JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JSFS

Estimation d'un modèle V.A.R. par le filtre de Kalman

Journal de la société statistique de Paris, tome 134, n° 4 (1993), p. 3-16

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1993__134_4_3_0>

© Société de statistique de Paris, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SALLES D'ETUDES
(DROIT)

I

ARTICLES

ESTIMATION D'UN MODÈLE V.A.R. PAR LE FILTRE DE KALMAN

par Osman NAKKAR
C.E.P.E. (L.A.M.T.A.) Université de Montpellier I

par Michel TERRAZA
Maître de conférences en Sciences Économiques
C.E.P.E. (L.A.M.T.A.) Université de Montpellier I

Résumé

Cet article présente une étude de l'estimation des paramètres d'un modèle VAR par le filtre de Kalman (F.K.).

Après avoir exposé la représentation Espace d'États du modèle et le filtre de Kalman, on procède à une application sur un exemple, simulé par la méthode de Monte-Carlo.

Mots clefs :

Modèle VAR – Modèle Espace d'États – Filtre de Kalman – Méthode des m.c.o.

Abstract

This paper presents a Kalman filter approach for estimating the parameters of VAR model.

The paper begins by defining the State-Space representation of the VAR model, including the Kalman filter. We then proceed to show (by an example simulated by the Monte-Carlo method) how improvements in parameters estimation can be made.

Key words :

Var model – State-Space model – Kalman filter – OLS method.

INTRODUCTION

La modélisation vecteur Autorégressive (V.A.R.) a été introduite par Christopher Sims en 1980. Le modèle V.A.R., qui prolonge les travaux de Granger en 1969 sur la causalité, est constitué de séries temporelles réalisations de processus aléatoires stationnaires d'ordre deux, d'un nombre d'équations égal au nombre de séries, de variables où chacune d'entre elles est endogène dans son équation et exogène dans les autres.

Plus formellement, une représentation VAR (p) d'un processus stochastique, stationnaire au second ordre, multivarié (Yt, $t \in Z$), est donnée par une équation aux différences de type :

$$\Phi(L) \cdot Y_t = \varepsilon_t, \; t \in Z \tag{1}$$

où : $\Phi(L)$ est un polynôme matriciel de degré P. Il s'écrit :

$$\Phi(L) = \Phi_0 + \Phi_1 L + \Phi_2 L_2 + \ldots + \Phi_p L^p$$

avec :

Φ_0 une matrice d'identité de dimensions $(m \times m)$.

Φ_i une matrice différente de zéro de dimensions $(m \times m)$.

Y_t est un vecteur $(m \times 1)$ des observations.

ε_t est un vecteur $(m \times 1)$ de bruits blancs normaux.

La condition de stationnarité du processus impose à l'équation aux différences (1) d'avoir des racines de son polynôme en z $\left(\det\left[\Phi(z)\right], \; z \in C\right)$ de module strictement supérieur à un.

La méthode habituelle d'estimation des paramètres du modèle VAR est celle des m.c.o. L'équation (1) s'écrit sous la forme d'un ensemble de m équations de régressions linéaires où chaque composante du vecteur Y_t est exprimée en fonction de ses propres valeurs retardées et des valeurs retardées des autres composantes :

$$\begin{aligned} y_{1,t} &= \phi^1_{11} y_{1,t-1} + \phi^1_{12} y_{2,t-1} + \ldots + \phi^1_{1m} y_{m,t-1} + \phi^2_{11} y_{1,t-2} \\ &\quad + \ldots + \phi^p_{11} y_{1,t-p} + \ldots + \phi^p_{1m} y_{m,t-p} + \varepsilon_{1,t} \\ &\vdots \\ y_{m,t} &= \phi^1_{m1} y_{1,t-1} + \phi^1_{m2} y_{2,t-1} + \ldots + \phi^1_{mm} y_{m,t-1} + \phi^2_{m1} y_{1,t-2} \\ &\quad + \ldots + \phi^p_{m1} y_{1,t-p} + \ldots + \phi^p_{mm} y_{m,t-p} + \varepsilon_{m,t} \end{aligned} \tag{2}$$

La méthode des m.c.o. est appliquée à chacune des équations à condition de disposer de N-observations suffisantes pour garantir la qualité statistique des estimateurs obtenus.

