NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'équations, d'après M. Plucker, professeur à Bonn

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 263-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__263_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'équations, d'après M. Plucker, professeur à Bonn (Crelle, t. XVI, p. 47, 1837), *en français.*

—

I. *Lemme.* Une équation algébrique complète a deux variables, de degré n à $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = N$ coefficients.

II. *Théorème I.* Si l'on donne à deux quantités variables successivement $N - 1$ couples de valeurs, et si l'on suppose que ces valeurs satisfont a une équation quelconque de degré n entre les deux variables, il y aura $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

nouveaux couples de valeurs qui satisfont à la même équation et qui dépendent uniquement des couples précédents.

Démonstration. Soit $F_n = 0$ l'équation générale de degré n entre deux inconnues et à laquelle satisfont $N-1$ couples de valeurs ; toutes les équations de degré n, auxquelles ces mêmes couples de valeurs satisfont, peuvent être représentées par $F_n + \mu f_n = 0$, où μ est un coefficient arbitraire et f_n une autre fonction quelconque de degré n ; il est évident que les $N-1$ couples de valeurs satisferont aussi à l'équation $f_n = 0$; or les deux équations $F_n = 0$, $f_n = 0$ admettent n^2 couples de valeurs communes et pas davantage, et

$$n^2 = N - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} ;$$

donc l'équation $F_n = 0$ est satisfaite par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nouveaux couples de valeurs.

III. *Théorème II.* Si l'on connaît $N-1$ couples des racines de deux équations du $n^{ème}$ degré entre deux inconnues, on obtiendra les $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ couples de racines restantes sans avoir recours à ces équations.

Démonstration. Éliminant une des inconnues, on obtient une équation de degré n^2 de la seconde inconnue ; on connaît $N-1$ racines ; les autres $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ racines dépendent donc d'une équation de ce degré.

IV. *Théorème III.* Si m des coefficients de l'équation d'un degré n quelconque entre deux variables sont donnés, ou bien encore s'il existe m équations linéaires entre ces coefficients, il suffira de connaître $N-1-m$ couples de valeurs de deux variables qui satisfont à l'équation du $n^{ème}$ degré pour en déduire $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + m$ nouveaux couples.

Démonstration. $N-1-m+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+m=n^2$.

V. *Théorème IV.* Si l'on connaît $\left(nq-\frac{(q-1)(q-2)}{2}\right)$ couples de racines de deux équations du $n^{ème}$ et du $q^{ème}$ degré entre deux inconnues, n étant plus grand que q et q plus grand que 2, on en déduira $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$ couples des racines restantes sans recourir aux équations proposées, en fonction des racines connues et par la résolution de deux équations du degré $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$.

Démonstration. Parmi les $N-1$ couples de valeurs qui satisfont à l'équation $F_n=0$, choisissons à volonté :

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2}-1$$

couples qui déterminent complétement une équation de degré p, représentée $f_p=0$; supposons $n=p+q$, les couples sont au nombre de

$$N-1-\left[\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1\right]=nq-\frac{(q-1)(q-2)}{2}.$$

Supposons que ces couples restants satisfassent à une équation de degré q ou à $\varphi_q=0$; or les équations $F_n=0$, $\varphi_{(q)}=0$ ont en commun nq couples de racines; donc, etc.

VI. *Lemme.* L'équation générale du degré n entre trois inconnues contient $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1=N$ constantes.

VII. *Théorème V.* Si l'on donne à trois quantités variables successivement $N-1$ groupes de valeurs quelconques, et si l'on suppose que ces variables satisfont à une équation générale du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y aura une infinité de tels groupes, dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont tous à cette même équation.

Démonstration. Car ces N — 1 groupes déterminent tous les coefficients en fonction d'un seul, qui reste indéterminé.

VIII. *Théorème VI.* Si l'on donne à trois quantités variables successivement N — 2 groupes de valeurs, et si l'on suppose que ces groupes satisfont à une équation quelconque du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y aura toujours $n^3 - N + 2$ nouveaux groupes de valeurs et dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont à cette même équation.

IX. *Théorème VII.* Si l'on connaît N — 1 groupes de valeurs qui satisfont en même temps à deux équations du $n^{ème}$ degré entre trois inconnues, l'on obtiendra une infinité de tels groupes sans avoir recours aux deux équations proposées.

X. *Théorème VIII.* Si l'on connaît (N — 2) groupes de racines de trois équations données du $n^{ème}$ degré entre trois inconnues, l'on en déduira les $(n^3 - N + 2)$ groupes de racines restantes sans avoir recours aux équations données.

XI. *Théorème IX.* Si parmi les coefficients de l'équation générale du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y en a m de donnés, ou bien encore si m équations linéaires de condition ont lieu entre ces coefficients, il en résultera :

1° Que $N - m - 1$ groupes donnés des trois variables qui vérifient l'équation générale en comportent un nombre infini;

2° Que $N - m - 2$ groupes donnés en comportent $n^3 - N + m + 2$ groupes nouveaux.

XII. *Théorème X.* Si l'on connaît

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{1.2.3} - 1$$

groupes de trois valeurs qui satisfont en même temps à deux équations entre trois variables, dont l'une s'élève au degré n et l'autre au degré q, l'on en déduira une infinité de pareils groupes sans avoir recours à ces équations.

XIII. *Théorème XI.* Si l'on connaît

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

$$-\frac{(n-q+1)(n-q+2)(n+q+3)}{1.2.3}-\frac{(n-s+1)(n-s+2)(n-s+3)}{1.2.3}-1$$

groupes des racines de trois équations entre trois inconnues et dont les degrés s'élèvent respectivement à n, q et s, l'on en déduira tous les autres groupes sans avoir recours aux trois équations proposées.

Observations. Les deux derniers théorèmes se démontrent comme on a fait pour le théorème IV.

XIV. *Lemme.* Le nombre des coefficients d'une équation de degré n entre g variables est :

$$S_n=ng+\frac{n.n-1}{1.2}.\frac{g.g-1}{1.2}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{g.g-1.g-2}{1.2.3}+\text{etc.}$$

XV. Si parmi les coefficients de l'équation générale du $n^{ème}$ degré entre g variables il y en a m de donnés, il en résultera :

1° Que si $S_n-m-(g-h)$ groupes donnés de g variables, qui vérifient l'équation générale, en comportent un nombre infini de pareils groupes, de sorte que dans tous ces groupes l'on peut prendre à volonté les valeurs de $(h-1)$ des g variables, où h est un nombre arbitraire >1 et $<g$;

2° Que $S_n-m-(g-1)$ groupes donnés en comportent $n^g-s+m+g-1$ groupes nouveaux.

XVI. *Théorème général.* Si l'on connaît

$$S_n-S_{(n-p)}-S_{(n-q)}\ldots-(g-1)$$

groupes de racines de g équations entre g inconnues, et s'élevant respectivement aux degrés $n, p, q\ldots$, l'on en déduit tous les autres sans avoir recours à ces équations qui restent complétement déterminées.