JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

FERNAND BLONDEL

Note sur la répartition géographique de la production minérale

Journal de la société statistique de Paris, tome 90 (1949), p. 372-382

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1949__90__372_0>

© Société de statistique de Paris, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

III

VARIÉTÉ

Note sur la répartition géographique de la production minérale.

On se propose d'indiquer ci-après une méthode d'étude de la répartition statistique de la production minière mondiale entre les différents États. A cet effet, on commencera par l'examen d'un cas particulier : celui de la production de l'or en 1937; on généralisera ensuite rapidement les résultats obtenus en montrant leur application à d'autres années et à d'autres substances; on indiquera enfin sommairement l'intérêt pratique qui s'attache à de telles études. Cette étude doit être envisagée comme se reliant à beaucoup d'autres du même esprit (Voir en particulier DIVISIA, M. F. *Technique et Statistique.* Ann. Ponts et Chaussées, 1941, p. 159).

Production de l'or en 1937.

Les statistiques internationales, par exemple celles de la Société des Natións, permettent de dresser la liste des pays producteurs, par ordre *croissant* de production, en leur attribuant un numéro d'ordre n, de telle sorte qu'à chaque numéro n corresponde une production individuelle p_n. Dans tout ce qui suit, les valeurs p_n sont exprimées, non pas en quantités absolues (kilos, tonnes...), mais en fraction de la production mondiale totale de la substance pour l'année considérée : on facilite ainsi les comparaisons d'année à année et de substance à substance.

Par exemple, pour l'or en 1937, la liste serait la suivante :

Pays	N° d'ordre n	Production individuelle (1937) absolue (kg)	relative p_n
Bulgarie	1	2	$1{,}9.10^{-6}$
États malais n. f.	2	16	$15\ .10^{-6}$
Birmanie	3	31	$29\ .10^{-6}$
»	»	»	
»	»	»	
»	»	»	
»	»	»	
»	»	»	
Canada	67	127.396	0,1187
U. S. A.	68	128.056	0,1193
U. R. S. S.	69	144.000	0,1340
Union Afr. Sud	70	364.986	0,3400
Production mondiale totale		1.073.000	1,000

La courbe qui représente la relation entre le numéro d'ordre n et la production individuelle correspondante p_n est d'allure exponentielle. On est donc conduit naturellement à considérer non pas la production p_n elle-même, mais son logarithme log p_n.

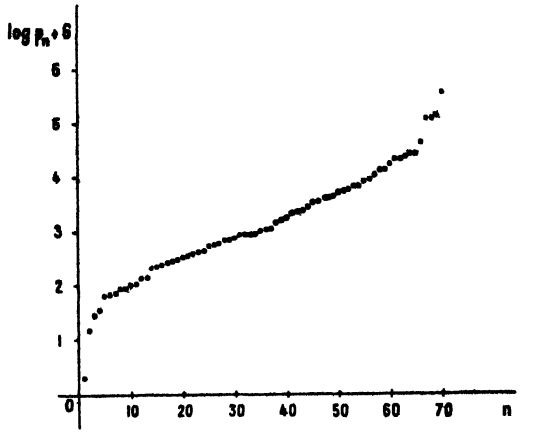

Fig. 1. Production de l'or en 1937 *courbe log p_n en fonction de n (courbe réelle par pointe)*

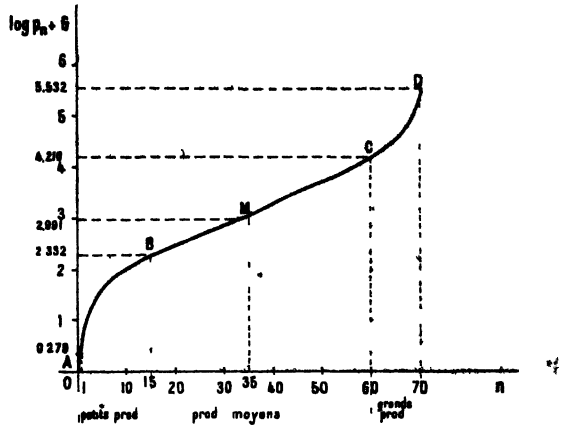

Fig 2. Production de l'or en 1937 *courbe log p_n en fonction de n (courbe schématisée)*