Nous proposons dans cet article de substituer à la méthode d'estimation traditionnelle, par les m.c.o., le filtre de Kalman (F.K.). Celui-ci a été présenté pour la première

fois par Kalman en 1960 avant d'être amélioré par Kalman et Bucy en 1961. De par sa conception, il présente de nombreux avantages en particulier ses formules récursives qui facilitent la mise à jour des estimateurs sans recourir à l'historique de la série.

L'utilisation du filtre de Kalman nécessite une représentation sous forme Espace d'États du modèle VAR (Otter P.W., 1985) que nous décrivons avant de vérifier par la méthode de Monte Carlo l'efficacité du filtre dans ce domaine.

I. Modèle espace d'états et filtre de Kalman

Le modèle espace d'états introduit par Kalman (1960) puis par Kalman et Bucy (1961) est à l'origine du filtre de Kalman.

A. Modèle « Espace d'États »

Une représentation Espace d'États, d'un processus stochastique X_t stationnaire au second ordre, à temps discret, est donnée par les deux équations suivantes :

$$X_{t+1} = AX_t + W_t \tag{3-a}$$

$$Y_t = CX_t + V_t \qquad t >= 0 \tag{3-b}$$

où :

X_t : est un vecteur $(k \times 1)$ des variables aléatoires représentant l'état du système à la date t. Il est partiellement ou totalement inobservable.

Y_t : est un vecteur $(m \times 1)$ des observations.

A : est une matrice $(k \times k)$ appelée matrice de transition ; elle est déterministe.

C : est une matrice $(m \times k)$ déterministe.

W_t : est un vecteur $(k \times 1)$ de variables aléatoires normales de moyenne nulle, appelé vecteur des innovations. Il est inobservable et sa matrice de variance-covariance de dimensions $(k \times k)$ est :

$$E[W_t W_t'] = Q$$

V_t : est un vecteur bruit blanc normal de dimensions $(m \times 1)$, appelé erreurs des mesures. Sa matrice de variance-covariance est :

$$E[V_t V_t'] = R$$

On suppose que W_t et V_t sont indépendants :

$$E[W_t V_t'] = 0$$

Pour compléter la spécification du modèle, on impose la normalité de l'état initial du système :

$$X_0 \sim N(\mu, \Sigma_0)$$

On peut alors démontrer que toutes les informations utiles sur le passé de la série sont contenues dans le vecteur d'états. Pour cela reprenons l'équation (3-a) et supposons que la valeur initiale soit X_0. On obtient par remplacements successifs :

$$X_1 = AX_0 + W_0$$

$$X_2 = A\,(AX_0 + W_0) + W_1$$

$$X_3 = A\,[A\,(AX_0 + W_0) + W_1] + W_2$$

$$\vdots$$

$$X_t = A_t X_0 + A_{t-1} W_0 + A_{t-2} W_1 + \ldots + W_{t-1} \tag{4}$$

Si la valeur initiale est X_l, la même démarche conduit à l'équation :

$$X_t = A_{t-l} X_l + A_{t-l-1} W_l + A_{t-l-2} W_{l+1} + \ldots + W_{t-1} \tag{5}$$

À partir de (4) et (5), on déduit :

$$X_l = A^l X_0 + A^{l-1} W_0 + A^{l-2} W_1 + \ldots W_{l-1} \tag{6}$$

Le vecteur d'état X_t contient un résumé de toutes les informations antérieures à l qui influencent les composantes du vecteur Y_t par l'équation (3-b).

B. Filtre de Kalman

Comme la variable d'état X_t, dans la plupart des cas, n'est pas observable, on est amené à l'estimer. La meilleure estimation que l'on peut trouver est l'espérance conditionnelle de X_t sachant les observations présentes et passées Y_0, Y_1, ..., Y_s, avec $s <= t$. On la note :

$$\widehat{X}_{t/s} = E\,[X_t / Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_s]$$

et la matrice de variance-covariance des erreurs d'estimation correspondante est :

$$P_{t/s} = E\,[(X_t - \widehat{X}_{t/s})\,(X_t - \widehat{X}_{t/s})']$$

Ce problème de filtrage a été résolu par Kalman (1960) puis Kalman et Bucy (1961). Les formules du filtre sont les suivantes :

– formules de mise à jour :

$$\widehat{X}_{t/t} = \widehat{X}_{t/t-1} + K_t\,[Y_t - C\widehat{X}_{t/t-1}] \tag{7-a}$$

avec :
$$K_t = P_{t/t-1}\,C'\,[CP_{t/t-1}\,C' + R]^{-1}$$

K_t est appelé le gain du filtre à la date t.

$$P_{t/t} = [I - K_t C]\,P_{t/t-1} \tag{7-b}$$

– formules de prévision :

$$\widehat{X}_{t+1/t} = A\widehat{X}_{t/t} \tag{7-c}$$

$$P_{t+1/t} = AP_{t/t}\,A' + Q \tag{7-d}$$

II. Représentation Espace d'États d'un modèle VAR

La représentation Espace d'États d'un modèle VAR peut être réalisée en adoptant une démarche univariée ou multivariée.

