NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-G. DOSTOR

Aire d'un quadrilatère quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 69-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__69_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

AIRE D'UN QUADRILATÈRE QUELCONQUE,

PAR M. J.-G. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

—

THÉORÈME. *Les côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque étant représentés par* a, b, c, d, *et ses diagonales par* m, n, *l'aire* Q *de ce quadrilatère est*

$$\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)\,(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}.$$

Démonstration. On a (*fig.* 14) :

$$Q=\frac{1}{2}m(BE+DF),$$

d'où
$$16Q^2=4m^2(BE+DF)^2. \qquad (1)$$

Cela posé, les triangles rectangles semblables BEI, DFI donnent :

$$BE : DF :: BI : DI :: EI : FI,$$

d'où

$$(BE+DF)^2 : \overline{DF}^2 :: (BI+DI)^2 : \overline{DI}^2 :: (EI+FI)^2 : \overline{FI}^2;$$

or
$$\overline{DF}^2=\overline{DI}^2-\overline{FI}^2,$$

donc

$$(BE+DF)^2=(BI+DI)^2-(EI+FI)^2=n^2-EF^2;$$

ou bien, en multipliant par $4m^2$:

$$4m^4(BE+DF)^2=4m^2n^2-4m^2\overline{EF}^2; \qquad (2)$$

on a ensuite par les triangles ABC, ACD,

$$a^2-b^2=m^2-2m\text{CE},$$
$$c^2-d^2=m^2-2m\text{AF};$$

d'où, en ajoutant

$$a^2-b^2+c^2-d^2=2m^2-2m(\text{CE}+\text{AF})=2m\overline{\text{EF}};$$

élevant au carré, il vient

$$(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4m^2\overline{\text{EF}}^2. \qquad (3)$$

Ajoutant actuellement membre à membre les égalités (1), (2) et (3), et réduisant, on obtient

$$16Q^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4m^2n^2,$$

d'où

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2},$$

ou enfin

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}. \quad (A)$$

Corollaire I. Lorsque le quadrilatère est *inscriptible* dans un cercle, on a $mn=ac+bd$; la valeur de Q devient dans ce cas :

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd+a^2-b^2+c^2-d^2)(2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2)},$$

ou

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+b-d)(a+c+d-b)(b+d+a-c)(b+d+c-a)};$$

donc $$Q=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \qquad (B)$$

en posant $$a+b+c+d=2s.$$

Corollaire II. Lorsque le côté a est parallèle à c, la figure ABCD est un *trapèze* et on a :

$$m^2+n^2=d^2+b^2+2ac\ (*), \qquad (4)$$

$$m^2-n^2=(d^2-b^2).\frac{a+c}{a-c}. \qquad (5)$$

Substituant dans (A) la valeur de d^2+b^2, tirée de (4), il vient :

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2+c^2-m^2-n^2+2ac)\,(2mn-a^2-c^2+m^2+n^2-2ac)},$$

ou bien

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-(m+n)^2]\,[(m+n)^2-(a+c)^2]},$$

d'où on déduit, pour *l'aire du trapèze, en valeur des bases et diagonales :*

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+m-n)\,(a+c+n-m)\,(m+n+a+c)\,(m+n-a-c)},$$

ou $$T=\sqrt{s(s-p)\,(s-m)\,(s-n)}, \qquad (C)$$

en posant $a+c+m+n=2s$ et $a+c=p$.

Effectuant le calcul sous le radical qui précède les deux derniers, et observant que $(m-n)^2(m+n)^2=(m^2-n^2)^2$ et $(m+n)^2+(m-n)^2=2(m^2+n^2)$, il vient aussi :

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{2(a+c)^2(m^2+n^2)-(a+c)^4-(m^2-n^2)^2}.$$

Mettant dans cette expression les valeurs (4) et (5), on obtient :

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{2(a+c)^2(b^2+d^2+2ac)-(a+c)^4-(d^2-b^2)^2.\frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}},$$

ou

$$T=\frac{a+c}{a-c}.\frac{1}{4}\sqrt{[2b^2+2d^2+4ac-(a+c)^2]\,(a-c)^2-(d^2-b^2)^2},$$

(*) Voir la Remarque qui termine la Note.

enfin si on remarque que

$$2b^2+2d^2=(b+d)^2+(b-d)^2,$$
$$(d^2-b^2)^2=(b^2-d^2)^2=(b+d)^2(b-d)^2,$$
$$4ac-(a+c)^2=-(a-c)^2,$$

on trouve :

$$T=\frac{a+c}{a-c}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{[(b+d)^2-(a-c)^2]\ [(a-c)^2-(b-d)^2]},$$

ou bien

$$T=\frac{a+c}{a-c}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{(b+d+a-c)\,(b+d+c-a)\,(a-c+b-d)\,(a-c+d-b)};$$

donc

$$T=\frac{p}{q}\sqrt{s(s-q)(s-b)(s-d)},$$

en faisant $a-c+b+d=2s$, $a+c=p$, $a-c=q$.

