NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. G. J. JACOBI

Nouveaux théorèmes algébriques relatifs au système de deux équations entre deux variables

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 118-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__118_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOUVEAUX THÉORÈMES ALGÉBRIQUES

relatifs au système de deux équations entre deux variables.

Par M. C. G. J. JACOBI, professeur ordinaire de mathématiques, à Kœnigsberg.
(Crelle, XIV, 281, 1835.)

—

I.

De tous les théorèmes qu'on donne dans les éléments d'algèbre, il en existe à peine un seul plus utile, principalement dans les équations, que le suivant :

« X étant une fonction rationnelle entière de x, on a

$$\Sigma\left(\frac{U}{\frac{dX}{dx}}\right) = 0,$$

» si on étend la somme à toutes les racines de l'équation » X=0, et si U est une autre fonction quelconque rationnelle » et entière de x, d'un ordre inférieur de deux unités à la » fonction X. »

Dans ce qui suit, nous démontrerons comment on étend ce théorème au système de deux équations algébriques entre deux variables. Soient f, φ des fonctions rationnelles entières de x et de y, qui montent respectivement au $\mu^{ème}$ et $\nu^{ème}$ degré. Supposons que w soit le degré des équations finales qui proviennent de l'élimination de l'une et de l'autre variable des équations $f=0$, $\varphi=0$.

Soient ces équations finales :

$$X=0,\quad Y=0,$$

l'une en x et l'autre en y. Supposons de plus que M, N, P, Q soient les fonctions multiplicatrices, les plus simples, rationnelles, entières, au moyen desquelles on obtienne identiquement :

$$Mf+N\varphi=X,$$
$$Pf+Q\varphi=Y;$$

soit enfin $$MQ-NP=V,$$

nous désignerons par

$$[x^{\alpha}, y^{\beta}]\ .$$

une fonction rationnelle entière en x et y dans laquelle x^{α}, y^{β} sont les plus hautes puissances de x, y qui se trouvent dans cette fonction, et soit

$$f=[x^{\alpha}, y^{\beta}],\ \varphi=[x^{\gamma}, y^{\delta}].$$

On aura, d'après les principes algébriques connus :

$$M=[x^{w-\alpha}, y^{\delta-1}];\ N=[x^{w-\gamma}, y^{\beta-1}]$$
$$P=[x^{\gamma-1}, y^{w-\beta}];\ Q=[x^{\alpha-1},\ y^{w-\delta}],$$

d'où $V = MQ - NP = [x^{w-1}, y^{w-1}]$.

Or M et P sont de degré $w-\mu$, et N, Q de degré $w-\nu$, donc V est de degré $2w-\mu-\nu$.

Supposons que $x=x_1, y=y_1$; $x=x_2, y=y_2$; ..... $x=x_w$, $y=y_w$ soient les racines simultanées des équations

$$f=0, \varphi=0.$$

Toutes les fois que $x=x_m, y=y_n$, m n'étant pas égal à n, satisfait aux équations $X=Mf+N\varphi=0$; $Y=Pf+Q\varphi=0$, mais pas aux équations, $f=0$, $\varphi=0$ comme de ces équations, on déduit $Vf=0$; $V\varphi=0$; donc $V=0$.

« $V_{m,n}$ désignant la valeur que prend l'expression MQ—NP, » en posant en même temps $x=x_m$, $y=y_n$, lorsque m et » n seront différents, on aura $V_{m\,n}=0$, ou bien V s'éva- » nouira pour toutes les racines des équations finales qui ne » sont pas racines simultanées des équations proposées. »

Différentiant par rapport à x et à y les identités $Mf+N\varphi=X$; $Pf+Q\varphi=Y$, et mettant après la différentiation les racines simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$, il vient:

$$Mf'(x)+N\varphi'(x)=X'; \quad Pf'(x)+Q\varphi'(x)=0,$$
$$Mf'(y)+N\varphi'(y)=0; \quad Pf'(y)+Q\varphi'(y)=Y'.$$

Posons pour abréger:

$$f'(x)\varphi'(y)-\varphi'(x)f'(y)=R:$$

il vient: $R.M=+X'\varphi'y$, $R.P=-Y'\varphi'(x)$,

$R.N=-X'f'y$, $R.Q=+Y'f'(y)$,

d'où $RV=X'Y'$.

Nous voyons donc qu'en substituant dans V les racines simultanées des équations, on obtient le même résultat que si l'on substitue ces valeurs dans l'expression $\frac{X'Y'}{R}$, ou désignant par X'_m, Y_m, R_m les valeurs que prennent X', Y',

R pour les racines simultanées x_m, y_m des équations $f=0$, $\varphi=0$, on obtient $V_{m,m}=\frac{X'_m, Y'_m}{R_m}$.

II.