Dans le premier cas on écrit chacune des équations du modèle (2) sous forme d'espace d'états. On construit alors m modèles Espace d'États univariés sur lesquels on peut appliquer le filtre de Kalman de manière séparée. Prenons, à titre d'exemple, la première équation de (2). Sa représentation Espace d'États correspondante est :

$$\begin{aligned} \Phi_{t+1} &= \Phi_t \\ y_{1,t} &= C_t \Phi_t + \varepsilon_{1,t} \end{aligned} \tag{8}$$

où :

$$\Phi_t = [\phi_{11}^1, \ldots, \phi_{1m}^1, \phi_{11}^2, \ldots, \phi_{1m}^2, \ldots, \phi_{11}^p, \ldots, \phi_{1m}^p]',$$

$$(mp \times 1)$$

$$C_t = [y_{1,t-1}, y_{2,t-1}, \ldots, y_{m,t-1}, y_{1,t-2}, \ldots, y_{m,t-p}]$$

$$(1 \times mp)$$

Les paramètres à estimer constituent alors le vecteur d'États (Otter P.W., 1985).

Dans la démarche multivariée, toutes les équations du modèle (2) sont intégrées dans un seul modèle Espace d'États. On considère le modèle VAR (p) :

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{9}$$

où :

Y_t est un vecteur de dimensions $(m \times 1)$.

Φ_i est une matrice carrée de dimensions $(m \times m)$.

ε_t est un vecteur de dimensions $(m \times 1)$.

On déduit directement le modèle Espace d'États correspondant :

$$\begin{aligned} \Phi_{t+1} &= \Phi_t \\ Y_t &= C_t \Phi_t + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{10}$$

où : $$\Phi_t = \begin{bmatrix} \phi_{1,\cdot}^{1\prime} \\ \phi_{1,\cdot}^{2\prime} \\ \vdots \\ \phi_{m,\cdot}^{p\prime} \end{bmatrix} \qquad (m^2 p \times 1)$$

avec : $\phi_{j,\cdot}^{i}$ la ligne j de la matrice i

$$j \in \{1, 2, \ldots, p\} \quad \text{et} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_{1,\,t} \\ y_{2,\,t} \\ \vdots \\ y_{m,\,t} \end{bmatrix} \qquad (m \times 1)$$

$$C_t = \begin{bmatrix} Y'_{t-1} & Y'_{t-2} & \cdots & Y'_{t-p} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Y'_{t-1} & Y'_{t-2} & \cdots & Y'_{t-p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & Y'_{t-p} \end{bmatrix} \qquad (m \times m^2 p)$$

L'application du filtre de Kalman donne simultanément l'estimation de tous les paramètres, avec leurs matrices de variance-covariance.

III. Simulation expérimentale

Illustrons notre propos par une simulation (méthode de Monte-Carlo) d'un processus autorégressif, bivarié, avec un seul retard. Soit :

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (11)$$

avec :

$$\varepsilon_t \sim BBN$$

$$V(\varepsilon_t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Pour vérifier la stationnarité de notre processus, calculons le déterminant du polynôme en z :

$$\det\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix} Z\right\} = \det\begin{bmatrix} 1 - 1{,}2Z & 0{,}4Z \\ -0{,}5Z & 1 - 0{,}3Z \end{bmatrix}$$

$$\det = 0{,}56Z^2 - 1{,}5Z + 1 \qquad (12)$$

Les deux racines de l'équation ci-dessus,

$$Z_1 = \frac{1{,}5 + 0{,}1}{2\,(0{,}38)} = 3{,}09$$

et

$$Z_2 = \frac{1{,}5 - 0{,}1}{2\,(0{,}38)} = 1{,}84,$$

sont supérieures à un. Le processus est donc stationnaire d'ordre deux. La génération d'un échantillon de 200 observations (cf. Annexe 1[1]) permet de construire un VAR (1) dont l'estimation par les m.c.o.[2] est :

1. Des données simulées sont disponibles, sur demande aux auteurs (UFR de Sciences Économiques, 39, rue de l'Université, 34060 Montpellier Cedex).

