JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

LUCIEN AMY

La statistique des images

Journal de la société statistique de Paris, tome 90 (1949), p. 92-120

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1949__90__92_0>

© Société de statistique de Paris, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

V

LA STATISTIQUE DES IMAGES

PREMIÈRE PARTIE

I. — Introduction.

Objet du travail. — Il arrive, dans un très grand nombre de domaines, que l'on dispose d'un certain nombre d'objets différents les uns des autres mais possédant un certain nombre de caractères communs. La statistique, telle qu'on l'entend au sens habituel du mot, consiste à étudier les variations d'un ou de plusieurs paramètres de cette collection d'objets. Par exemple, si nous considérons un certain nombre d'hommes, la biométrie s'occupera de la répartition des tailles, des longueurs de bras, des diamètres céphaliques et des corrélations entre ces trois ou quatre paramètres. Mais le nombre de paramètres ainsi étudiés reste toujours limité à un très petit nombre et ne donne nullement un aspect général des objets, soumis à l'étude statistique. C'est cet aspect général que nous nous proposons d'étudier dans cet exposé.

Historique. — Un tel problème a déjà préoccupé un certain nombre de chercheurs et a reçu des solutions partielles. C'est ainsi que, vers la fin du siècle dernier, on a cherché à définir sous le nom de biotype une image dite moyenne d'un groupe d'individus appartenant par exemple à la même race ou plus simplement à la même famille. La méthode photographique utilisée, dont nous reparlerons en détail, est la photographie composite. Elle a été remise en honneur ces dernières années par les astronomes, ces maîtres de la photographie, et a donné entre leurs mains des résultats remarquables pour la reproduction des objets stellaires ou même pour des opérations géodésiques plus terre à terre comme la photographie des horizons à très grande distance.

Dans un ordre d'idées très différent, notre distingué Président, M. le professeur Fréchet, au cours d'un récent exposé, nous a entretenu des premiers résultats qu'il avait obtenus par décomposition des contours crâniens en séries circulaires périodiques; lors de la discussion qui a suivi, de nombreux collègues ont insisté sur l'intérêt général de cette question.

Nous avons été nous-mêmes amenés à étudier la photographie composite pour une question d'expertise judiciaire dont nous reparlerons tout à l'heure. En approfondissant cette méthode et en cherchant à la généraliser, nous avons obtenu des résultats qui nous ont paru intéressants au point de vue théorique comme au point de vue pratique et dont les applications apparaissent, dès maintenant, aussi nombreuses que variées. Nous ajoutons, et ce n'est pas à nos yeux leur moindre intérêt, que les moyens techniques utilisés sont souvent extrêmement simples puisqu'ils peuvent se réduire à quelques feuilles de papier calque.

Les éléments d'une image. — Si une image plane doit être considérée théori-

quement comme formée d'un nombre infini de points, on peut pratiquement en limiter le nombre mais celui-ci doit rester assez élevé si l'on veut obtenir une image un peu détaillée. Les simili-gravures des journaux comportent 25 points au centimètre soit 625 au centimètre carré. Une image de faible étendue (15 × 10 cm) comporte donc déjà près de 100.000 points. En télévision, où l'on peut, à cause du mouvement, accepter une granulation un peu plus élevée, on estime cependant que 10.000 points représentent le minimum acceptable. Si l'image est réduite à une simple ligne, 25 points par centimètre représentent encore un millier de points pour un contour même très simple. Or, dans une série d'images d'objets de même nature, les points homologues n'occupent pas en général la même position et il faut deux paramètres pour définir la position de chaque point. Il en faut un troisième pour définir l'éclat de ce point si l'on ne tient pas compte de la couleur, il en faudrait au moins deux autres si l'on tenait également compte de cette dernière propriété (nous nous limiterons d'ailleurs aux images noir et blanc dans cette étude). Ainsi une image de n points est définie par $3\ n$ paramètres.

Une étude statistique intégrale d'un groupe d'images devrait consister à dresser autant de tableaux de $3\ n$ variables que l'on a d'images, puis à étudier ces $3\ n$ variables aléatoires, calculer leurs moyennes, leurs écarts moyens, leurs coefficients de corrélation, etc... Ce serait là un travail gigantesque qui demanderait une armée de calculateurs disposant d'innombrables machines. Le travail achevé, le chercheur se trouverait en présence de milliers de pages de résultats numériques. Il faudrait une intelligence comparable à celle imaginée par Laplace (1) pour pouvoir interpréter ces tableaux. Paraphrasant une phrase célèbre de Lord Kelvin, nous dirons que pour une intelligence humaine serait bien pauvre notre connaissance des images que celle qui ne s'exprimerait que par des chiffres.

Les statisticiens sont trop familiarisés avec l'emploi des diagrammes et des graphiques pour ne pas penser immédiatement que la seule manière d'utiliser de tels tableaux de chiffres consisterait à les traduire en images. Par exemple, les valeurs moyennes permettraient de tracer une image moyenne. Voici un exemple précis tout à fait caractéristique qui illustre l'impossibilité pratique de remplacer une image par des tableaux de chiffres. Parmi les inventions de Bertillon, il en est une, peu connue en dehors des milieux criminalistiques, le portrait parlé, qui consiste à décrire complètement la physionomie d'un individu en détaillant minutieusement chacune de ses parties : nez, yeux, oreilles, etc... Le système donne des résultats excellents puisque la seule description d'un visage, suivant le système Bertillon, permet à un policier de retrouver à coup sûr un individu qu'il n'a jamais vu au préalable. Cependant, l'expérience montre que le policier ne se fait qu'une idée de la physionomie de l'individu dont il a le signalement. Il identifie l'individu par ses détails, l'allure générale lui échappe et le portrait parlé ne remplace en aucune façon une simple photogra-

(1) « Une intelligence qui pour un instant donne connaîtrait toutes les forces dont la nature est animee et la situation respective des êtres qui la composent, si, d'ailleurs, elle etait assez vaste pour soumettre ces donnees a l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus leger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passe, serait present à ses yeux. »

phie. C'est pour la même raison qu'aucun maquillage ne permet à l'individu de se dissimuler à qui n'utilise que le portrait parlé.

Mais supposons que pour une question particulièrement importante on accepte de faire le travail gigantesque dont je vous parlais tout à l'heure et que l'on dispose des moyens nécessaires pour y arriver. Toute difficulté ne serait pas encore écartée. Il serait encore indispensable de définir les points homologues sans ambiguité et vous verrez qu'il est très délicat, dans bien des cas, d'y parvenir sans arbitraire. On peut éviter ces difficultés d'un certain nombre de manières. Celles-ci consistent à limiter le nombre de paramètres étudiés. Elles sont donc applicables surtout à des images simplifiées. Mais même en se limitant à des lignes aussi simples qu'un contour de tête, le nombre de paramètres est déjà élevé, leur calcul fort long et l'interprétation difficile.

La méthode que nous allons exposer consiste à obtenir directement cette image moyenne sans aucun calcul, elle écarte dans certains cas la difficulté relative aux points homologues car elle évite de les définir et enfin elle permet, en même temps, de connaître les fluctuations des images individuelles autour de cette image moyenne.

Par contre, elle ne permet qu'une étude statistique partielle du groupe d'images. Si l'on obtient facilement une image moyenne, que l'on peut définir et obtenir en même temps des écarts dans le cas des images linéaires, la méthode ne donne directement aucune indication sur les coefficients de corrélation.

Nous nous limiterons, dans cette première partie, aux images linéaires, c'est-à-dire réduites à une ou plusieurs lignes, par opposition aux images non-linéaires, c'est-à-dire dont les points remplissent complètement une portion du plan. D'autre part, nous dirons que des images sont repérées si l'on sait, sans ambiguité, la position que doit occuper chacune d'elles lorsqu'on les a substituées les unes aux autres. Des images sont dites non-repérées s'il est nécessaire de faire une convention à ce sujet ou de définir le repérage par le calcul d'une certaine fonction. Précisons bien que le repérage des images est un problème différent de la correspondance entre points homologues.

II. — Images linéaires repérées.

Considérations théoriques. — Imaginons que des dessins soient repérés et que nous les tracions sur une même feuille de papier. A condition de définir une loi de correspondance convenable entre les points homologues, on pourrait définir la ligne moyenne comme le centre de gravité de tous ces points homologues. Ce procédé, bien qu'un peu long, serait relativement simple mais se heurte à la difficulté de définir les points homologues.

Considérons, par exemple, les trois images suivantes qui sont extraites d'une série de lettres dactylographiées agrandies que nous étudierons plus loin (fig. 1). Il est facile au niveau AB de calculer le point moyen relatif aux trois lignes. Mais il devient très difficile de le faire suivant CD. Pour trouver sur la ligne n° 1 les points correspondants aux parties droites et gauches, il faut introduire une coupure arbitraire. Il en faut réciproquement une autre pour distinguer, sur les deux lignes 2 et 3, celles qui correspondent aux zones inférieures et supérieures.

Nous avions tout d'abord imaginé d'appliquer directement à ces dessins le principe des photographies composites, c'est-à-dire de photographier, sur une même émulsion, toutes les images superposées. A condition d'opérer sur un très grand nombre d'images on obtient une ligne moyenne plus foncée au centre et dégradée sur les bords. La ligne de noircissement maximum correspond à la ligne moyenne et la largeur du dégradé aux écarts.

Cette méthode n'est pratiquement utilisable que si l'on dispose d'un nombre considérable d'images. En outre, le résultat obtenu dépend de la largeur du trait. Il importe donc que celui-ci soit tracé très régulièrement.

On s'affranchit de cet arbitraire en considérant chaque ligne comme le lieu des points séparant deux zones, une zone externe et une zone interne. Supposons, par exemple, que la zone interne soit dessinée en noir et la zone externe en blanc puis formons avec ces dessins une photographie composite. Dès que

Fig. 2.

l'on a un grand nombre d'images, dépassant une trentaine, on obtient une zone dégradée qui paraît assez régulière et qui sépare le centre noir de l'extérieur blanc. La ligne moyenne peut alors se définir comme celle du milieu du dégradé (fig. 2).

