots

un nombre pair positif tel que $2pa$ soit un multiple de π. Remplaçons m par $2p$ dans la formule (1); on a $\cos 2pa = \pm 2$, et la formule (1) devient

$$(2)\qquad \begin{cases} \pm 2 = (2\cos a)^{2p} - A^1_{2p}(2\cos a)^{2p-2} + \dots \\ \qquad + (-1)^q A^q_m (2\cos a)^{2p-2q} + \dots \end{cases}$$

ou, en posant

$$4\cos^2 a = x,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} f(x) = x^p - A^1_{2p} x^{p-1} + \dots \\ \qquad + (-1)^q A^q_m x^{p-q} + \dots \pm 2 = 0. \end{cases}$$

On voit donc que x est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers, le premier coefficient étant égal à l'unité. Si cette équation admet une racine commensurable, on sait que cette racine est égale à un nombre entier. Comme x est compris entre 0 et 4, les seules valeurs admissibles sont 0, 1, 2, 3, 4 et, par conséquent, les seules valeurs possibles de $\cos a$ sont :

$$0, \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \pm 1.$$

On voit qu'en se bornant au premier quadrant les seuls arcs répondant à la question sont les arcs de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

2. La question peut être généralisée. Je dirai, pour abréger, qu'un nombre x est une irrationnelle algébrique d'ordre r, lorsque x est racine d'une équation algébrique entière d'ordre r, irréductible, à coefficients commensurables. Proposons-nous d'obtenir tous les arcs, commensurables avec la circonférence, dont une des lignes trigonométriques est une irrationnelle d'un ordre donné. Le problème sera évidemment résolu, si l'on a obtenu tous les arcs, commensurables avec π, pour lesquels le carré du cosinus est une irrationnelle d'un ordre r donné à l'avance.

Soient donc a un arc commensurable avec π, et $2p$ un nombre entier tel que $2pa$ soit un multiple de π. Le premier membre de l'équation (3) doit admettre un diviseur de degré r, à coefficients commensurables. S'il en est ainsi, on sait, d'après un théorème dû à Gauss, que $f(x)$ doit être le produit de deux polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ à coefficients entiers, $\varphi(x)$ étant de degré r; comme le coefficient de x^p dans $f(x)$ est un, le coefficient de x^r dans $\varphi(x)$ doit aussi être égal à l'unité, et, par suite, x doit être racine d'une équation de degré r

$$\varphi(x) = x^r + \mathrm{A}x^{r-1} + \mathrm{B}x^{r-2} + \ldots + \mathrm{L} = 0,$$

dont tous les coefficients A, B, ..., L sont des nombres entiers. Comme toutes les racines de cette équation doivent être comprises entre 0 et 4, on a immédiatement une limite supérieure de chacun des coefficients A, B, C, ..., L. Il n'y a donc qu'un nombre *fini* d'arcs répondant à la question, en ne considérant pas comme distincts deux arcs qui diffèrent par un multiple de π.

Il résulte aussi de là qu'une irrationnelle donnée y ne peut être le cosinus d'un arc commensurable avec π que si $4y^2$ est racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers, le premier coefficient étant l'unité, ayant toutes ses racines positives et inférieures à 4. Par exemple, soit A un nombre rationnel, qui n'est pas égal au cube d'un autre nombre rationnel; $\sqrt[3]{\mathrm{A}}$ ne peut pas être égal au cosinus d'un arc commensurable avec π.

Proposons-nous, pour donner une application, de trouver tous les arcs commensurables avec π, pour lesquels le carré du cosinus est une irrationnelle du second degré. D'après ce qu'on vient de voir, $x = 4\cos^2 a$ doit être racine d'une équation du second degré

$$x^2 - \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

où A et B sont des nombres entiers positifs, ayant ses deux racines réelles et positives, et inférieures à 4, ce qui exige que l'on ait

$$A < 8, \quad B < 16, \quad A^2 - 4B > 0, \quad 16 + B > 4A.$$

En négligeant les équations qui admettent des racines entières, on ne trouve que quatre équations satisfaisant à ces conditions

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x^2 - 4x + 1 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x^2 - 5x + 5 = 0,$$

les seules valeurs possibles pour $\cos\alpha$ sont donc les suivantes :

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4},$$

$$\cos\alpha = +\sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Les arcs correspondants sont bien commensurables avec la circonférence. On a, en effet, en se bornant au premier quadrant,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \qquad \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \qquad \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \qquad \cos\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$