2. Les estimateurs par les m.c.o. et les représentations graphiques sont issus du logiciel TSP.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1,\,t} &= \underset{(50.886)}{1{,}193\,6}\; y_{1,\,t-1} - \underset{(-14{,}503\,5)}{0{,}389\,9}\; y_{2,\,t-1} \\ \hat{y}_{2,\,t} &= \underset{(10{,}917)}{0{,}522\,1}\; y_{1,\,t-1} + \underset{(5{,}722\,5)}{0{,}313\,7}\; y_{2,\,t-1} \end{aligned} \tag{13}$$

Pour démarrer les calculs au moyen du filtre de Kalman, on prend comme valeurs initiales :

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dans le tableau (1) on compare les estimateurs des m.c.o. pour $N = 200$ avec ceux du F.K. pour la période la plus récente, c'est-à-dire $t = 200$; on constate que les estimateurs du F.K. sont aussi précis que ceux des m.c.o.

Tableau 1.

Méthode	*Paramètres*	*Valeurs*	*Erreur relative*
Réels	ϕ_{11}	1,2	0
	ϕ_{12}	−0,4	0
	ϕ_{21}	0,5	0
	ϕ_{22}	0,3	0
m.c.o. $N = 200$	$\hat{\phi}_{11}$	1,196 3	$-5{,}33 \times 10^{-3}$
	$\hat{\phi}_{12}$	−0,389 9	$-2{,}51 \times 10^{-2}$
	$\hat{\phi}_{21}$	0,522 1	$4{,}42 \times 10^{-2}$
	$\hat{\phi}_{22}$	0,313 7	$4{,}56 \times 10^{-2}$
F.K. $t = 200$	$\hat{\phi}_{11}$	1,193 3	$-5{,}58 \times 10^{-3}$
	$\hat{\phi}_{12}$	−0,389 7	$-2{,}57 \times 10^{-2}$
	$\hat{\phi}_{21}$	0,521 9	$4{,}38 \times 10^{-2}$
	$\hat{\phi}_{22}$	0,313 7	$4{,}56 \times 10^{-2}$

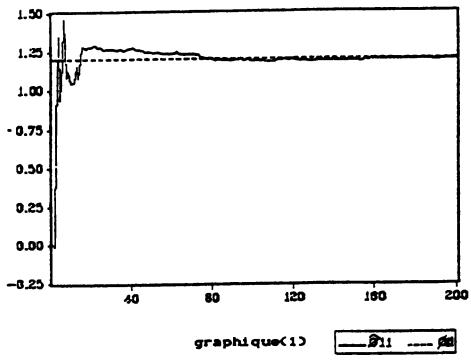
La comparaison des sommes des carrés des résidus (tableau 2) met en évidence l'avantage de recourir au F.K. par rapport aux m.c.o. Nous expliquons ce résultat par le caractère auto-adaptatif du F.K. qui implique que l'estimation des paramètres est

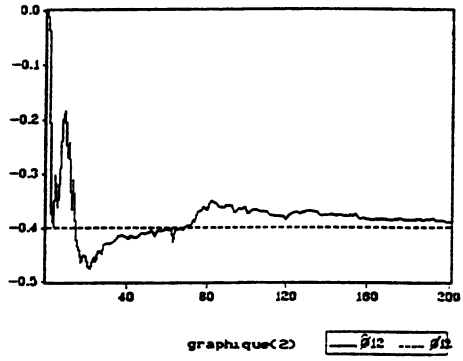
corrigée à chaque période en fonction des erreurs d'estimation commises à la période précédente[1].

Tableau 2

	m.c.o.	F.K.
SCR1	179,19	170,33
SCR2	744,92	701,91

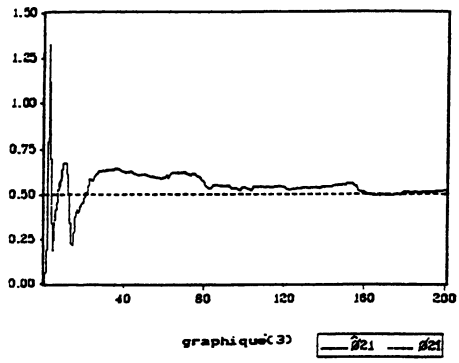
La convergence de l'algorithme du F.K. peut être analysée au moyen des graphiques suivants qui représentent la valeur estimée d'un paramètre en fonction de la taille de l'échantillon. On constate que la vitesse de convergence, vers la valeur réelle du paramètre, n'est pas la même pour tous les estimateurs. Ainsi par exemple, la convergence de $\hat{\phi}_{11}$ (graphique 1) est plus rapide que celle des autres estimateurs.