Si l'on examine de plus près ce dégradé, on voit naturellement qu'il est formé de bandes bien délimitées, de couleur homogène et de plus en plus claires au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre. Pour un nombre d'images suffisantes, par exemple une centaine, les limites des zones ont pratiquement complètement disparu.

Supposons alors qu'en chaque point de la photographie, nous élevions une perpendiculaire sur laquelle nous porterons un segment proportionnel au noircissement en ce point. L'extrémité de ces segments dessine une surface qui est caractéristique du groupe d'images considéré.

La photographie composite n'est qu'un moyen d'obtenir cette surface dont

la définition et l'interprétation doivent faire l'objet d'une étude indépendante du moyen pratique qui a servi à l'obtenir.

Supposons donc que l'on ait n images superposées en repérage sur le même plan. Soit M un point de ce plan, p le nombre d'images à l'intérieur desquelles se tienne M. Élevons en M une perpendiculaire sur laquelle nous porterons une longueur MN proportionnelle à p/n. Le lieu du point N n'est autre que la surface caractéristique précédente que nous appellerons, en raison de son mode d'obtention, surface de probabilité du groupe d'images considéré.

On peut facilement se rendre compte que la surface de probabilité ne fait intervenir que les valeurs moyennes des paramètres et les écarts de ces paramètres. La surface de probabilité ne tient pas compte des corrélations qui peuvent exister entre ces paramètres. Elle ne représente donc qu'un des aspects de la statistique des images.

Coupons la surface de probabilité par un plan parallèle au plan de base et situé à la distance ϖ de celui-ci. Projetons cette ligne de niveau sur une des images prise au hasard et considérons un point quelconque de cette projection. Il a la probabilité ϖ d'être intérieur à l'image et la probabilité $1 - \varpi$ d'être extérieur. Cette probabilité est constante pour tous les points de cette ligne. Pour cette raison nous appellerons les projections des lignes de niveau de la surface de probabilité, des lignes d'égale probabilité ou, par abréviation, des lignes de probabilité du groupe d'images. La projection d'une ligne de niveau ϖ est une ligne de probabilité ϖ.

La ligne de probabilité 0,5 est l'image moyenne ou plus correctement l'image médiane, la ligne moyenne proprement dite n'étant pas définie dans cette théorie.

OBTENTION DES LIGNES D'ÉGALE PROBABILITÉ

A. — *Méthode graphique.*

Reportons en repérage l'ensemble des n dessins linéaires dont nous disposons sur une même feuille de papier.

Supposons tout d'abord que les n lignes ne se coupent pas. Nous dirons qu'une ligne a le rang r si elle est intérieure à $r - 1$ ligne et extérieure à $n - r$. Les points de cette ligne sont donc situés sur le contour d'une image intérieure à $r-1$, images et extérieurs à $n-r$. Si r et n sont assez grands, on peut dire que cette ligne se confond avec la ligne de probabilité.

Il n'en est ainsi dans aucun des cas que nous avons étudiés jusqu'ici. Les lignes se coupaient toujours et s'enchevêtraient plus ou moins. Mais dans ce cas on peut encore tracer, à partir des contours des dessins primitifs une série de n lignes empruntant des éléments à plusieurs de ces contours et tel qu'aucun des éléments de la ligne de rang r ne soit extérieur à celle de rang $r-1$; tous ses points sont donc intérieurs, ou tout au plus situés sur la ligne de rang $r-1$ (fig. 3 et 4). Un point d'une telle ligne est encore situé sur le contour d'une image, intérieur à $r-1$ et extérieur à $n-r$. Si r et n sont assez grands, une telle ligne se confond avec la ligne de probabilité.

Lorsque r et n sont petits, cette opération est extrêmement simple. Après avoir tracé les n images primitives sur une première feuille de papier, il suffit de calquer une à une les lignes de rang successif. Mais dès que l'on a une vingtaine de lignes, le dessin devient inextricable. Il peut même le devenir avec des valeurs bien plus petites si les contours sont très irréguliers. La figure 5 donne un frag-

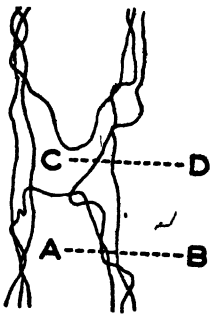

Fig. 1

Fig. 3

Fig. 4

SALLES D'ETUDES
FACULTE DE DROIT
ECONOMIQUES ET STATISTIQUES

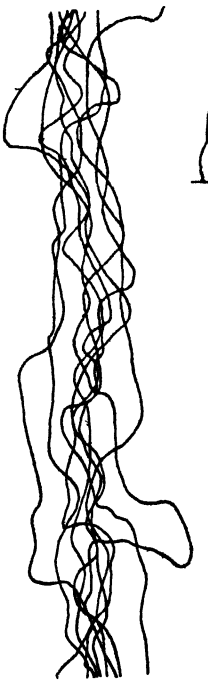

Fig. 5

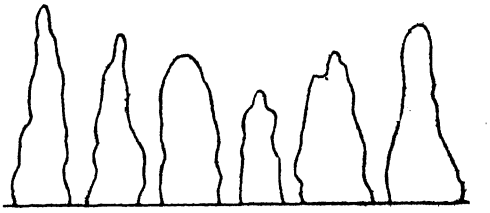

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

ment de 9 contours, extrait de l'exemple des lettres dactylographiées auquel nous avons déjà fait allusion. On voit qu'il n'est déjà pas très facile de tracer la ligne de rang 5. On peut améliorer un peu la lisibilité des dessins par l'emploi d'encres de couleur. Mais on ne saurait ainsi utiliser plusieurs dizaines de dessins, et nous allons voir qu'il est souhaitable de faire entrer dans le tracé des lignes de probabilité un nombre élevé de dessins (plusieurs centaines).

On est ainsi amené à fractionner la totalité des dessins en groupes d'un même nombre de dessins; dans chaque groupe on sélectionnera sur calque, par exemple, la ligne de même rang puis regroupant ces lignes provenant d'une première sélection, on fera une deuxième sélection. Si le nombre de dessins est assez élevé, on fera 3, 4... sélections successives.

Voici un premier exemple d'application.

Pour étudier l'ignifugation des tissus, nous avons mis au point un petit appareil qui se compose d'un cadre pour tendre verticalement les tissus et d'une lampe à flamme d'alcool. Le contrôle de l'ignifugation consiste à étudier la trace d'altération du tissu et spécialement la trace de carbonisation. Après de nombreux essais et compte tenu de la nécessité d'utiliser un appareil très simple, nous sommes arrivés à obtenir une flamme à peu près stable. Malgré cela les moindres variations dans la structure du tissu, la température ambiante, les mouvements de convection de l'air du laboratoire, etc... modifient sensiblement la forme des traces de carbonisation comme le montrent les quelques exemples de la figure 6 et la comparaison des différentes traces devient délicate. Pour interpréter correctement une image, il importe donc de connaître la trace type et les fluctuations normales des traces de carbonisation sur des tissus ayant les mêmes qualités d'ignifugation.

Nous avons copié les traces de carbonisation sur papier calque et tracé, suivant la méthode précédente, les lignes d'égale probabilité à partir d'une centaine d'images.

Voici par exemple comment se présentent les opérations successives pour la ligne médiane : la figure 7 donne 7 lignes primitives. Sur cette image nous retenons la ligne de rang 4; 5 de ces lignes sélectionnées sont groupées dans la figure 8 et nous retenons celle de rang 3. On voit l'amélioration très appréciable obtenue par cette double sélection. Finalement, nous avons obtenu les lignes de probabilité de la figure 9. Les probabilités indiquées le long des lignes ainsi obtenues ont été calculées en tenant compte des corrections indiquées plus loin.

L'interprétation des images à l'aide de ces lignes de probabilité a déjà permis des conclusions importantes au point de vue de l'étude des tissus, conclusion qu'il aurait été impossible de soupçonner autrement, et dont l'exposé sortirait du cadre de cette étude. A simple titre indicatif, nous dirons que la trace d'altération sur tissu incombustible (soie de verre ou d'amiante) est identique à la trace d'altération partielle sur tissu de coton ignifugé et non, comme nous le pensions, à la trace de carbonisation. La flamme garde donc les mêmes dimensions avec un tissu incombustible ou un tissu ignifugé, ce qui montre que ces derniers ne fournissent aucun aliment à la flamme (fig. 10).

Cette manière d'opérer, par fractionnement en groupe d'images est légitime sous les réserves suivantes :

1° La ligne finalement sélectionnée présente autour de la ligne de probabilité théorique correspondante des fluctuations plus importantes que si l'on effectuait la sélection en une seule opération;

2° La ligne de probabilité vers laquelle on tend après des sélections multiples est différente de celle que l'on aurait obtenue par une sélection unique.

