NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur l'extraction d'une racine du binôme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. D'après M. J. Plana, à Turin

Nouvelles annales de mathématiques 1^re série, tome 7 (1848), p. 271-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__271_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'EXTRACTION

d'une racine du binôme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, *d'après M. J. Plana, à Turin* (Crelle, t. XVII, p. 331, 1837), *en français.*

—

I. Soient $A^2 = a$, $B^2 = b$; A^2 et B^2 sont deux nombres rationnels entiers, et $A^2 > B^2$; il s'agit d'extraire la racine de degré n du binôme $A \pm B$; j'écris $\sqrt[n]{A \pm B} = \frac{x \pm y}{2n\sqrt{p}}$ et on regarde p comme un nombre entier, ainsi que les carrés x^2 et y^2. Ceci admis, on a nécessairement les deux équations:

$$\sqrt[n]{A+B} = \frac{x+y}{2n\sqrt{p}}\,; \quad \sqrt[n]{A-B} = \frac{x-y}{2n\sqrt{p}}\,;$$

d'où

$$x^2 - y^2 = 4\sqrt[n]{(A^2-B^2)p}\,; \; x^2 + y^2 = 2\left[\sqrt[n]{(A+B)^2p} + \sqrt[n]{(A-B)^2p}\right].$$

Soit

$$A^2-B^2=2^{\alpha}.3^{\alpha'}.5^{\alpha''}.7^{\alpha'''}\ldots,$$

et prenons :

$$p=2^{n-\alpha}.3^{n-\alpha'}.5^{n-\alpha''}.7^{n-\alpha'''}\ldots,$$

on aura :

$$(A^2-B^2)p=(2.3.5.7\ldots)^n=r^n;$$

par là les nombres entiers p et r sont connus. Posons :

$$z=\sqrt[n]{(A+B)^2p}+\sqrt[n]{(A-B)^2p}, \qquad (1)$$

on déduit :

$$x=\sqrt{z+2r};\ y=\sqrt{z-2r} \text{ et } \sqrt[n]{A\pm B}=\frac{\sqrt{z+2r}\pm\sqrt{z-2r}}{2\sqrt[2n]{p}};$$

il faut donc pour que cette extraction soit possible que z soit un nombre entier.

Faisons :

$$\frac{\alpha}{2}=(A^2+B^2)p\ ;\quad \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}=2pAB;$$

ou bien :

$$\alpha=2p(A^2+B^2)\ ;\quad \beta=p^2(A^2-B^2)^2=r^{2n};$$

alors

$$z=\sqrt{\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}}+\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}}.$$

Cette forme nous apprend que z est racine d'une équation de Moivre de degré n, et on aura pour déterminer α l'équation

$$\alpha=z^n-nr^2z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}z^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}z^{n-6}\ldots \qquad (2)$$

Si n est impair, le second membre est divisible par z, et r doit être un facteur du nombre entier α; pour le trouver rapidement, on calcule avec une table de logarithmes les deux parties de la valeur de z de l'équation (1), en ayant soin de faire ce calcul avec plusieurs chiffres décimaux ; ensuite

on voit si l'addition de ces deux nombres donne un nombre entier avec une grande approximation, et l'équation (2) servira à vérifier ce nombre. Ce procédé sert aussi à indiquer l'impossibilité de l'extraction de la racine demandée, en donnant une fraction fort éloignée de l'unité pour la somme des deux parties décimales.

Si n est pair, le second membre de l'équation (2) est divisible par z^2; en sorte que, en admettant qu'elle eût des racines commensurables, on en pourrait tirer une valeur entière pour z^2; mais alors la racine de ce nombre, s'il n'est pas un carré parfait, ne serait pas un nombre entier; ce qui empêcherait d'avoir pour x^2 et y^2 des nombres entiers.

Exemples :

$$\sqrt[5]{5\sqrt{5}+11}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{16}};\quad \sqrt[7]{139\sqrt{3}+91\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}.$$

II. Newton a, le premier, traité cette question et donné une règle (*Arithmétique universelle*, t II, p. 116-121, de la traduction de Beaudeux, 1802).

Euler a élevé des objections contre cette règle dans son mémoire intitulé : *De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus* (Comm. Petrop., XIII, 1751). Le but du travail du célèbre professeur de Turin est de montrer que les objections sont fondées et à quoi elles tiennent.