Dans l'expression V, les variables x, y pris séparement montent, comme nous avons vu ci-dessus, au degré $w-1$, par conséquent à un degré moindre d'une unité que dans X et Y qui sont de degré w. On aura par la théorie de la décomposition des fractions rationnelles

$$\frac{V}{X.Y}=\Sigma\frac{V_{m,n}}{X'_m, Y'_n\,(x-x_m)(y-y_n)}.$$

La somme étant étendue à toutes les valeurs des indices m, n comprises dans la suite 1, 2, 3..... w; mais dans les w^2 expressions que la somme comprend, toutes celles dans lesquelles m, n sont diverses s'évanouissent, comme il a été dit ci-dessus; il ne reste donc que les termes ou $m=n$; d'où l'équation précédente se change en celle-ci :

$$\frac{V}{X\,Y}=\Sigma\frac{V_{m,m}}{X'_m.\,Y'_m\,(x-x_m)\,(y-y_m)}=\Sigma\frac{1}{R_m\,(x-x_m)\,(y-y_m)}$$

C'est une équation très-remarquable.

On en tire :

$$V=\frac{1}{R_1}(x-x_2)\,(x-x_3)\ldots(x-x_w)\,(y-y_2)\,(y-y_3)\ldots(y-y_m)$$

$$+\frac{1}{R_2}(x-x_1)\,(x-y)\ldots(x-x_w)\,(y-y_1)\,(y-y_3)\ldots(y-y_w)$$

etc.,

en supposant toutefois qu'on ait rendu le coefficient de la plus haute puissance de x dans X et de y dans Y égal à l'unité.

Soit U une fonction rationnelle entière de x et de y et

U_m la valeur de U pour $x=x_m$; $y=y_m$; on peut poser $U = U_m + W\ (x-x_m) + W'(y-y_m)$, W et W' étant des fonctions de x, y rationnelles et entières.

D'où

$$\frac{U}{(x-x_m)(y-y_m)} = \frac{U_m}{(x-x_m)(y-y_m)} + \frac{W}{y-y_m} + \frac{W'}{x-x_m}.$$

Développons ces diverses fractions selon les puissances descendantes de x et de y; la première fraction du second membre est la seule dans ce membre qui fournisse des puissances de x multipliées par des puissances de y; elles sont donc les mêmes que celles qui sont données par

$$\frac{U.}{(x-x_m)(y-y_m)};$$

donc, en développant l'expression

$$\frac{UV}{XY} = \Sigma \frac{U}{R_m\ (x-x_m)\ (y-y_m)}$$

selon les puissances descendantes de x et de y, les termes provenant de la multiplication des puissances négatives de x par les puissances négatives de y sont les mêmes qu'en développant

$$\Sigma \frac{U_m}{R_m(x-x_m)(y-y_m)} = \frac{U_1}{R_1(x-x_1)(y-y_1)} + \frac{U_2}{R_2(x-x_2)(y-y_2)},$$

ou bien dans le développement de $\frac{UV}{XY}$ le coefficient de

$$x^{-\alpha-1}\, y^{-\beta-1} \text{ est } \frac{x_1^{\alpha} y_1^{\beta} U'}{R_1} + \frac{x_2^{\alpha} y_2^{\beta} U_2}{R_2} + \ldots \frac{x_w^{\alpha} y_w^{\beta} U_w,}{R_w}$$

d'où, en posant U=R,

en développant suivant les puissances descendantes de x et de y l'expression $\frac{RV}{XY}$, le coefficient du terme

$$x^{-(\alpha+1)}\, y^{-(\beta+1)} \text{ est } x_1^{\alpha} y_1^{\beta} + x_2^{\alpha} y_2^{\beta} \ldots\ldots x_w^{\alpha} y_w^{\alpha}\ .$$

Ce qui précède peut servir à trouver la valeur des expressions

$$x_1^{\alpha} y_1^{\beta} + x_2^{\alpha} y_2^{\beta} + \ldots\ldots x_w^{\alpha} y_w^{\beta},$$

laquelle, lorsque ni α ni β ne sont nuls, se trouve péniblement par les méthodes ordinaires.

III.

V ne peut monter qu'au degré $2w-\mu-\nu$; XY est de degré $2w$; donc $\frac{V}{XY}$ ne peut monter qu'au degré $-(\mu+\nu)$; le terme général du développement est

$$\left(\frac{x_1^{\alpha} y_1^{\beta}}{R_1} + \ldots \frac{x_w^{\alpha} y_w^{\beta}}{R_w}\right) x^{-(\alpha+1)} y^{-(\beta+1)};$$

par conséquent ce terme est nul toutes les fois qu'on a $\alpha+\beta+2<\mu+\nu$; de là :

Théorème.

Soient φ, f des fonctions quelconques rationnelles entières; soient $x=x_1$, $x=x_2 \ldots x=x_w$; $y=y_1$, $y=y_2 \ldots y=y_w$, toutes les racines simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$; soit ensuite R_m la valeur de l'expression

$$f'x\ \varphi' y - f'(x)\,\varphi'(x)$$

pour $x=x_m$, $y=y_m$; alors l'expression

$$\frac{x_1^{\alpha} y_1^{\beta}}{R_1} + \frac{x_2^{\alpha} y_2^{\beta}}{R_2} + \ldots \frac{x_w^{\alpha} y_w^{\beta}}{R_w} = 0,$$

α et β désignant des nombres entiers positifs dont la somme, augmentée de deux unités, est moindre que la somme des degrés des équations $f=0$, $\varphi=0$.