Nous supposerons, dans l'étude de ces deux points, que les dessins primitifs

ne se coupent pas. S'il n'en était pas ainsi, il suffirait de décomposer les images en autant de fragments qu'il serait nécessaire pour qu'il n'y ait pas d'intersec-

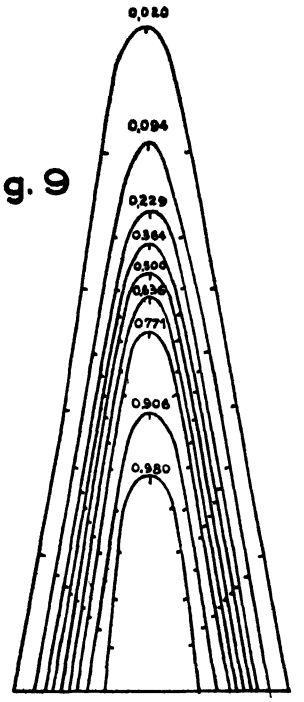

Fig. 9

Fig. 11

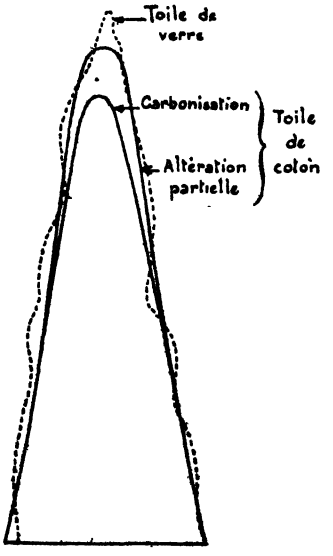

Fig. 10

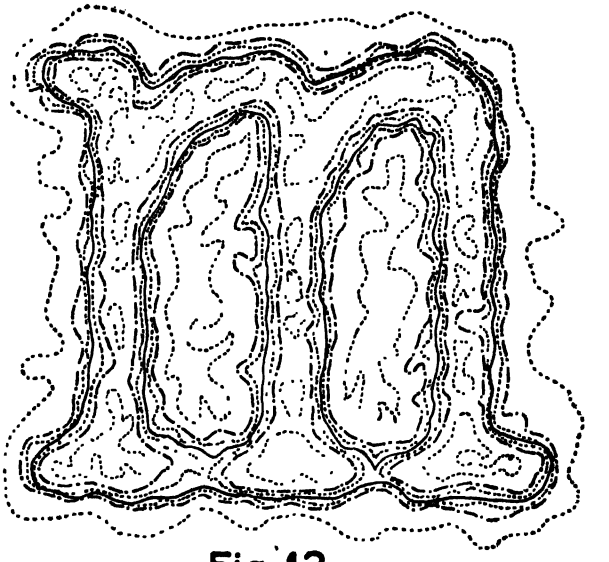

Fig. 12

tion. Les propositions précédentes établies pour chacun des fragments seraient encore vraies pour l'ensemble des images :

1° Considérons un groupe de 9 lignes. La médiane est celle de rang 5. Si nous décomposons en trois groupes de 3 lignes que nous prenions la médiane de

chaque groupe, puis la médiane des médianes, nous pourrons sélectionner la ligne de rang 4. Il suffira, en effet, que les 3 groupes constitués au hasard contiennent respectivement les lignes de rang :

1, 2, 5 3, 4, 6 7, 8, 9

les médianes seront 2, 4 et 6 et nous aurons sélectionné finalement la ligne ou la fraction de ligne de rang 4.

On voit de même que le groupement primitif :

1, 3, 4 2, 6, 7 5, 8, 9

conduirait à sélectionner la ligne de rang 6.

Un calcul élémentaire montre que les probabilités de ces éventualités sont respectivement :

0,214 pour les lignes de rang 4 et 6,
0,572 pour la ligne de rang 5.

La même opération effectuée sur 27 images linéaires sélectionnées en trois fois : 9 groupes de 3 images puis 3 groupes de 3 médianes et finalement 3 images sélectionnées deux fois donne respectivement les probabilités suivantes :

Rang de la ligne sélectionnée	Probabilité
8 et 20	0,0005
9 et 10	0,0067
10 et 18	0,0240
11 et 17	0,0609
12 et 16	0,1193
13 et 15	0,1825
14	0,2122

On voit que l'on n'a qu'un peu plus d'une chance sur cinq de sélectionner, dans ce cas, la véritable médiane. Si les lignes se coupent, la médiane obtenue sera formée de fragments qui appartiendront aux lignes de rang 8, 9..., 20 et la ligne finalement retenue s'écartera plus de la ligne théorique que la véritable moyenne.

Essayons de préciser cette notion :

Supposons connues les lignes de probabilité et soit un point M sur la ligne p. Traçons de M comme centre une circonférence de diamètre dp. La probabilité pour qu'un dessin pris au hasard coupe cette circonférence est dp. La probabilité pour que sur n dessins il y en ait au moins un est

$$1 - (1 - dp)^n = n\,dp$$

à un infiniment petit près du second ordre.

Pour que ce soit la ligne de rang r qui coupe cette circonférence, il faut que le point M soit intérieur à $r-1$ dessins et extérieur à $n - r$. La probabilité de cette double éventualité est :

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}\,p^{r-1}\,q^{n-r} \qquad (q = 1 - p)$$

La probabilité pour que la ligne de rang r coupe la circonférence est donc :

$$d\,p_1 = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\,p^{r-1}\,q^{n-r}\,dp. \qquad (1)$$

Développons dans cette formule les factoriels suivant la formule de Stirling et posons :

$$p' = \frac{r-1}{n-1}, \qquad q' = \frac{n-r}{n-1}.$$

Il vient après simplification :

$$dp_1 = n\left(\frac{p}{p'}\right)^{r-1}\left(\frac{q}{q'}\right)^{n-r}\sqrt{\frac{(n-1)}{2\,\pi\,(r-1)\,(n-r)}}\,\frac{1+\Theta\,(n-1)}{[1+\Theta\,(r-1)]\,[1+\Theta\,(n-r)]}\,dp.$$

On peut écrire :

$$\left(\frac{p}{p'}\right)^{r-1}\left(\frac{q}{q'}\right)^{n-r} = \left[\left(\frac{p}{p'}\right)^{p'}\left(\frac{q}{q'}\right)^{q'}\right]^{n-1} = \lambda^{n-1}$$

λ est maximum et égal à 1 pour $p = p'$ et $q = q'$. Donc $\lambda < 1$ pour toute autre valeur $d\,p_1$ tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment sauf pour $p = p'$. Supposons qu'il en soit ainsi :

$$d\,p_1 = n\,\sqrt{\frac{1}{2\,\pi\,pq\,(n-1)}}\,\frac{1+\Theta\,(n-1)}{[1+\Theta\,(r-1)]\;[1+\Theta\,(n-r)]}\,dp.$$

Le coefficient de dp augmente indéfiniment avec n pour $p = p'$. Il tend vers zéro pour toute autre valeur.

D'autre part, on peut écrire en limitant le développement des expressions en Θ aux termes en $1/n$.

$$\frac{1+\Theta\,(n-1)}{[1+\Theta\,(r-1)]\;[1+\Theta\,(n-r)]} \# 1 - \frac{1}{12\,(r-1)} - \frac{1}{12\,(n-r)} + \frac{1}{12\,(n-1)} =$$

$$1 - \frac{1}{12\,(n-1)}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 1 - \frac{1}{12\,(n-1)}\,\frac{1-pq}{pq} \# \sqrt{1 - \frac{1-pq}{6\,(n-1)\,pq}}$$

d'autre part

$$n^2 = (n-1)^2 + 2\,(n-1) + 1 \# (n-1)^2\left[1 + \frac{2}{n-1}\right]$$

d'où

$$dp_1 = \sqrt{\frac{n-1}{2\,\pi\,pq}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)\left[1 - \frac{1-pq}{6\,(n-1)\,pq}\right]}\,dp$$

$$dp_1 = \sqrt{\frac{n-1}{2\,\pi\,pq}\left(1 + \frac{2}{n-1} - \frac{1-pq}{6\,(n-1)\,pq}\right.}\,dp$$

$$dp_1 = \sqrt{\frac{(6\,n+7)\,pq - 1}{12\,\pi\,p^2\,q^2}}\,dp. \qquad (2)$$

Dans le cas de la médiane $p = q = \frac{1}{2}$:

$$dp_1 = \sqrt{\frac{2\,n+1}{\pi}}\,dp \qquad (3)$$

expression qui reste valable même pour les très petites valeurs de n comme le montre le tableau I.

Tableau I.

n	$\sqrt{\frac{2n+1}{\pi}}$	$\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
3	1,493	1,500
5	1,871	1,875
7	2,185	2,187
9	2,459	2,461
11	2,706	2,707
13	2,932	2,933
15	3,141	3,142
17	3,338	3,338

On peut facilement se rendre compte, par cette formule, de ce que l'on perd lorsque l'on opère la sélection par fractionnement.

Si n est assez grand, on peut écrire la formule (3).

$$dp_1 = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, dp.$$

Remplaçons un système de n_1 groupes de n images par un groupe unique de x images donnant la même dispersion. On aura :

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\sqrt{\frac{2n_1}{\pi}} \qquad x = \frac{2}{\pi}\, nn_1 \# 0{,}637\, nn_1.$$

Le fractionnement fait donc perdre le bénéfice de 36,3 % des images. Un fractionnement double en ferait perdre 59,3 %.

On observerait des résultats du même ordre pour la formule (2) mais un peu plus compliqués en raison des corrections à faire subir à p et q que nous allons maintenant étudier.

2° Revenons à la formule (1) et calculons la valeur la plus probable obtenue avec fractionnement :

La probabilité pour que la r ème ligne soit extérieure au point M est évidemment l'intégrale.

$$p_1 = \int_{p=0}^{p=p} dp_1.$$

Considérons alors un certain nombre n_1 de groupes de n images dont on a sélectionné la r ème. Un raisonnement analogue à celui qui a donné la formule (1) montre que la probabilité pour que la ligne de rang r_1 du groupe des n_1 images sélectionnées coupe le cercle de centre M et de diamètre dp_1 est :

$$dp_2 = \frac{n_1!}{(r_1-1)!\,(n_1-r_1)!}\, p_1^{r_1-1}\, q_1^{n_1-r_1}\, dp_1 \qquad (4)$$

avec

$$q_1 = 1 - p_1$$

et l'on poursuivrait indéfiniment. On sait que p_2 est maximum pour $p_1 = \frac{r_1 - 1}{n_1 - 1}$ de telle sorte que la valeur la plus probable de p sera donnée par l'équation :

$$\int_o^p dp_1 = \frac{r_1 - 1}{n_1 - 1}.$$

On aurait de même :

$$\int_o^{p_1} dp_2 = \frac{r_2 - 1}{n_2 - 1}$$

pour la valeur maxima de p_1 et ainsi de suite.

