NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DIENGER

Note sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z^n+z'^n}$, α étant > 0 et $< 2n$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 201-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__201_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE

sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z^n+z^{2n}}$, α *étant* >0 *et* $<2n$,

PAR M. DIENGER,
docteur ès sciences à Sinsheim (Bade).

—

Si la fonction $\frac{f(x)}{F(x)}=\varphi(x)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $\varphi(x+iy)$, i étant $=\sqrt{-1}$, est 0 pour $x=\pm\infty$, quelle que soit la valeur de y, et cette même quantité est 0 pour $y=\infty$, quelle que soit la valeur de x.

2° Les racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$ sont absolument les mêmes que celles de l'équation $F(x)=0$; on sait qu'on a alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=2\pi i\left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_m)}{F'(x_m)}\right];$$

$x_1, x_2, \ldots x_m$ étant les racines (imaginaires) de l'équation

$F(x)=0$, pour lesquelles le coefficient de $i(=\sqrt{-1})$ est positif. Si cette équation avait en même temps les racines réelles a_1, a_2, ... il faudrait ajouter à l'expression précédente :

$$\pi i\left[\frac{f(a_1)}{F'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{F'(a_2)}+\ldots\right];$$

$F'(x)$ désignant, comme à l'ordinaire, la fonction dérivée de $F(x)$. (V. les *Leçons de calcul intégral*, par M. Moigno, leç. 9 et 21.)

Appliquons maintenant ce théorème à l'intégrale :

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=[(-i)^{\mu-1}+i^{\mu-1}]\int_{o}^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4};$$

supposant $\mu>0$ et <4, toutes les conditions énoncées ci-dessus seront remplies. Les racines de l'équation $1+x^2+x^4=0$ sont :

$$\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},\quad \cos\frac{4\pi}{3}\pm i\sin\frac{4\pi}{3};$$

donc on a dans ce cas :

$$x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\quad x_2=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};$$

d'où il suit, en appliquant le théorème général :

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=\frac{2\pi i}{2}\left[\frac{\left(-i\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\mu-1}}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}+2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3}+\frac{\left(i\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\mu-1}}{-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3}\right]$$

$$=\pi i\left[\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\mu-1}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}+\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\mu-1}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+4}\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}}{-3+i\sqrt{3}}+\frac{\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}+i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}}{3+i\sqrt{3}}\right]=$$

$$=\frac{4\pi i^3}{-12}\left[\sqrt{3}.\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-3\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}.\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right].$$

Or on a : $$\sqrt{3}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}},\ \text{donc}$$

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^3+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}.\sin\frac{\pi}{6}}\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}.\sin\frac{\pi}{6}-\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\mu\pi}{6}\right)=$$

$$=[(-i)^{\mu-1}+i^{\mu-1}]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^3+x^4}=$$

$$=\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\mu-1}+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\mu-1}\right]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^3+x^4}=$$

$$=\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}-i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}+\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}+i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}\right]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^3+x^4}=$$

$$=2\sin\frac{\mu\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^3+x^4},$$

d'où enfin

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^3+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\mu\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\mu\pi}{2}},\ \mu\begin{matrix}>0\\<4.\end{matrix}\qquad(1)$$

Supposons dans cette formule $\mu=2a$, $x^3=z$, on aura

$x^{\mu-1}dx=x^{2a-2}xdx=z^{a-1}\frac{dz}{2}$, donc

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1+z+z^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a\pi}{3}\right)}{\sin a\pi},\ a\begin{matrix}>0\\<2.\end{matrix}$$

Pour $a=1$, le second membre de cette équation se présente

sous la forme $\frac{0}{0}$; sa valeur se trouve, au moyen des formules connues $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z+z^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

ce qu'on peut aisément vérifier par l'intégration directe.