Corollaire III. Lorsque $a=c$, $b=d$, le quadrilatère est un *parallélogramme ;* dans ce cas

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-4(a^2-b^2)^2},$$

ou $$P=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+2a^2-2b^2)\,(2mn-2a^2+2b^2)}.$$

Ajoutant la quantité $m^2+n^2-2a^2-2b^2=0$ à chacun des facteurs sous le radical, il vient :

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{[(m+n)^2-4a^2]\,[(m+n)^2-4b^2]},$$

ou enfin

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{(m+n+2a)(m+n-2a)(m+n+2b)(m+n-2b)}. \quad (E)$$

On conclut de là que si p et q représentent les diagonales qui joignent les milieux des côtés opposés d'un *quadrilatère quelconque*, on aura aussi :

$$Q=\frac{1}{2}\sqrt{(p+q+m)(p+q-m)(p+q+n)(p+q-n)}; \quad (F)$$

car tout quadrilatère est double du parallélogramme formé par les lignes qui joignent les milieux des côtés adjacents.

Si le parallélogramme est un *losange*, on a $a=b$, de sorte qu'il vient :

$$L=\frac{1}{4}[(m+n)^2-4a^2],$$

ou bien

$$L=\frac{1}{4}(m+n+2a)\ (m+n-2a)\ldots, \qquad (G)$$

remplaçant $4a^2$ par sa valeur m^2+n^2 et réduisant, on a aussi :

$$L=\frac{1}{2}mn,$$

ce qui est évident.

Enfin, si le parallélogramme est un *rectangle*, on a $m=n$;

donc $$R=\sqrt{(m+a)(m-a)(m+b)(m-b)}. \qquad (H)$$

Corollaire IV. Lorsque $n=a$, $m=c$, $d=0$, le quadrilatère ABCD se réduit au *triangle* ABC, dont l'aire sera

$$t=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+a^2-b^2+c^2)(2ac-a^2+b^2-c^2)},$$

donc $$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad (I)$$

en faisant $a+b+c=2s$.

Remarque. Les deux égalités (4) et (5) constituent deux principes importants du trapèze, dont le second a été trouvé, il y a peu d'années, par M. Cadet (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 189, 1842).

Ils s'énoncent de la manière suivante :

Dans tout trapèze,

1° *La somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés augmentée du double rectangle des bases;*

2° *La différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des côtés, comme la somme des bases est à leur différence.*

Ces deux théorèmes se démontrent presque simultanément à l'aide des égalités :

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ax, \quad (6) \qquad m^2 = c^2 + d^2 + 2cy, \quad (8)$$
$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ay, \quad (7) \qquad n^2 = c^2 + b^2 + 2cx, \quad (9)$$

que fournissent les triangles composants du trapèze ABCD (*fig.* 15).

En effet : 1° Si on ajoute toutes ces égalités membre à membre, et qu'on divise par 2, on aura :

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a - c)(x + y);$$

or $x + y = a - c$; donc, substituant et réduisant, il vient :

$$m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

2° Retranchant la somme des égalités (7) et (9) de celle des égalités (6) et (8), on obtient, en divisant par 2,

$$m^2 - n^2 = (a + c)(y - x).$$

Or, puisque CE = DF, on a $b^2 - x^2 = d^2 - y^2$, ou $y^2 - x^2 = d^2 - b^2$, ou encore $(y - x)(y - x) = d^2 - b^2$. On déduit de là :

$$y - x = \frac{d^2 - b^2}{y + x} = \frac{d^2 - b^2}{a - c};$$

donc

$$m^2 - n^2 = (d^2 - b^2) \cdot \frac{a + c}{a - c}.$$

Dans ces démonstrations, l'idée de l'emploi simultané des égalités (6), (7), (8) et (9) m'a été fournie par l'obligeante amitié de M. O. Wost, *de Strasbourg*. Ce savant professeur élimine x entre (6) et (9), y entre (7) et (8), ce qui le conduit aux relations :

$$cm^2+an^2=ac(a+c)+b^2(a+c), \qquad (10)$$

$$am^2+cn^2=ac(a+c)+d^2(a+c). \qquad (11)$$

Ajoutant membre à membre et divisant par $(a+c)$, il a :

$$m^2+n^2=2ac+b^2+d^2;$$

retranchant ensuite membre à membre et divisant par $(a-c)$, il obtient :

$$m^2-n^2=(d^2-b^2)\cdot\frac{a+c}{a-c};$$

égalités qui sont identiques avec (4) et (5).