Pratiquement, dès la troisième sélection, sinon la deuxième, on choisira toujours la médiane, ce qui conduit à :

$$p_i = p_{i-1} - 1 = \ldots\ldots = p_2 = p_1 = \frac{1}{2}$$

et l'on aura :

$$\int_o^p dp_1 = \frac{1}{2}.$$

D'une manière générale on est amené à résoudre l'équation :

$$\int_o^{p_1} dp_1 = \lambda.$$

Remplaçant dp_1 par sa valeur tirée de l'équation (1) :

$$\frac{A_n^r}{(r-1)!} \int_o^p p^{r-1} q^{n-r}\, dp = \lambda$$

$$\frac{A_n^r}{(r-1)!} \int_q^1 (1-q)^{n-1} q^{n-r}\, dq = \lambda$$

$$\frac{A_n^r}{(r-1)!} \int_q^1 \sum_{i=o}^{i=n-1} (-1)^i C_{n-1}^i\, q^{n-r+i}\, dq = \lambda$$

$$\frac{A_n^r}{(r-1)!} \left[\sum_{i=o}^{i=r-1} (-1)^i C_{r-1}^i \frac{q^{n-r+i+1}}{n-r+i+1} \right]_q^1 = \lambda$$

$$\frac{q^{n-r+1}}{(r-1)!} \left[\sum_{i=o}^{i=r-1} \frac{A_n^r}{n-r+i+1} (-1)^i C^{ir-1} q^i \right]_1^q = \lambda.$$

Or, on peut écrire :

$$\frac{n}{n-r+i+1} = 1 + \frac{r-1-i}{n-r+i+1}$$

$$\frac{A_n^r}{n-r+i+1} = A_{n-1}^{r-1} + \frac{r-1-i}{n-r+i+1} A_{n-1}^{r-1}$$

et en portant dans l'équation (3) :

$$\lambda = \frac{q^{n-r+1}}{(r-1)!} \left[\sum_{i=o}^{i=r-1} A_{n-1}^{r-1} (-1)^i C_{r-1}^i q^i + (r-1) \sum_{i=o}^{i=r-2} \frac{A_{n-1}^{r-1}}{n-r+i+1} (-1)^i C_{r-2}^i q^i \right]_q^1$$

répétons cette opération de proche en proche, on aura :

$$\lambda = \frac{q^{n-r+1}}{(r-1)!} \left[A_{n-1}^{r-1} (1-q)^{r-1} + (r-1) A_{n-1}^{r-2} (1-q)^{r-2} + (r-1)(r-2) A_{n-1}^{r-3} (1-q)^{r-3} + \ldots \right]_q^1$$

$$1 - \lambda = q^{n-r+1} \left[\frac{A_{n-1}^{r-1} p^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{A_{n-1}^{r-2}}{(r-2)!} p^{r-2} + \ldots\ldots + 1 \right]$$

posons $p = \frac{a}{n}$ et supposons que r restant fixe n croisse indéfiniment. Il vient :

$$1 - \lambda = e^{-a}\left[\frac{a^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{a^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots\ldots + 1\right].$$

Posons :

$$a = r - \alpha$$

puis, lorsque n n'est pas infini :

$$p = \frac{r - \alpha}{n + \beta}.$$

Le calcul direct montre que β varie très peu avec n.

Supposons par exemple, ce qui est le plus courant, que $\lambda = \frac{1}{2}$. D'autre part si $n = 2r - 1$ on voit immédiatement sur la formule (1) que $p = q = \frac{1}{2}$. On aura alors :

$$\frac{1}{2} = \frac{r - \alpha}{2r - 1 + \beta}$$

$$2r - 1 + \beta = 2r - 2\alpha$$

$$\beta = 1 - 2\alpha.$$

On commet une erreur très faible en adoptant pour β la valeur $1 - 2\alpha$ quel que soit n et en posant par conséquent :

$$p = \frac{r - \alpha}{n + 1 - 2\alpha}.$$

Le tableau II donne les valeurs de α en fonction de r.

Tableau II.

r	α	ε
1	0,3069	0,0793
2	0,3217	0,0349
3	0,3257	0,0229
4	0,3278	0,0166
5	0,3290	0,0130
6	0,3298	0,0106
7	0,3304	0,0088

Enfin en remarquant que α est très voisin de 1/3, en multipliant numérateur et dénominateur par 3 et en posant $\varepsilon = 1 - 3\alpha$ il vient :

$$p = \frac{3r - 1 + \varepsilon}{3n + 1 + 2\varepsilon}. \qquad (5)$$

La troisième colonne du tableau II donne les valeurs de ε.

A titre d'exemple, nous donnons dans le tableau III quelques valeurs exactes de p, les valeurs tirées de la formule (2) et celles obtenues en négligeant ε et en adoptant, par conséquent, pour p la valeur :

$$p = \frac{3r - 1}{3n + 1} \qquad (6)$$

SALLE D'ETUDES ... ECONOMIQUES ET STATISTIQUES

Tableau III.

n	r = 1			2			3		
	VALEUR exacte	FORMULE (5)	FORMULE (6)	VALEUR exacte	FORMULE (5)	FORMULE (6)	VALEUR exacte	FORMULE (5)	FORMULE (5)
1	0,5000	0,5000	0,5000						
2	0,2929	0,2905	0,2857						
3	0,2063	0,2047	0,2000	0,5000	0,5000	0,5000			
4	0,1591	0,1580	0,1538	0,3857	0,3852	0,3846			
5	0,1295	0,1287	0,1250	0,3138	0,3133	0,3125	0,5000	0,5000	0,5000
6	0,1094	0,1087	0,1053	0,2644	0,2640	0,2631	0,4214	0,4212	0,4211
7	0,0943	0,0938	0,0909	0,2285	0,2281	0,2273	0,3641	0,3639	0,3636
8	0,0830	0,0826	0,0800	0,2011	0,2008	0,2000	0,3215	0,3213	0,3200
9	0,0741	0,0738	0,0714	0,1796	0,1794	0,1787	0,2862	0,2861	0,2857
10	0,0670	0,0667	0,0645	0,1622	0,1620	0,1613	0,2586	0,2584	0,2581
11	0,0611	0,0609	0,0588	0,1480	0,1478	0,1471	0 2358	0,2356	0,2353
12	0,0561	0,0560	0,0541	0,1360	0,1358	0,1351	0,2167	0,2166	0,2162
13	0,0519	0,0518	0,0500	0,1258	0,1257	0,1250	0,2004	0,2003	0,2000
14	0,0483	0,0482	0,0465	0,1170	0,1169	0,1163	0,1865	0,1864	0,1860

On voit que la formule (6) donne des valeurs approchées qui seront suffisantes chaque fois que l'on se limitera à quelques centaines d'images.

B. — *Méthode photographique.*

C'est une application directe de la photographie composite. Elle consiste essentiellement :

1° A noircir la partie intérieure de toutes les images en laissant incolore la partie extérieure ou réciproquement;

2° A superposer toutes les images ainsi obtenues en les photographiant l'une après l'autre sur une même surface sensible.

On voit alors qu'en un point donné, la quantité de lumière reçue par la plaque photographique est proportionnelle au nombre d'images pour lequel le point considéré est extérieur. Les lignes d'égal noircissement sur la plaque photographique sont donc les lignes de probabilités égales.

Si le nombre d'images n'est pas trop élevé, la photographie composite se présente sous forme de bandes plus ou moins grises dont les lignes de séparation correspondent aux lignes sélectionnées de la méthode graphique. Grâce aux propriétés particulières des émulsions photographiques, on peut augmenter considérablement le contraste entre les différentes zones. Dans ce but, on prendra des émulsions à grands contrastes, des bains très alcalins riches en hydroquinone et en bromure, on renforcera les images obtenues, on en tirera des contretypes, etc...

Lorsque le contraste devient assez élevé, les zones extrêmes les plus claires et les plus sombres se noient dans les zones respectives de sous-exposition et de sur-exposition. Il devient alors nécessaire d'effectuer plusieurs poses ou de tirer plusieurs contretypes de différentes valeurs. Il devient également indispensable de repérer le numéro d'ordre des zones de différents gris. Il est commode, pour cela, de placer sur chaque image un rectangle de dimensions variables. L'image composite comporte alors une série de petits rectangles dégradés et

la position de la ligne de séparation de deux rectangles correspond à un nombre connu d'images.

Il est possible d'obtenir ainsi, sans trop de difficulté, des images composites d'une trentaine d'images élémentaires à contours très irréguliers. On voit ainsi les avantages sérieux de la méthode photographique. Celle-ci sera précieuse chaque fois que le nombre d'images élémentaires sera limité ou que la multiplication de ces images demandera plus de travail que le travail photographique.

Ce qui limite la précision de la méthode photographique c'est l'impossibilité pratique d'augmenter indéfiniment le contraste et cette limite provient, elle-même, de la difficulté d'obtenir des images régulièrement éclairées. En effet, les noirs ne sont jamais purs et les blancs ne sont pas parfaits. Le papier sur lequel est dessiné le dessin présente un grain, l'encre de Chine un reflet plus ou moins régulier, etc... Les différences d'albedos à l'intérieur d'une même zone deviennent alors supérieures aux différences correspondant à deux zones voisines dont les limites deviennent ainsi indéchiffrables, quel que soit le facteur de contraste utilisé pour renforcer les différences de noircissement.

A ce point de vue, il faut noter que ce qui intervient dans le déchiffrement des limites des zones, c'est le contraste entre les deux images, c'est-à-dire le rapport de leurs albedos si l'on opère par réflexion ou de leur transparence si l'on examine les clichés par transmission. Or, ce rapport varie d'une limite à l'autre. En effet, si l'on compare les zones de rang r et $r + 1$ les quantités de lumière respectives sont r et $r + 1$ les contrastes sont donc proportionnels à $\frac{r+1}{r}$ et varient avec r. Maximum pour $r = o$, c'est-à-dire pour la ligne correspondant à la plus petite valeur de la probabilité, le rapport est minimum pour $r = n$, c'est-à-dire pour la limite de la probabilité la plus voisine de 1.

