NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur une série fonctionnelle

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12 (1893), p. 419-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__419_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE SÉRIE FONCTIONNELLE;

PAR M. V. JAMET.

Soit $F(x)$ une fonction d'une variable, réelle ou non, assujettie à la condition d'être finie et continue quand x varie dans une certaine région comprenant le point x_0; de telle sorte que, dans cette région, le module de $F(x)$ ne s'élève pas au-dessus d'un nombre constant M. Considérons la fonction u_n définie comme il suit :

$$u_n = \int_{x_0}^{x} (x - z_1) F(z_1)\, dz_1 \int_{x_0}^{z_1} (z_1 - z_2) F(z_2)\, dz_2 \dots$$
$$\times \int_{x_0}^{z_{n-1}} (z_{n-1} - z_n) F(z_n) [a + b(z_n - x_0)]\, dz_n.$$

Soit μ le maximum du module de $a + b(x - x_0)$ dans la région considérée (a et b désignent des constantes). Le module de u_n est évidemment inférieur à

$$\mu M^n |x - x_0|^{2n}.$$

La dérivée de u_n par rapport à x s'obtient en remplaçant la fonction qui figure sous le premier signe $\int$ par $F(z_1)\,dz_1$; de sorte que son module est inférieur à

$$\mu M^n \,|\, x - x_0 \,|^{2n-1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mu}{x - x_0} M^n \,|\, x - x_0 \,|^{2n};$$

et la dérivée seconde de u_n, par rapport à x, est égale à

$$u_{n-1} F(x).$$

Si donc le point x est intérieur à un cercle tracé du point x_0 comme centre avec un rayon égal à $\frac{1}{\sqrt{M}}$, les séries

$$[a + b(x - x_0)] - u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$b + \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} - \ldots + \frac{du_n}{dx} - \ldots,$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2 u_n}{dx^2} - \ldots$$

seront convergentes, et chacune des deux dernières sera la dérivée de la somme de la précédente. Soit y la somme de la première. A l'intérieur du cercle que nous venons de définir, la fonction y aura une dérivée première et une dérivée seconde. D'ailleurs, nous avons établi la relation

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} = F(x).u_{n-1},$$

d'où l'on conclura la suivante :

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2 u_n}{dx^2} = F(x) \times [a + b(x - x_0) + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots - u_{n-1} - \ldots],$$

ou bien

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F(x).y. \tag{1}$$

La fonction y que nous avons formée est donc une inté-

grale de l'équation (1), égale à a, pour $x = x_0$, et dont la dérivée première se réduit à b, pour cette même valeur de x.

Pour abréger, nous avons exposé ce résultat sous forme synthétique; mais le lecteur familier avec la théorie des équations différentielles comprendra aisément que l'analyse qui nous y a conduit nous a été suggérée par la lecture du Mémoire de M. Picard sur la théorie des équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4^e série, t. VI).