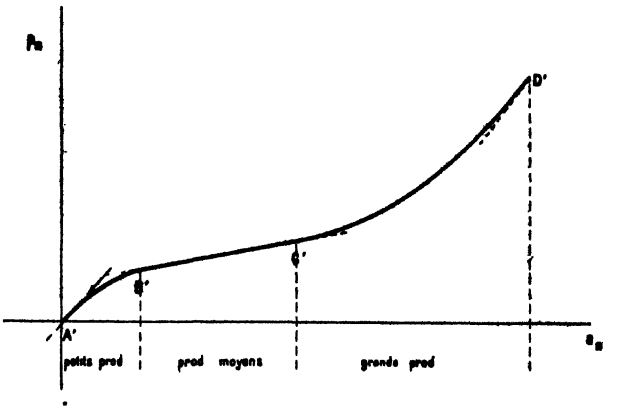

Fig 3 Courbe schematique p_n en fonction de $a_n = \Sigma_1^n p_n$

(p_n production individuelle — exprimée en fraction de la production mondiale — du pays de rang n dans la liste des états par ordre croissant de production)

Si l'on construit la courbe log p_n en fonction de n on obtient les graphiques ci-contre (fig. 1 : courbe réelle par points; fig. 2 : courbe schématisée). On voit qu'il s'agit d'une courbe assez régulière en forme de S allongé due à une longue branche d'inflexion. Cette dernière est si marquée que l'on peut aisément décomposer la courbe en trois parties (fig. 2) : une longue partie centrale BC, à peu près rectiligne avec deux parties courbes AB et CD au commencement et à la fin; la courbe, dans son ensemble, est à peu près symétrique par rapport à un point médian M.

On peut dire que la première partie courbe AB, convexe vers le haut, correspond aux petits producteurs; la partie centrale BC, sensiblement rectiligne, correspond aux producteurs moyens; enfin, la partie terminale CD, concave vers le haut, correspond aux grands producteurs.

Les données numériques sont les suivantes :

	n	p_n	$6 + \log p_n$ (a)
Partie AB	1	$1{,}9.10^{-6}$	0,279
	15	125.10^{-6}	2,332
Partie BC	60	162.10^{-4}	4,210
Partie CD	70	340.10^{-3}	5,532

(a) On a décalé l'origine des log de (+ 6) de manière à n'avoir que des log positifs.

La courbe est sensiblement symétrique par rapport à

$$n = 35 \quad \log p_n + 6 = 2{,}991 \quad p_n = 980.10^{-6}$$

(l'État correspondant est : États malais fédérés, production absolue = 1.052 kilos).

La partie AB — petits producteurs — comprend 15 pays.
La partie BC — producteurs moyens — comprend 45 pays.
La partie CD — grands producteurs — comprend 10 pays.

On remarquera qu'il y a là une manière assez simple de séparer l'ensemble des producteurs mondiaux en trois catégories : petits, moyens, grands, tandis que les mêmes notions, telles qu'elles sont utilisées dans le langage courant, sont très floues et même parfois incohérentes.

On est naturellement conduit à rechercher les fréquences de log p_n; si, par exemple, on subdivise l'ensemble en intervalles correspondant à une variation de 0,5 pour le logarithme, on trouve les chiffres suivants :

$\log p_n + 6$	Variation de n
0 à 0,5	1
0,5 1,0	0
1,0 1,5	2
1,5 2,0	6
2,0 2,5	10
2,5 3,0	15
3,0 3,5	10
3,5 4,0	12
4,0 4,5	9
4,5 5,0	1
5,0 5,5	3
5,5 6,0	1
Au-dessus de 6,0	0

Ces données numériques se traduisent par une courbe qui, avec quelques irrégularités, a une allure en cloche; on rejoint de cette façon une notion classique (Pareto, Gibrat, etc.) pour des répartitions analogues.

De cette manière, *on peut introduire dans l'étude de la répartition géographique des productions minérales la notion plus générale de hasard simple.* On comprend qu'il y ait là une possibilité importante pour pénétrer plus avant dans le problème des gisements miniers qui n'a pu être abordé jusqu'à présent que d'une manière empirique.