Pour tirer le maximum de résultat de la méthode, on pourra utiliser des images à centre noir pour les lignes de probabilité les plus internes et des images à centre blanc pour les lignes les plus externes. Il suffit pour cela de copier chaque image photographiquement et d'utiliser tantôt des réactifs négatifs et tantôt des positifs.

Voici un exemple de dessins à contours très complexes étudié par cette méthode.

Il s'agissait d'étudier les différentes reproductions d'une même lettre de machine à écrire. Ces différentes reproductions fortement agrandies ont été copiées sur calque. La figure 11 reproduit quelques-unes de ces lettres. Les contours irréguliers proviennent de la trame du ruban de la machine. La photographie composite permet d'obtenir avec 24 de ces images le dessin de la figure 12. Le dessin en trait plus marqué correspond à la ligne médiane. On peut constater que les irrégularités sont très réduites et l'on comprend que le moindre défaut du caractère deviendrait alors très apparent et permettrait l'identification de la machine qui a tapé toutes ces lettres.

Nous verrons d'ailleurs plus loin que dans ce cas particulier on peut obtenir une image médiane nettement meilleure.

*

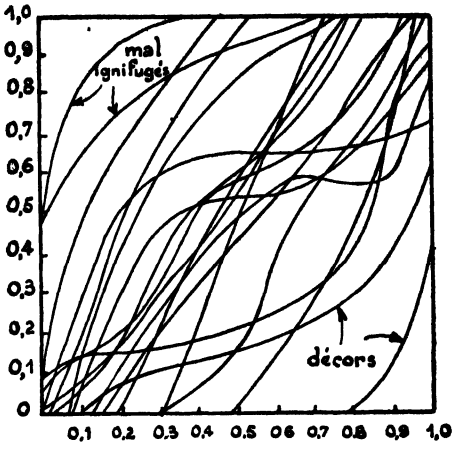

Fig. 13

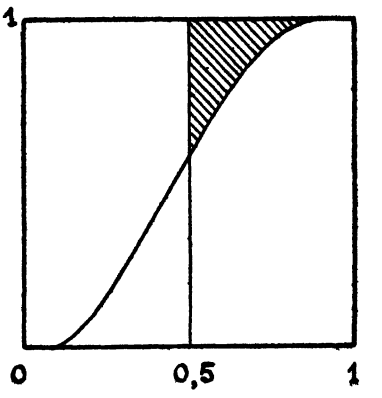

Fig. 15

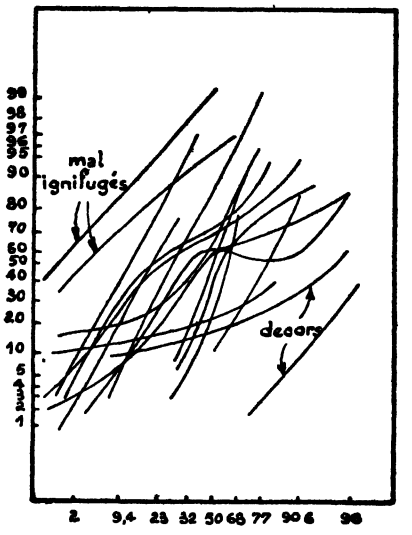

Fig. 14

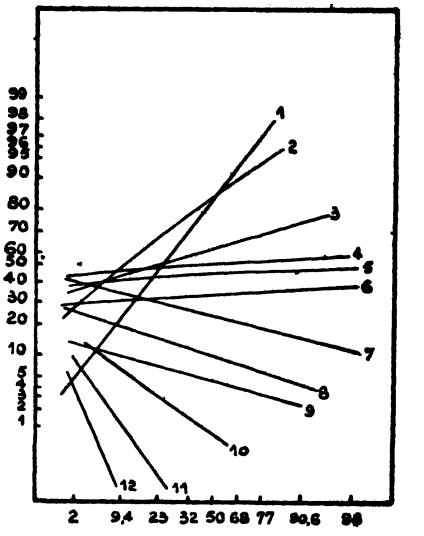

Fig. 16

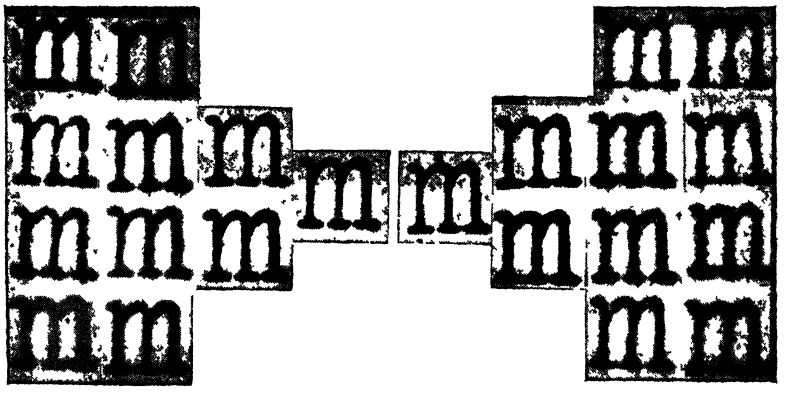

Fig. 18.

RAPPROCHEMENT D'UNE IMAGE ISOLÉE ET D'UN GROUPE D'IMAGES : DIAGRAMME DE PROBABILITÉ D'UNE IMAGE

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de comparer une image isolée à un groupe d'images. Le problème qui se pose le plus souvent est de reconnaître si l'image isolée appartient ou non au groupe. Nous supposerons connues la surface et les lignes de probabilité du groupe.

Superposons à l'image isolée le faisceau des lignes de probabilité. En général, l'image isolée ne s'insère pas entre deux lignes de probabilité de valeur voisine; elle coupe à la fois des lignes de probabilité faible, et des lignes de probabilité moyenne et les lignes de probabilité voisine de 1. Du fait que certains points de l'image isolée sont en dehors de la ligne de probabilité 0,1 par exemple, on n'a pas le droit d'en conclure qu'il n'y a qu'une probabilité 0,1 pour que l'image appartienne au groupe puisqu'il y a, en même temps des points intérieurs à la ligne 0,9 par exemple. Pour apprécier la probabilité d'appartenance au groupe, il faut donc étudier la répartition de l'ensemble des points de l'image par rapport au faisceau des lignes de probabilité.

Considérons la ligne de probabilité p, M un point de cette ligne. Il a par définition la probabilité p d'être à l'intérieur d'une image du groupe choisie au hasard. Soit l la longueur de la ligne de probabilité. L'espérance mathématique pour un élément de longueur dl d'être à l'intérieur d'une image du groupe est $p\,dl$. L'espérance mathématique pour l'ensemble des points de la ligne est donc $p\,l$.

Soit alors λ la fraction de la ligne de probabilité réellement comprise à l'intérieur de l'image isolée considérée. Si l'image était strictement représentative du groupe, on aurait $\lambda = l\,p$. Posons $\rho = \frac{\lambda}{l}$, on aurait :

$$\rho = p$$

ρ étant la fraction de la longueur l comprise à l'intérieur de l'image.

Nous appellerons fonction caractéristique d'une image isolée la fonction $\rho = f(p)$. C'est cette fonction qui caractérise l'image par rapport au groupe.

La représentation graphique de cette fonction sur un diagramme cartésien sera le diagramme de probabilité de l'image isolée. Les propriétés suivantes justifient cette notion :

1° Une image confondue avec l'image médiane à un diagramme parallèle à l'axe des ρ et coupe l'axe des p au point 1/2;

2° Une image dont l'irrégularité résume l'irrégularité moyenne du groupe est telle que $\rho = p$. C'est une droite à 45°;

3° Plus l'image est irrégulière plus elle fait un angle petit avec l'axe des p;

4° Une image nettement différente du groupe se trouve rejetée à l'extrémité gauche ou droite du diagramme.

Pour comparer une image isolée, il faut tracer la courbe caractéristique de l'image en question puis d'un grand nombre d'images du groupe et comparer la courbe du faisceau.

La figure 13 donne quelques diagrammes correspondant aux traces de combustion dont nous avons déjà parlé. La trace en pointillé correspond à un tissu mal ignifugé et les lignes en traits mixtes à des toiles de décors.

L'expérience montre que les diagrammes ont souvent une forme plus simple si l'on remplace les coordonnées proportionnelles à p et à ρ par des coordonnées proportionnelles à x et y telles que $p = \Theta(x)$ et $\rho = \Theta(y)$. En effet, dans ce cas une partie importante du diagramme devient rectiligne comme le montre la figure 14 où sont reportées les courbes de la figure 13 transformées par la méthode précédente. On voit que les courbes des traces étrangères à la série (toile mal ignifugée ou toiles de décors) paraissent beaucoup plus distinctes avec ce mode de représentation.

Lorsque les courbes caractéristiques sont à peu près rectilignes, on peut les représenter par deux nombres : la pente ϖ et l'abscisse α de l'intersection avec une parallèle à l'axe des p. Il est alors naturel de choisir celle qui correspond à la valeur $\rho = 0{,}5$. Voici quelques valeurs de ces abscisses dans le cas de tissus ignifugés :

1° Tissu de coton normalement ignifugé :

7 — 13 — 13 — 13 — 20 — 23 — 23 — 24 — 24 — 25 — 35 — 37 — 38 — 38 — 40 — 41 — 43 — 44 — 44 — 44 — 44 — 52 — 63 — 64 — 68 — 69 — 73 — 74 — 82 — 88 — 93;

2° Tissu de décors peint sur les deux faces :

98,5 — 99,6 — 99,97;

3° Tissu insuffisamment ignifugé :

1 — 1,4.

La pente traduit l'irrégularité de l'image. Si l'on se reporte au cas des traces de combustion une pente trop faible traduira une irrégularité exagérée de la flamme et signifiera qu'il est prudent de recommencer l'expérience.