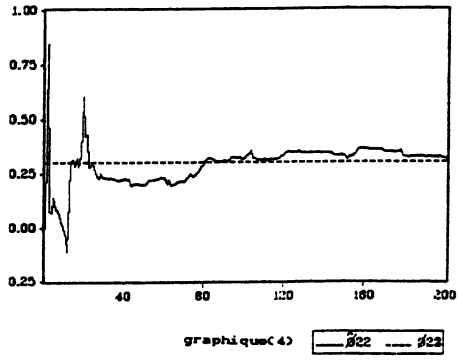




1. On peut noter aussi (cf. tableau 3 ci-dessous) que les différents tests statistiques effectués sur les résidus des modèles estimés confirment l'hypothèse d'un bruit blanc normal.

Méthode		*Stat. Ljung-Box* $k = 20$	*Moyenne*	*Stat. Jarque-Bera*
m.c.o.	$\hat{e}1$	18,22	0,036	0,040 49
	$\hat{e}2$	11,95	−0,154	2,376 3
F.K.	$\hat{e}1$	18,84	0,153	0,038 45
	$\hat{e}2$	13,67	−0,131 9	1,461 8





Il semble évident qu'une taille importante de l'échantillon soit nécessaire pour assurer la convergence de tous les estimateurs et pour amortir l'effet des valeurs initiales. Pour surmonter cette difficulté, on propose d'utiliser, dans le cas des petits échantillons, les estimateurs des m.c.o. comme valeurs initiales pour démarrer le F.K. On peut alors augmenter de manière considérable la vitesse de la convergence (pour un exemple, voir annexe 2).

Supposons à présent que l'on dispose de 10 nouvelles observations et que l'on veuille mettre à jour les estimateurs en tenant compte de ces informations. Si on utilise la méthode des m.c.o., on ajoute les 10 nouvelles observations aux 200 précédentes et on estime le nouveau modèle. Nous obtenons :

$$\underset{}{\widehat{y}_{1,\,t}} = \underset{(51.67)}{1{,}187\,2}\ y_{1,\,t-1} \underset{(-14{,}695)}{-\,0{,}379\,9}\ y_{2,\,t-1}$$

$$\underset{}{\widehat{y}_{2,\,t}} = \underset{(11{,}031)}{0{,}523}\ y_{1,\,t-1} + \underset{(5{,}891)}{0{,}315}\ y_{2,\,t-1}$$

Avec le filtre de Kalman l'historique de X_t ($t < 200$) ne joue aucun rôle. En effet, on utilise dans ce cas comme valeurs initiales :

$$\widehat{X}_{200/200} = \begin{bmatrix} 1{,}193\,3 \\ -\,0{,}389\,7 \\ 0{,}521\,9 \\ 0{,}313\,7 \end{bmatrix}$$

$$P_{200/200} = \begin{bmatrix} 0{,}000\,6 & -\,0{,}000\,5 & 0 & 0 \\ -\,0{,}000\,5 & 0{,}000\,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}002\,4 & -\,0{,}002 \\ 0 & 0 & -\,0{,}002 & 0{,}003\,2 \end{bmatrix}$$

On obtient alors les estimateurs successifs correspondants aux nouvelles observations :

Les estimateurs du F.K.

obs	$\widehat{\phi}_{11}$	$\widehat{\phi}_{12}$	$\widehat{\phi}_{21}$	$\widehat{\phi}_{22}$
200	1,193 300	- 0,389 700	0,521 900	0,313 700
201	1,193 605	- 0,390 277	0,521 400	0,314 645
202	1,193 025	- 0,389 470	0,526 128	0,308 080
203	1,192 916	- 0,388 854	0,526 166	0,307 863
204	1,193 189	- 0,388 608	0,526 829	0,308 459
205	1,193 275	- 0,389 018	0,527 446	0,305 497
206	1,193 196	- 0,388 981	0,529 829	0,304 361
207	1,190 321	- 0,383 785	0,524 042	0,314 818
208	1,188 902	- 0,381 440	0,524 938	0,313 337
209	1,188 433	- 0,380 861	0,524 680	0,313 655
210	1,187 017	- 0,379 595	0,523 145	0,315 027

CONCLUSION

Nous avons examiné dans cet article la possibilité d'estimer les paramètres d'un modèle VAR au moyen du filtre de Kalman. Dans ce cas les paramètres constituent le vecteur des variables d'états dans une représentation Espace d'États du modèle VAR.