Bien entendu, cette étude exigerait une analyse beaucoup plus fine que la précédente : on a voulu simplement indiquer une direction possible. A titre indicatif, on peut néanmoins signaler que ce qui précède permettrait de définir une sorte de « valeur la plus probable » pour la production minière d'un État : c'est la production de l'État médian dans la courbe (n, log p_n). On citera les quelques chiffres suivants :

Houille	1.000.000 tonnes
Pétrole	500.000 —
Minerai de fer (métal contenu)	400.000 —
Minerai de cuivre (métal contenu)	10.000 —
Minerai de plomb (métal contenu)	10.000 —
Minerai de zinc (métal contenu)	10.000 —
Minerai d'étain (métal contenu)	1.000 —
Or	1.000 kilos
Phosphate	100.000 tonnes

La courbe réelle (n, log p_n) n'est pas une courbe continue; mais l'allure quasi-exponentielle de sa plus grande partie conduit à introduire une quantité r_n telle que :

$$p_{n+1} = p_n \cdot r_n.$$

Dans la partie centrale, en effet, en raison de l'allure quasi-linéaire de log p_n, les productions croissent approximativement en progression géométrique.

Il est facile de voir que, dans la courbe réelle (n, log p_n), la pente de l'élément de n à $(n + 1)$ est log r_n.

D'après ce qui précède, on voit que — sous réserve de variations accidentelles — lorsque n croît, les variations de cette pente, donc de log r_n et, par suite, de r_n sont les suivantes :

Dans la région des petits producteurs, r_n décroît;
Dans la région des producteurs moyens, r_n est sensiblement constant;
Dans la région des grands producteurs, r_n croît.

Dans la région des producteurs moyens, la valeur moyenne de log r_n est 0,042 correspondant à $r_n = 1{,}102$: on voit que la progression est lente.

En dehors des quantités précédentes (p_n, log p_n, r_n), il est intéressant de considérer la quantité :

$$a_n = \Sigma_1^n p_n.$$

Cette quantité a_n est donc la fraction de l'approvisionnement mondial qui est fournie par les n premiers pays de la liste des producteurs.

On pourrait construire la courbe qui relie a_n à n, mais il est plus intéressant

de construire la courbe exprimant la relation entre a_n et p_n ; c'est, si l'on veut, la production individuelle maximum p_n des pays qui fournissent l'approvisionnement total a_n (bien remarquer que p_n et a_n sont exprimés non en valeurs absolues, mais en fractions de la production mondiale totale).

C'est évidemment une courbe discontinue comme la courbe (n, log p_n). Il est facile de voir que la pente de l'élément de n à $(n + 1)$ est $\left(1 - \frac{1}{r_n}\right)$.

D'après sa définition précédente, r_n est supérieur à 1 de telle sorte que log r_n et $\left(1 - \frac{1}{r_n}\right)$ varient dans le même sens. Si r_n est très grand, log r_n est très grand et $\left(1 - \frac{1}{r_n}\right)$ est voisin de 1; si r_n est voisin de 1, log r_n et $\left(1 - \frac{1}{r_n}\right)$ sont voisins de zéro. Ces remarques étant faites, on déduit aisément la forme de la courbe (a_n p_n) de celle de la courbe (n, log p_n) (fig. 3).

Ces deux courbes ont des formes analogues qui se correspondent : lorsque n croît, la pente de (a_n, p_n) commence par décroître (à partir de 1) dans une partie A'B', convexe vers le haut, qui correspond aux petits producteurs (comme AB pour la courbe log p_n, fig. 2), puis la pente est à peu près constante dans une partie médiane B'C' à peu près rectiligne qui correspond aux producteurs moyens (comme BC dans la courbe log p_n), enfin la pente croît à nouveau dans un partie C'D', concave vers le haut, qui correspond aux grands producteurs (comme CD dans la courbe log p_n). En revanche, alors que la courbe log p_n était sensiblement symétrique par rapport à un point médian M, la courbe (a_n, p_n) ne présente aucune symétrie.

Dans la courbe réelle pour l'or en 1937, à moins d'adopter une très grande échelle, on ne voit guère que la partie C'D' avec une brisure entre le 4e et le 5e producteur (entre le Canada et l'Australie). De tels décrochements, comme celui qui vient d'être signalé, se rencontrent ainsi dans ces courbes (y compris la courbe log p_n) et de telle manière que l'on peut difficilement les considérer comme accidentels en raison à la fois de leur importance et de leur stabilité dans le temps : l'explication de ces décrochements peut être cherchée dans certaines conditions économiques ou techniques, mais cette analyse nous entraînerait trop loin. Un exemple d'un tel décrochement serait également visible sur la courbe (n, log p_n) pour la houille : le décrochement entre $n = 32$ et $n = 33$ est très marqué et stable dans le temps.

La production d'or de 1931 à 1939.