Lorsque la caractéristique n'est plus rectiligne, il est logique de remplacer α par la valeur moyenne de ρ, c'est-à-dire de poser :

$$\alpha = \int_0^1 \rho \, dp. \tag{7}$$

On a d'ailleurs (fig. 15) :

$$\int_0 p \, d\rho = 1 - \int_0^1 \rho \, dp \tag{8}$$
$$\alpha = 1 - \int_0^1 p \, d\rho.$$

D'autre part, la pente ϖ de la droite caractéristique doit également être définie autrement. Le calcul de la pente maxima est souvent difficile au point de vue pratique. Il est également toujours délicat d'évaluer les points de raccordements de la courbe caractéristique et des droites $\rho = 0$ et $\rho = 1$.

La figure (15) montre que l'expression

$$\int_0^\alpha \rho dp + \int_\alpha^1 (1 - \rho) \, dp$$

égale aux surfaces hachurées est d'autant plus petite que la pente est plus élevée. On voit de plus que ces surfaces sont égales. On peut donc choisir pour pour ϖ la définition plus générale :

$$\frac{1}{8\varpi} = \int_0^\alpha \rho \, dp + \int_\alpha^1 (1 - \rho) \, dp \tag{9}$$

Remarque. — Considérons l'ensemble des droites caractéristiques pour toutes

les images du groupe. Soit ρ_1, ρ_2... l'ensemble des valeurs correspondant à une valeur de probabilité ρ. La moyenne $\bar{\rho}$ des valeurs ρ_1, ρ_2..., est évidemment p. La courbe caractéristique moyenne est donc la droite $\rho = p$.

Il en résulte que l'on a :

$$\bar{\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{\rho} dp = 1 - \int_0^1 p \, d\rho = \frac{1}{2}.$$

La connaissance des valeurs α n'apporte donc aucun élément d'information à l'étude du groupe d'images. Au contraire rien ne permet de prévoir *a priori* la valeur de $\bar{\varpi}$ qui représente donc un élément nouveau dans l'étude du groupe. Bien que cette notion soit encore assez imprécise dans notre esprit, on entrevoit que $\bar{\varpi}$ doit traduire une certaine corrélation entre les divers paramètres qui expriment les variations des images linéaires du groupe considéré.

III. — Repérage des images linéaires.

Nous avons supposé jusqu'ici que ces images étaient repérées les unes par rapport aux autres. Il y a des cas où cette question ne soulève aucune difficulté. Dans l'étude des traces de combustion les images peuvent être repérées par la position qu'occupait l'étoffe par rapport à la lampe à vapeur d'alcool. Mais il n'en est pas toujours ainsi. C'est ainsi que dans le cas des textes dactylographiés par suite du jeu des pièces mécaniques, les lettres subissent un déplacement appréciable et variable qui rend leur repérage précis impossible. Dans l'étude d'un profil humain ou d'un contour crânien, ou de tout autre objet mobile, rien ne permettrait de fixer le repérage sans le plus grand arbitraire. Il faut donc rechercher ce repérage dans les éléments même du dessin.

Or, un repérage bien défini présente un grand intérêt. Si les images sont mal repérées, aux écarts normaux viennent s'ajouter les écarts de repérage, de même qu'en biométrie, par exemple, les erreurs de mesure viennent s'ajouter aux écarts des grandeurs étudiées par la statistique. Cet effet se traduit par un étalement de la surface de probabilité. Mais de plus l'image médiane elle-même se trouve modifiée, comme on le verra plus loin.

Définition du repérage. — Si les dessins linéaires présentent au moins deux points singuliers : points doubles, points de rebroussement, points de branchement, dans le genre de ceux de la figure (19), etc... et à condition que ces points soient réellement des points homologues et non des cas particuliers, on peut repérer les images par ces points. Nous verrons dans la seconde partie de cette étude comment peut se faire le repérage.

Supposons qu'il soit impossible de trouver des points homologues communs à tous les dessins et supposons que l'on connaisse déjà la surface de probabilité, ce qui suppose le repérage du groupe d'images déjà effectué et cherchons à repérer une image supplémentaire par rapport au groupe.

Si l'image supplémentaire était identique à l'une des lignes d'égale probabilité, c'est naturellement la coïncidence de la ligne et de l'image qui doit être considérée comme le repérage idéal. Le diagramme correspondant se réduit alors à une ligne parallèle à l'axe des ordonnées.

En fait, il n'en est jamais ainsi, mais il est naturel de généraliser la propriété précédente et d'admettre que le meilleur repérage est celui dont le diagramme

se rapproche le plus de cette parallèle. L'expérience justifie bien une telle conception. La figure (16) montre, en effet, la partie centrale d'une série de diagramme correspondant à la même image plus ou moins décalée de son repérage théorique (il s'agit d'images extraites des traces de combustion et dont le repérage est alors défini par la manière même de produire l'image). Le diagramme faisant le plus petit angle avec l'axe des ordonnées correspond bien au repérage théorique. D'une manière plus générale, c'est la pente moyenne telle qu'elle est définie par la formule (9) qui doit être maxima.

Mais pratiquement, la recherche de la pente maxima ne peut s'effectuer ainsi parce que le repérage dépend de trois variables indépendantes; une d'orientation et deux de translation. Il faudrait, pour un très grand nombre de positions différentes, calculer successivement α puis ϖ ce qui représenterait un travail considérable et ferait perdre à notre méthode tout le bénéfice de la simplicité qui en est la caractéristique essentielle.

La méthode suivante donne des résultats pratiquement équivalents :

Remarquons tout d'abord que pour que ϖ soit maximum, il faut que l'expression :

$$\int_o^\alpha \rho d\,p + \int_\alpha^1 (1 - \rho)\, d\,p$$

soit minima. On voit facilement sur la figure (15) que la quantité :

$$\int_o^{1/2} \rho d\,p + \int_{1/2}^1 (1 - \rho)\, d\,p$$

ne diffère que très peu de la précédente et l'on ne commettra qu'une erreur négligeable en admettant qu'elles sont minima simultanément et même en supposant que chacune des deux intégrales est encore simultanément minima. Considérons par exemple la première et remplaçons ρ par sa valeur $\frac{\lambda}{l}$. L'intégrale

$$\int_o^{1/2} \frac{\lambda}{l}\, d\,p$$

sera aussi minima.

Considérons enfin la surface $d\,s$ de la bande comprise entre les deux lignes de probabilité p et $p + dp$. Certes les quantités $\frac{dp}{l}$ et ds ne sont pas proportionnelles, mais nous pensons que l'on ne commettra pas encore une bien grande erreur en estimant que lorsque l'intégrale $\int_o^{1/2} \frac{\lambda}{p}\, dl$ est minima il en est de même de l'intégrale $\int_o^{1/2} \lambda\, ds$.

Finalement c'est cette expression que nous choisirons pour la définition de repérage. Il est évident que les approximations effectuées successivement rendent un peu arbitraire cette définition, mais elle a par contre l'avantage considérable à nos yeux de la simplicité. En effet, l'intégrale $\int_o^{1/2} \lambda\, ds$ n'est autre que la portion du plan extérieure à la ligne de probabilité 1/2 et intérieure à l'image considérée.

Si donc on connaissait la ligne de probabilité 1/2, le problème se réduirait à placer successivement chaque image de manière à rendre la partie comprise entre les deux lignes aussi faible que possible (fig. 17). L'expérience montre d'ailleurs qu'il est facile d'apprécier ce minimum directement à l'œil. Si l'on

désire un repérage très précis, il suffit de dessiner chaque image en silhouette noire sur fond blanc et de leur superposer l'image médiane découpée sur fond noir; au moyen d'une cellule photoélectrique et d'un galvanomètre, on cherche alors la position qui correspond à la plus petite quantité de lumière reçue par la cellule, c'est-à-dire la plus petite surface blanche.

Pour avoir finalement l'image médiane, on opérera par approximations successives. On groupera, par exemple, les images par groupe de trois. Dans chaque groupe, on repérera deux images par rapport à la troisième, on tracera les médianes, les groupera par 3 en les repérant et ainsi de suite.

Dans tous les cas pratiques que nous avons étudiés jusqu'ici, deux approximations ont toujours été suffisantes, c'est-à-dire que la première image médiane obtenue a toujours été suffisante pour repérer définitivement toutes les images.

IMAGES A CONTOURS FLOUS

Nous avons admis jusqu'ici que nos images étaient strictement linéaires, autrement dit que la limite entre la zone extérieure et la zone intérieure était parfaitement définie. Dans les exemples étudiés jusqu'ici il n'en était pas ainsi, en réalité : il y a une zone de carbonisation partielle et il y a une zone où les lettres dactylographiées ne sont ni noires ni blanches, mais plus ou moins grises. La première opération, dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici, a consisté à styliser ces images en traçant une ligne de séparation, ce qui comporte un certain arbitraire.

En fait, il est probable qu'il en serait ainsi avec la plupart des images, étant seules exceptées celles qui correspondent à un contour apparent.

Supposons connue la ligne exacte de séparation. La ligne tracée ne coïncide pas exactement avec la ligne théorique. On peut admettre qu'étant donné un point M situé sur cette ligne théorique, il y a une chance sur deux de le laisser à l'extérieur de la ligne tracée. D'une manière plus générale, à chaque point M de chacune des images, on peut attacher une certaine probabilité de se trouver à l'intérieur de la ligne tracée. Si l'on admet ce point de vue, il sera logique de définir la probabilité du point M pour l'image composite comme étant la moyenne des probabilités. La théorie précédente s'applique ainsi intégralement aux images à contours flous dès que nous aurons défini la probabilité d'un point pour une image isolée.

Or, si nous considérons l'image composite obtenue par voie photographique, l'albedo d'un point est proportionnel à sa probabilité. On est ainsi amené à généraliser pour chaque image isolée.