Les résultats obtenus dans notre exemple nous permettent de conclure que les estimateurs du F.K. sont aussi précis que ceux des m.c.o. Toutefois, dans le cas des petits échantillons, le nombre d'observations ne garantit pas la convergence de l'algorithme, à moins que l'on puisse disposer d'une information a priori sur le vecteur d'états. Dans ce cas, on peut par exemple utiliser les estimateurs des m.c.o. comme valeurs initiales. La convergence de l'algorithme est alors améliorée.

Mais l'intérêt essentiel du filtre de Kalman, réside dans sa récursivité qui présente deux avantages. Elle permet, d'une part, la mise à jour, presque immédiate, des paramètres estimés dès que l'on dispose d'une nouvelle observation et ceci sans avoir recours aux observations antérieures. D'autre part, les dimensions des matrices qui interviennent dans le calcul du F.K. ne dépendent pas du nombre d'observations et par conséquent, elles restent moins importantes que dans le cas des m.c.o. Cette caractéristique constitue un avantage non négligeable du point de vue du temps de calcul sur ordinateur.

BIBLIOGRAPHIE

AOKI M. ans HAVENNER A. (1991) "State Space Modeling of Time Series", *Econometric Reviews,* 1-59.

CHATFIELD C. (1989) "The Analysis of Time Series : An Introduction", London : Chapman and Hall.

CROMWELL J.B., LABYS W. and TERRAZA M. (1993) "Univariate Tests for Time Series Models", Sage publication, Beverly Hills.

CROMWELL J.B., HANNAN M., LABYS W. and TERRAZA M. (1993) *Multivariate Tests for Time Series Models*, Sage publication, Beverly Hills.

CUTITBERSTON K., HALL S.G. ans TAYLOR R.P. (1992) *Applied Econometric Technique*, Philip Allan.

GOURIEROUX C. et MONFORT A. (1990) *Séries temporelles et modèles dynamiques,* Economica, Paris.

GRANGER C. (1969) "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods", *Journal of Econometrics,* 424-438.

GUNEL I. (1987) "Forecasting System Energy Demand", *J. of Forecasting,* 137-156.

HARVEY A.C. (1990) *Forecasting, Structural Time Series Models and The Kalman Filter*, Cambridge Univerty Press.

KALMAN R.E. (1960) "A New Approach of Linear Filtering and Prediction Problem", *J. of Basic Engineering,* 34-45.

KALMAN R.E. and BUCY R.S. (1961) "New Results in Linear Filtering and Prediction theory", *J. of Basic Engineering,* 95-108.

MARHIS A. (1990), *Une approche en terme de processus stochastiques vectoriels de la dette publique française,* Thèse, E.H.E.S.S. Paris.

MONFORT A. (1990) *Les axes de développement des méthodes macroéconométriques,* INSEE, Doc. de travail n°9014.

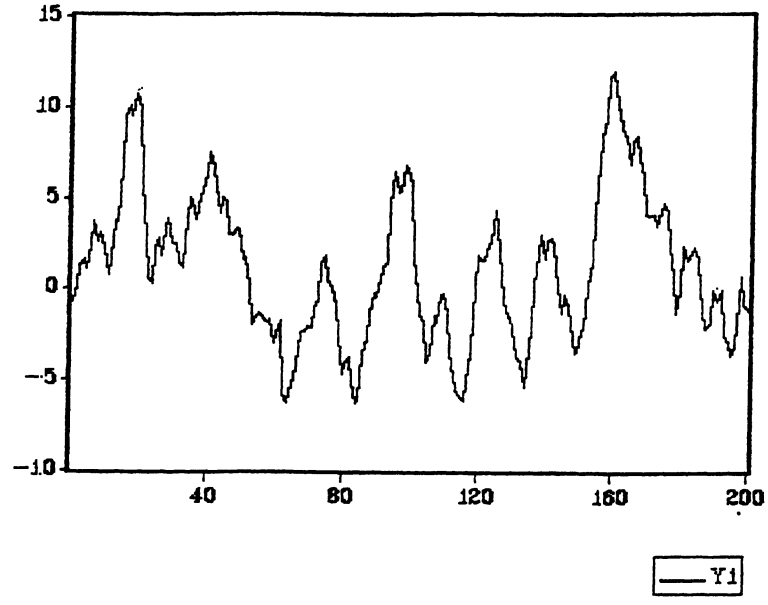
NELSON R. (1987) "State-Space Modeling of Residential, Commercial and Peak Demands", *J. of Forecasting,* 97-115.