De là cet autre théorème :

Théorème.

Soient f, φ des fonctions quelconques de x et de y, rationnelles et entières; soit F une autre fonction quelconque des mêmes variables, rationnelle et entière, et d'un degré moindre de trois unités que les sommes des degrés de f et de φ, alors

$$\Sigma \frac{F}{f'x\varphi'y - f'y\varphi'x} = 0,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de x et de y qui sont racine simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$.

Nous donnerons un seul exemple pour confirmer ce remarquable théorème. Soient f, φ du second degré; dans ce cas, on peut déterminer la constante λ, de manière que $f+\lambda\varphi$ puisse se décomposer en deux facteurs linéaires, et cela de trois manières, par les trois racines de l'équation cubique dont dépend la valeur de λ; soient λ', λ'' deux de ces valeurs diverses, et soit $\pi = f+\lambda'\varphi = tu$; $\Phi = f+\lambda''\varphi = vw$; t, u, v, w désignent des fonctions linéaires. Les racines des équations $f=0$, $\varphi=0$ sont les mêmes que celles des équations $\pi=0$, $\Phi=0$, qui peuvent se décomposer en ces quatre systèmes d'équations linéaires :

1) $t=0$, $v=0$; d'où suit $x=x_1$, $y=y_1$;
2) $t=0$, $w=0$; $x=x_2$, $y=y_2$;
3) $u=0$, $v=0$, $x=x_3$, $y=y_3$;
4) $u=0$, $w=0$, $x=x_4$, $y=y_4$;

d'où s'ensuit :

$$t = \alpha[x(y_1-y_2) - y(x_1-x_2) + x_1y_2 - y_1x_2]$$
$$u = \beta[x(y_3-y_4) - y(x_3-x_4) + x_3y_4 - y_3x_4]$$
$$v = \gamma[x(y_1-y_3) - y(x_1-x_3) + x_1y_3 - x_3y_1]$$
$$w = \delta[x(y_2-y_4) - y(x_2-x_4) + x_2y_4 - y_2x_4]$$

α, β, γ, δ étant des constantes.

Posant, pour abréger,

$$+\Delta_1 = x_2(y_3 - y) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)$$
$$-\Delta_2 = x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4)$$
$$+\Delta_3 = x_4(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1)$$
$$+\Delta_4 = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

on en déduit :

$$\frac{dt}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dw}{dx} = -\alpha\gamma\Delta_4$$
$$\frac{dt}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dw}{dx} = +\beta\delta\Delta_3$$
$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = +\beta\gamma\Delta_2$$
$$\frac{du}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dw}{dx} = -\beta\delta\Delta_1.$$

Ainsi $\pi'(x)\Phi'(y) - \pi'(y)\Phi'(x) = -\alpha\gamma\Delta_4 uw + \alpha\delta\Delta_3 uv +$
$+\beta\gamma\Delta_2 tw - \beta\delta\Delta_1 tv = (\lambda'' - \lambda')\,[f'x\varphi'y - f'y\varphi'x] = (\lambda'' - \lambda')R.$

Il faut observer que

$$x,\ y,\ t,\ u,\ v,\ w$$

prennent simultanément les valeurs

$$x_1, y_1, 0, -\beta\Delta_2, 0, \delta\Delta_3,$$
$$x_2, y_2, 0, +\beta\Delta_1, \gamma\Delta_4, 0,$$
$$x_3, y_3, -\alpha\Delta_4, 0, -\delta\Delta_1,$$
$$x_4, y_4, +\alpha\Delta, 0, -\gamma\Delta_2, 0.$$

On a donc :

$$\frac{\lambda'' - \lambda'}{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\Delta_2\Delta_3\Delta_4}{R_1} = \frac{\Delta_3\Delta_4\Delta_1}{R_2} = \frac{\Delta_4\Delta_1\Delta_2}{R_3} = \frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{R_4}.$$

D'après le théorème, on doit avoir :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 0,$$
$$\frac{x_1}{R_1} + \frac{x_2}{R_2} + \frac{x_3}{R_3} + \frac{x_4}{R_4} = 0,$$
$$\frac{y_1}{R_1} + \frac{y_2}{R_2} + \frac{y_3}{R_3} + \frac{y_4}{R_4} = 0.$$

Substituant les valeurs de R_1, R_2, R_3, R_4 il vient les identités évidentes :

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0,$$
$$x_1\Delta_1 + x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3 + x_4\Delta_4 = 0,$$
$$y_1\Delta_1 + y_2\Delta_2 + y_3\Delta_3 + y_4\Delta_4 = 0.$$

Kœnigsberg, 13 juin 1835.

Note. Tous les géomètres connaissent le beau mémoire analytico-géométrique de M. Liouville, relatif à ces théorèmes de M. Jacobi (*Journ. de mathém.*, VI, p. 345. 1841).