Soit donc α_0 l'albedo maximum, α_1 l'albedo minimum des points d'une image. Nous dirons qu'un point d'albedo α a la probabilité p d'être intérieur à l'image si

$$p = \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0 - \alpha_1}$$

et la surface de probabilité sera obtenue en prenant les hauteurs $\overline{p}$ au-dessus de chaque point. A partir de cette surface, on définira comme précédemment les lignes d'égale probabilité.

SALLE D'ETUDES ÉCONOMIE

OBTENTION PRATIQUE DES LIGNES D'ÉGALE PROBABILITÉ

La méthode graphique est naturellement sinon inutilisable du moins peu intéressante. Il faudrait, en effet, tracer pour chaque image isolée, l'ensemble des lignes de probabilité, puis tenir compte de toutes ces lignes. La mesure de l'albédo moyen supposerait un nombre considérable de mesures d'albedo et serait peu pratique. Reste donc la seule méthode photographique. Celle-ci s'emploie exactement dans les mêmes conditions que pour les images à contours nets. Mais il faut remarquer que la seule méthode correcte est ici la méthode de la photographie composite par addition et non par superposition d'images transparentes.

L'image ainsi obtenue est une image à contours dégradés dans laquelle il n'y a plus aucune limite franche de zones. Naturellement, il n'y a aucun intérêt à fractionner la collection d'images.

Tracé des lignes de probabilité. — Cette opération se ramène à tracer des lignes d'égal albedo sur l'image composite. Celles-ci peuvent s'obtenir par une mesure optique au moyen d'une cellule photoélectrique et d'un galvanomètre ou par un microphotomètre visuel. En réalité, on a rarement besoin d'une précision très grande en raison des fluctuations dont sont entachées ces lignes (à moins de disposer d'un grand nombre d'images). On peut alors obtenir ces lignes par une méthode purement photographique. Il suffit, pour cela, de tirer des contretypes de plus en plus contrastés, on obtient ainsi un dégradé de plus en plus étroit. En faisant varier le temps de pose, on obtiendra ainsi les différentes lignes de probabilité.

Il est nécessaire, pour repérer le rang exact de ces lignes, de photographier en même temps une échelle de tons d'albedos variables et connus, on pourra pour cela adjoindre à chaque image primitive un petit rectangle de dimensions variables comme dans le cas des images à contours nets. Mais tandis que dans ce cas ce repérage était simplement une commodité, il est indispensable dans le cas présent. En effet, on ne peut jamais connaître avec sécurité la valeur d'un albedo à partir du noircissement correspondant de la photographie. Ces deux grandeurs sont bien liées par une fonction qui se traduit en coordonnées logarithmiques par une courbe dite caractéristiques mais cette fonction dépend d'un très grand nombre de facteurs : température, état hygroscopique, agitation, âge de l'émulsion, usure des bains, etc...

Repérage. — Pour effectuer le repérage de deux images, l'une par rapport à l'autre, il est nécessaire que l'une d'elles au moins soit sur support transparent. En fait, il est particulièrement utile qu'elles le soient toutes deux. Des photographies sur pellicules sont particulièrement commodes dans ce but. L'expérience montre qu'il est difficile de repérer convenablement deux images de même type; alors que cela devient très aisé dans le cas de photographies de type opposé, c'est-à-dire un positif et un négatif. Il ne peut plus être alors question de définir le repérage par le minimum de surface comprise entre les deux courbes. Mais ce minimum se traduirait par un minimum de transparence des deux images, on conservera encore, par extension, ce critère de minimum de transparence. On introduit ainsi un certain arbitraire, mais il en était déjà ainsi pour les images strictement linéaires (fig. 17).

Application. — Nous donnons (fig. 18) le résultat obtenu avec des lettres dactylographiées. Il s'agissait de comparer deux textes supposés tapés avec la même machine. On a choisi dans chaque texte un certain nombre de fois (12) la lettre *m* (colonnes extrêmes à droite et à gauche). Les colonnes 2 et 7 donnent l'image médiane correspondant à trois images. Les colonnes 3 et 6 à six images et les colonnes 4 et 5 à douze images. On voit que les irrégularités ont presque complètement disparu et que l'on peut rapprocher utilement les résultats obtenus avec les deux séries, ce qui était parfaitement illusoire avec les lettres primitives.

Si l'on se reporte aux images précédentes, le résultat obtenu est nettement meilleur que celui obtenu avec les contours dessinés à partir de ces mêmes lettres (fig. 12). Cela se conçoit, en traçant ce contour on a ajouté une certaine incertitude. En outre, en ne tenant compte que des lignes de probabilité 1/2 on perd d'autres éléments d'information. Il est normal dans ces conditions que l'ensemble soit beaucoup moins précis.

IMAGES LINÉAIRES COMPLEXES

Nous avons supposé au début de cette étude que le dessin linéaire était une ligne fermée de forme plus ou moins complexe. Tout ce que nous avons dit s'étendrait sans difficulté au cas où le dessin serait formé d'une ligne avec un ou plusieurs points de branchement, ou se décomposerait en plusieurs lignes fermées, etc... à condition que l'on puisse toujours partager le plan en deux zones interne et externe, la zone interne ou la zone externe pouvant se fractionner. Ce cas se rencontre d'ailleurs dans les exemples que nous avons présentés : (fig. 11). Naturellement, dans ce cas, les diagrammes correspondants auront en général une forme plus complexe.

La méthode, au contraire, n'est plus applicable lorsque le dessin linéaire partage le plan en plus de deux zones comme dans le cas suivant extrait d'une étude en cours sur la forme des oreilles (fig. 19). Nous reparlerons plus loin des difficultés que l'on rencontre dans l'étude des questions anthropologiques.

Dans ce cas une description complète du phénomène devrait utiliser autant de surface que de zones distinctes, et il est logique de considérer la zone externe comme une zone au même titre que les autres. Dans le cas de la figure (19) il faudra donc considérer trois surfaces de probabilité. Il y aura de même un triple réseau de lignes de probabilité projection des lignes de niveau des trois surfaces. La somme des coefficients de probabilité attachés aux lignes passant par un même point est naturellement égal à un.

On est également obligé de modifier la définition de la ligne médiane. Ce n'est pas celle de probabilité 1/2 puisqu'il y a maintenant trois lignes correspondant à cette définition. Si, d'autre part, on prenait comme image médiane l'ensemble des trois lignes de probabilité 1/2, le dessin médian au voisinage des points singuliers prendrait l'aspect de la figure (20), ce qui ne correspond pas à l'idée que l'on se fait habituellement d'une image médiane obtenue à partir du dessin du type précédent. Pour leur restituer cet aspect habituel, il faut prendre pour lignes médianes les lieux des points d'égales probabilités de deux zones. Au point de branchement, les probabilités sont égales toutes trois à 1/3 (fig. 21).

Nous ne nous étendrons pas plus longuement sur ce genre d'images que nous avons fort peu étudié.

***

Que les images linéaires soient simples ou composées, il importe de bien comprendre que la méthode que nous proposons ne prétend nullement donner une idée complète de l'ensemble des propriétés du groupe d'images mais seulement une sélection de ces propriétés. Dans les cas étudiés jusqu'ici, cette sélection correspondait aux questions pratiquement les plus importantes. Nous allons voir qu'il n'en est pas toujours ainsi.

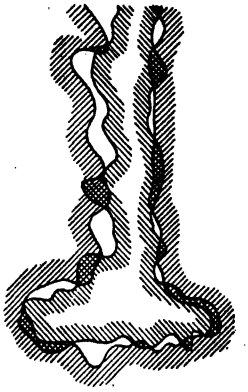

Fig. 17

Fig. 19

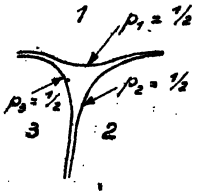

Fig. 20

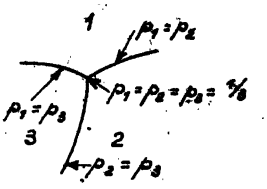

Fig. 21

Fig. 22

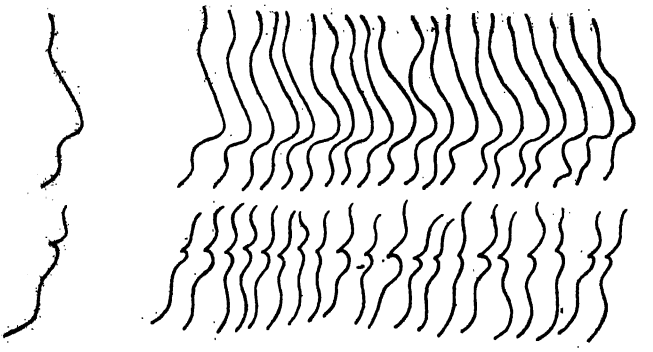

Fig. 23

LIMITE DE LA MÉTHODE — OBJETS A RÉGIONS APPROXIMATIVEMENT DÉFINIES

Cherchons à appliquer la méthode précédente au tracé de la médiane d'une série de profils humains (les images de base sont triées de la collection de photographie des détenus soumis au Bertillonnage à l'Identité judiciaire).

Voici le résultat obtenu : figure 22. On le voit, il est assez décevant : la bouche a disparu, le nez est aplati et le menton fuyant. Or, ces parties anatomiques du visage sont normales comme le montre la figure 23 où nous donnons quelques-uns des nez et des bouches prises au hasard et la médiane de ces organes calculées séparément.

Comment expliquer alors que la médiane générale soit ainsi transformée?

Considérons par exemple les nez et en même temps que la médiane traçons les lignes de probabilité 0,13 et 0,87. On voit (fig. 24) que les écarts par rapport à la médiane portent sur deux paramètres : d'une part la longueur du nez, d'autre part l'angle de la base et du dos. Or, les variations du premier paramètre modifient la valeur de la médiane du deuxième paramètre calculé par notre méthode. Pour le montrer, étudions la forme de la ligne médiane d'une série de courbes dépendant d'un seul paramètre t.