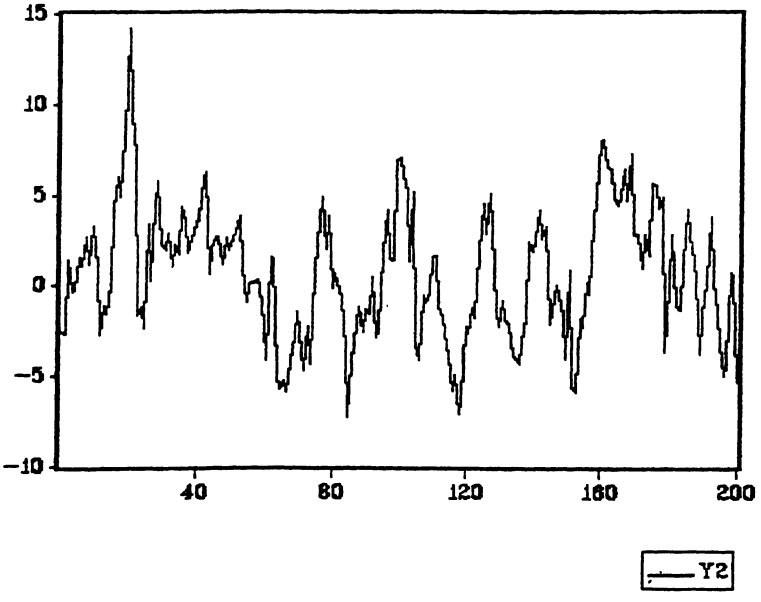
OTTER P.W. (1985) *Dynamic Feature Space Modelling, Filtering and Selftuning Control of Stochastic Systems*, Springer Verlag Heidelberg.

SIMS C. (1980) "Macroeconomics and Reality", *Econometrica,* 1-48.

ANNEXE 1

Graphiques des données simulées.