Mettons dans la formule (1) $a=\frac{\alpha}{n}\left(\alpha \begin{matrix}>0\\<2n\end{matrix}\right)$, $z=x^n$, on aura $z^{a-1}dz = nx^{\alpha-1}dx$, donc

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \frac{2\pi}{n\sqrt{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{\alpha\pi}{n}}, \quad \alpha \begin{matrix}>0\\<2n.\end{matrix} \qquad (2)$$

Cette formule a lieu pour n entier et >0, et même pour n fractionnaire et >0, pourvu que, dans ce dernier cas, on n'admette pour x^n, x^{2n}, qui sont alors des puissances fractionnaires, que leurs valeurs positives et réelles.

Pour $\alpha=n$, le second membre de l'équation (2) est $\frac{0}{0}$, sa valeur est alors $\frac{2\pi}{3n\sqrt{3}}$, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \frac{2\pi}{3n\sqrt{3}}.$$

Posons dans la formule (2) $\frac{1}{x}$ au lieu de x, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{a^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}$ se transformera en $\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}$; donc on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}, \quad \alpha \begin{matrix}>0\\<2n;\end{matrix} \qquad (3)$$

équation qui résulte immédiatement de ce qu'on a identiquement :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{\alpha\pi}{n}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{(2n-\alpha)\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{(2n-\alpha)\pi}{n}}.$$

Différentions l'équation (2) par rapport à α, nous aurons :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}=$$

$$=\frac{-2\pi^2}{3n^2\sqrt{3}}\cdot\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{n}+3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)\cos\frac{\alpha\pi}{n}\right]}{\sin^2\frac{\alpha\pi}{n}}. \qquad (4)$$

Cette équation aura lieu tant que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}$ aura tous ses éléments finis, c'est-à-dire tant que la quantité $\frac{(x+\varepsilon)^{\alpha-1}\log(x+\varepsilon).\varepsilon}{1+(x+\varepsilon)^n+(x+\varepsilon)^{2n}}$ s'évanouira pour $\varepsilon=0$; x pouvant varier de $x=0$ jusqu'à $x=\infty$.

Or il est évident que la quantité $\frac{x^{\alpha-1}\log(x)}{1+x^n+x^{2n}}$ est finie pour $x\begin{matrix}>0\\<\infty\end{matrix}$; donc $\frac{(x+\varepsilon)^{\alpha-1}\log(x+\varepsilon).\varepsilon}{1+(x+\varepsilon)^n+(x+\varepsilon)^{2n}}$ s'évanouit pour $\varepsilon=0$, x étant $\begin{matrix}>0\\<\infty\end{matrix}$. Supposons donc $x=0$, on aura à discuter la quantité :

$$\frac{\varepsilon^{\alpha-1}\log(\varepsilon).\varepsilon}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}}=\frac{\varepsilon^\alpha\log(\varepsilon)}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}} \text{ pour } \varepsilon=0 ;$$

qui est évidemment 0 tant que $x>0$; pour $\alpha=\infty$, on pourra supposer $x+\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$, et on aura :

$$\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).\varepsilon}{1+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}}=\frac{-\varepsilon^{2n-\alpha}\log(\varepsilon)}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}} \text{ pour } \varepsilon=0,$$

qui sera 0 pourvu qu'on ait $\alpha<2n$. Il résulte de ces consi-

dérations que la formule (4) a lieu pour $\alpha \begin{matrix} > 0 \\ < 2n \end{matrix}$, c'est-à-dire sous les mêmes conditions que l'équation (2) d'où elle dérive.

La formule (3) donne, en différentiant par rapport à α:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}, \quad \alpha \begin{matrix} > 0 \\ < 2n. \end{matrix} \qquad (5)$$

Pour $n=\alpha$, on tire de l'équation (1) :

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}} = -\infty ; \qquad (6)$$

donc la formule (5) démontre que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}$ change de signe pour $\alpha=n$; elle est négative pour $\alpha \begin{matrix} > 0 \\ < n, \end{matrix}$ positive pour $\alpha \begin{matrix} > n \\ < 2n \end{matrix}$; pour $\alpha=n$, elle passe de l'infini négatif à l'infini positif (*).