Supposons la ligne représentée en coordonnées cartésiennes x, y par l'expression $f(x, y, t) = 0$ et telle que les points $f(x, y, t) < 0$ définissent les points intérieurs à la courbe et $f(x, y, t) > 0$ les points extérieurs. Soit, d'autre part, $g(t)dt$ la fonction de probabilité du paramètre t.

Considérons un point A, il sera intérieur à toutes les courbes pour lesquelles $f(x, y, t) < 0$. Soient $t_1 < t < t_2$ les valeurs de t pour lesquelles cette inégalité est satisfaite, la probabilité pour que A soit à l'intérieur d'une courbe prise au hasard sera $\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt$. Comme d'autre part, cette probabilité est égale à p, on aura :

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt = p.$$

Les points A (x, y) répondant à cette condition appartiendront donc à la courbe de probabilité. Dans le cas de la courbe médiane, on aura :

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

On conçoit qu'il n'y a aucune raison pour que la courbe médiane se confonde avec une des lignes de la famille d'images données.

Supposons par exemple que la ligne que nous étudions soit formée par un angle dont le sommet est sur l'axe $o\,y$ et dont les côtés ont les pentes respectives fixes $+\,a$ et $-\,a$. Soit t l'ordonnée du sommet. Supposons encore que la fonction de probabilité de t soit celle d'une fonction de Laplace-Gauss $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k\,t}$

Un point x, y est à l'intérieur de l'angle si :

$$-ax + t < y < ax + t$$
$$y - ax < t < y + ax$$

L'équation de la courbe de probabilité t est donc :

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{y-ax}^{y+ax} e^{-k\,t^2}\, dt = p$$

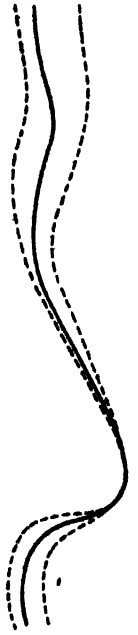

Fig. 24

Fig. 26

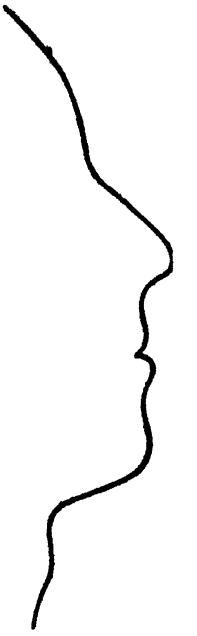

Fig. 27

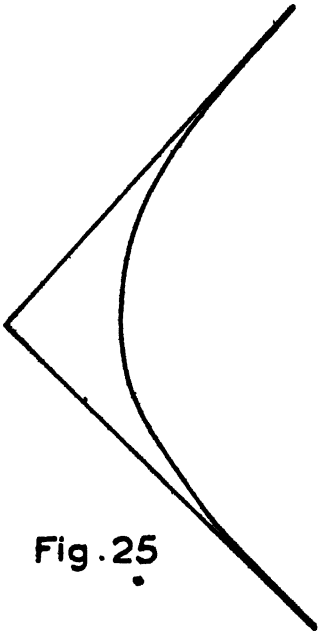

Fig. 25

Fig. 28

posons $u = kt$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k(y-ax)}^{k(y+ax)} e^{-u^2} \, du = p$$

$$\Theta\,[k\,(y + ax)] - \Theta\,[k\,(y - ax)] = p$$

posons

$$ky = Y \qquad k\,ax = X \tag{10}$$

$$\Theta\,(Y + X) - \Theta\,(Y - X) = p. \tag{11}$$

Une table de la fonction Θ permet de calculer $y - x$ en fonction de $y + x$ et par conséquent y en fonction de x. Supposons par exemple $p = \frac{1}{2}$. On voit immédiatement que les droites $Y = X$ et $Y = -X$ sont asymptotes à cette courbe et que par conséquent la courbe x, y est asymptote aux côtés de l'angle correspondant à la valeur $t = 0$.

Le tableau I donne quelques valeurs de Y en fonction de X :

X	Y	X	Y	X	Y
0,4769	0	0,4910	0,1710	0,5624	0,4124
0,4769	± 0,0069	0,4931	0,1831	0,5700	0,4300
0,4771	± 0,0171	0,4954	0,1954	0,5791	0,4491
0,4773	0,0273	0,4978	0,2078	0,5887	0,4687
0,4776	0,0376	0,5000	0,2200	0,5994	0,4894
0,4780	0,0480	0,5034	0,2334	0,6112	0,5112
0,4786	0,0586	0,5065	0,2465	0,6243	0,5343
0,4792	0,0692	0,5100	0,2600	0,6399	0,5599
0,4800	0,0800	0,5135	0,2735	0,6553	0,5853
0,4809	0,0909	0,5174	0,2874	0,6761	0,6161
0,4819	0,1019	0,5216	0,3016	0,6996	0,6496
0,4830	0,1130	0,5262	0,3162	0,7284	0,6884
0,4843	0,1243	0,5311	0,3311	0,7652	0,7352
0,4858	0,1358	0,5364	0,3464	0,8163	0,7963
0,4874	0,1474	0,5422	0,3622	0,9008	0,8908
0,4891	0,1591	0,5484	0,3784		

La figure 25 représente cette courbe X Y. On voit que l'angle est déformé par un arrondi et en se reportant à la transformation (10) on voit que l'arrondi sera d'autant plus marqué que k sera petit. Or si le repérage est mauvais k diminue et par conséquent l'image médiane se modifie comme nous l'avons déjà indiqué.

On comprend aussi que ce même arrondi au lieu de correspondre à un simple déplacement le long de la ligne pourrait provenir d'une série d'irrégularités dans le sens perpendiculaire. Il est impossible de la seule étude des lignes de probabilité de trancher l'origine exacte des fluctuations.

Revenons à étude des profils humains ; le déplacement latéral des parties angulaires les unes par rapport aux autres aura pour effet de les arrondir. Nous avons montré que la hauteur du nez était variable. Il en est de même de l'espace nez-bouche, etc... D'où la déformation observée.

Il est clair que l'image médiane ainsi obtenue ne peut pas être utilisée par un anthropologiste. Il en serait *a fortiori* de même des autres lignes de probabilité.

Au fond cela s'explique facilement. Dans un visage il y a des parties anatomiques distinctes. Or, un point intérieur à l'ensemble du visage peut être intérieur au nez et extérieur au menton. Mais, d'autre part, on ne peut pas appliquer la théorie des images complexes puisque les limites des différentes parties anatomiques ne sont pas définies.

La notion de points internes et externes perd donc de sa valeur.

Pour obtenir une image moyenne au sens anthropologique du mot, on peut tracer le profil médian de chaque partie anatomique puis constituer une synthèse de ces moyennes partielles. C'est ce que nous avons fait dans la figure (26). Les profils partiels ont été obtenus en faisant coïncider dans chaque cas les points correspondants de courbure maxima. On a également tracé les lignes de probabilité 0,13 et 0,87 (1re et 5e de groupes de 5). L'image totale a été obtenue en prenant dans chaque image partielle la partie centrale. Le point de raccordement est choisi de manière à ce que les lignes 0,13 et 0,87 s'écartent le moins.

Le résultat final (fig. 27) est satisfaisant, mais on voit qu'il s'écarte déjà de la théorie primitive.

Essayons maintenant de tracer les autres lignes de probabilité. On peut, par exemple, essayer d'obtenir de même les lignes de probabilité 0,13 et 0,87 en redressant les lignes partielles précédentes. Le résultat caricatural de la figure (28) est caractéristique de l'arbitraire de la méthode. Il s'explique puisque les angles de raccordement sont tous dans le même sens dans les deux cas.

Il n'est pas inutile de chercher les causes de ces difficultés. Comme nous l'avons déjà dit il y a au moins 3 paramètres par points d'inflexion : un mesurant l'angle des tangentes des deux points d'inflexion successifs, un mesurant le rayon de courbure minima de la courbe de raccordement de ces deux tangentes et un troisième mesurant la distance entre les points d'intersection d'une tangente d'inflexion avec la tangente qui précède et celle qui suit. Il est possible de constituer une image correspondant aux valeurs médianes de tous ces paramètres (c'est sensiblement la figure (27) mais comment traduire les écarts de tous ces paramètres par une seule image. La figure (28) correspond aux variations de l'angle des tangentes considérées avec leurs signes. On aurait une image plus normale en prenant les variations en valeur absolue. Mais il n'y a aucune raison pour ne pas tenir compte aussi de variations de distance, ni aucune raison pour faire varier simultanément les trois groupes de paramètres dans le même sens.

Des difficultés du même genre se produiraient dans l'étude des images non linéaires, dont nous espérons présenter prochainement la théorie.

CONCLUSION

Avant de terminer, il nous faut examiner un dernier point : au début de l'année dernière une discussion des plus serrées s'était élevée pour délimiter le champ exact de la statistique. Nous avons bien peur d'avoir encouru les foudres de certains de nos collègues. En relisant les comptes rendus de cette séance, nous avons constaté que certains d'entre eux estimaient qu'une des conditions de la méthode statistique était la constitution et l'étude de tableaux

numériques. Il n'y a rien de tel dans la méthode que je viens de vous exposer. Le propre même de la méthode graphique ou photographique est justement la suppression de toute valeur numérique. Nous laissons à des collègues plus compétents que nous le soin de discuter si nous avons eu tort ou raison de présenter le résultat de ces recherches devant notre Société.

Lucien Amy,
Chef du Service d'Électricité
au Laboratoire municipal de Paris.

DISCUSSION

M. Delaporte. — J'ai été extrêmement intéressé par le beau travail de M. Amy et les méthodes qu'il a mises au point pour rechercher le profil moyen des individus et je serais heureux s'il pouvait nous indiquer s'il a essayé aussi une méthode de typologie humaine par superposition de portraits. Certains auteurs, D. Katz par exemple, ont superposé les portraits photographiques d'enfants d'un même type psychophysiologique en faisant coïncider la bouche et les yeux. La superposition photographique de ces images donne l'image moyenne de la face du « type ».