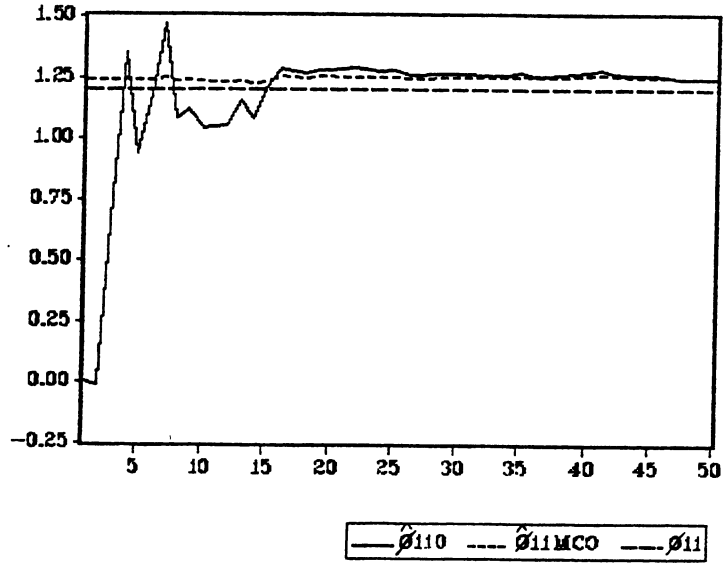


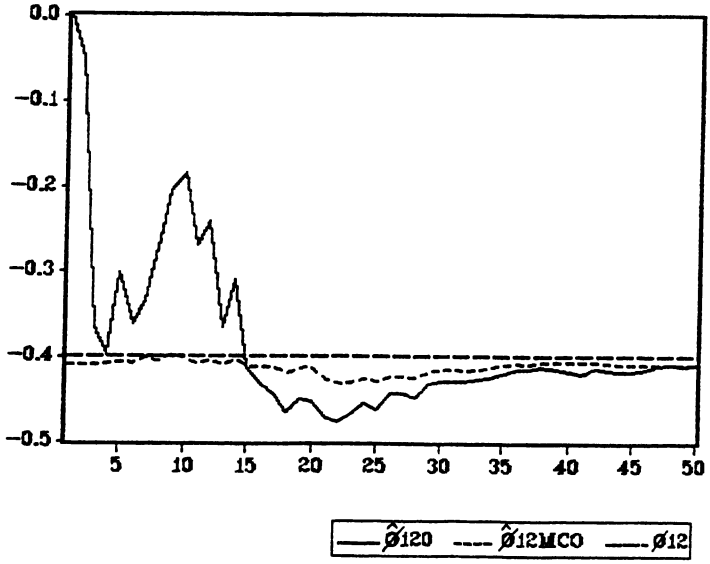
ANNEXE 2

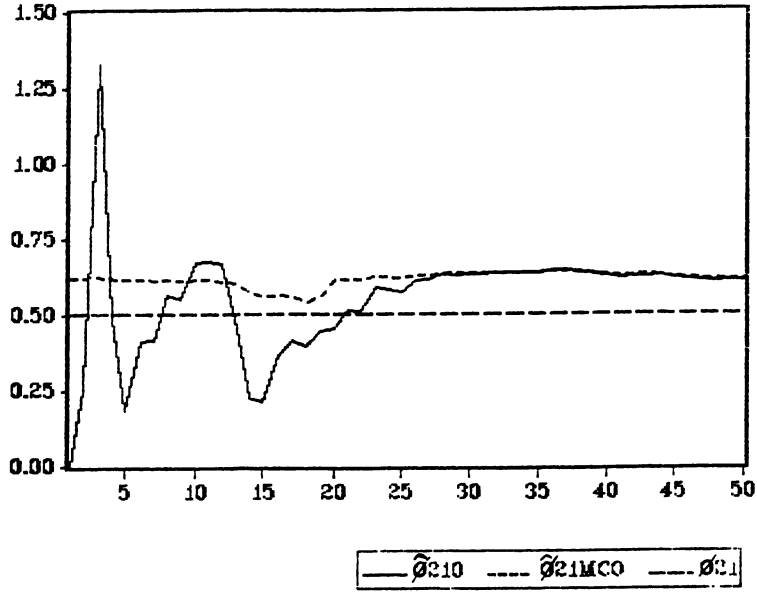
Exemple d'estimation avec petit échantillon simulé.

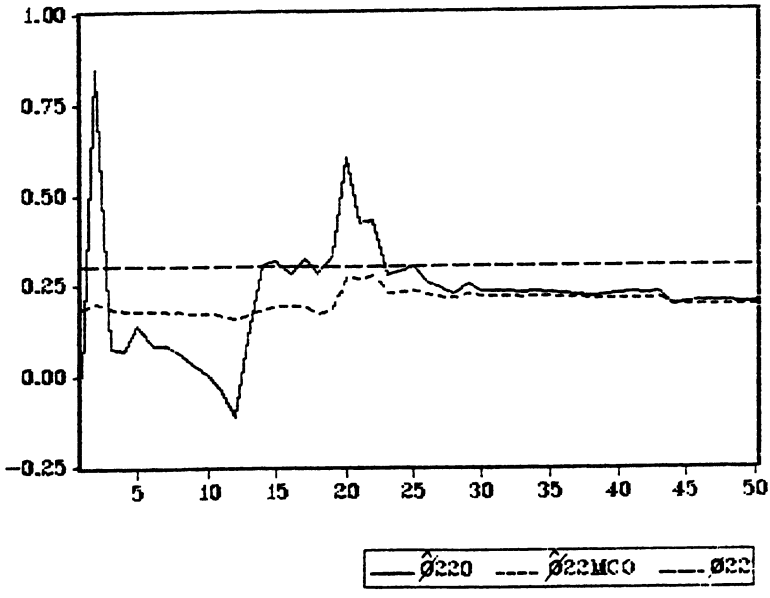
Les graphiques ci-dessous montrent les estimateurs du F.K. pour un échantillon de 50 observations.

Où $\widehat{\phi}_{ijO}$ désigne les estimateurs du F.K., avec des valeurs initiales $\phi_{ij/O} = 0$, et $\widehat{\phi}_{ijmco}$ désigne les estimateurs du F.K., avec les estimateurs des m.c.o. comme valeurs initiales.






1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
$\hat{\phi}_{210}$
$\hat{\phi}_{21MCO}$
ϕ_{21}


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
$\hat{\phi}_{220}$
$\hat{\phi}_{22MCO}$
ϕ_{22}