NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème arithmologique de M. Steiner, démontré par M. Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 268-269

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__268_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE DE M. STEINER, *démontré par M. Jacobi* (Crelle, t. XIV, p. 64, 1835).

Théorème. p est un nombre premier ; a_1, a_2....a_4 sont n nombres non divisibles par p et laissant n résidus *différents* ; la somme des combinaisons avec répétition de la classe $p-r$ de ces n éléments est divisible par p lorsque $r > 1$ et $< n-1$.

Démonstration. Soit

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)=A_1,$$
$$(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)=A_2,$$
$$\vdots$$
$$(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})=A_n.$$

Ainsi A_1, A_2.... A_n ne sont pas divisibles par p.

Si l'on pose

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}=\frac{P}{x^n}+\frac{P'}{x^{n-1}}+\frac{P''}{x^{n-2}}+\ldots,$$

on sait que $P^{(m)}$ est la somme des combinaisons avec répétition de la classe m des n *éléments*, a_1, a_2.... a_n.

On a aussi l'expression connue

$$P^{(m)}=\frac{a_1^{n+m-1}}{A_1}+\frac{a_2^{n+m-1}}{A_2}+\ldots.\frac{a_n^{n+m-1}}{A_n},$$

et lorsque $k=0$ ou $< n-1$, on a :

$$\frac{a_1^k}{A_1}+\frac{a_2^k}{A_2}+\frac{a_3^k}{A_3}+\ldots.\frac{a_n^k}{A_n}=0.$$

Faisons $n+m-1=k+\beta(p-1)$, ou $m=k+\beta(p-1)-(n-1)$, ou $m<\beta(p-1)$; alors, d'après le théorème de Fermat,

$$a_1^{n+m-1},\ a_2^{n+m-2}\ldots.\ a_n^{n+m-1},$$

divisés par p, laissent les mêmes résidus que

$$a_1^k,\ a_2^k \ldots . a_n^k ;$$

donc le produit $A_1A_2 \ldots . A_nP^{(m)}$ laisse le même résidu que

$$A_1A_2 \ldots . A_n\left(\frac{a_1^k}{A_1}+\frac{a_2^k}{A_2}+\ldots .+\frac{a_n^k}{A_n}\right).$$

Or ce produit est nul ; donc $P^{(m)}$ est divisible par p. Posons $\beta=1$, et faisant k successivement égal à $0, 1, 2, 3 \ldots . n-2$, on a le théorème énoncé ; en prenant pour β un nombre entier positif quelconque, on a un énoncé plus général.