On doit naturellement se poser la question de savoir si les résultats précédents sont stables, c'est-à-dire si l'on ne trouve pas des résultats très différents suivant l'année en cause.

La période 1931-1939 est intéressante à ce sujet, car les variations de production ont été considérables; l'or, par exemple, avait son minimum en 1932 avec 751 tonnes et son maximum en 1939 avec 1.200 tonnes; l'année 1937 est un cas moyen avec 1.073 tonnes (c'est en raison de cette valeur moyenne qu'on l'a choisie comme exemple).

Les courbes (n, log p_n) sont peu différentes pour les années extrêmes 1932,

SALLES D'ETUDES
FACULTE DE DROIT
ECONOMIQUES ET STATISTIQUES

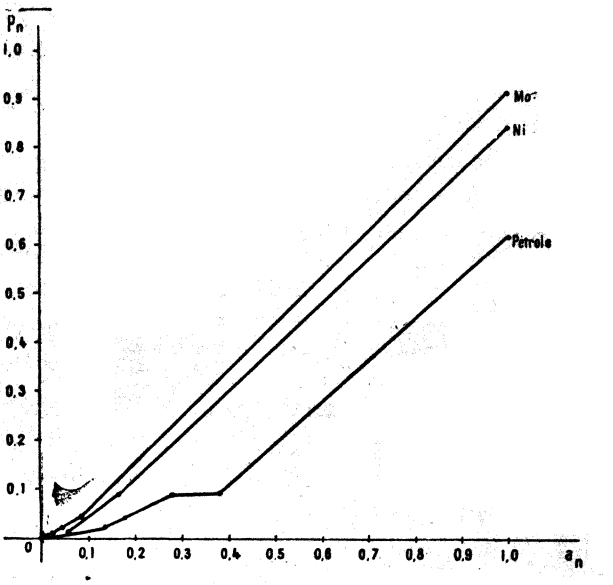

Fig. 4 . Productions de 1937. Courbes a_n, p_n. *Groupe des substances très concentrées.*

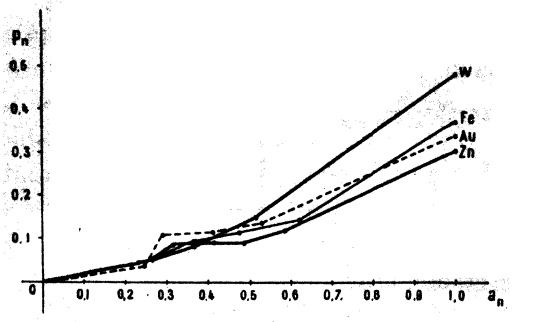

Fig. 5. Productions de 1937. Courbes $a_n\, p_n$. *Groupe de concentration moyenne.*

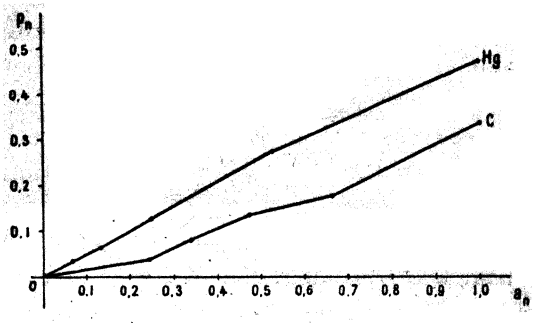

Fig. 6. Productions de 1937. Courbes $a_n\, p_n$. *Groupe peu concentré.*

1939 (l'emploi du log atténue les différences); les allures générales sont bien celles de l'année 1937 qui est intermédiaire.

Les courbes (a_n, p_n) présentent naturellement plus de différences; cependant elles conservent néanmoins des allures générales comparables. La part relative aux grands producteurs est plus faible pour les années à grande production (1936 à 1939) que pour les années à petite production (1931-1933); il est possible d'expliquer ce phénomène par des considérations techniques et économiques; on va voir plus loin que le cas de l'or est anormal à ce point de vue.

Le cas de substances diverses.

On peut admettre assez facilement que, pour une substance déterminée, les courbes (n, log p_n) ou (a_n, p_n) soient assez caractéristiques et d'allure générale relativement stable d'une année à l'autre : elles traduisent certains caractères intrinsèques de la répartition géologique de la substance, à peine voilés suivant les années par les conditions économiques.

En revanche, on peut se demander si l'on retrouve des résultats analogues lorsqu'on examine les différentes substances minérales : sans entrer dans trop de détails, je donnerai les grandes lignes de la réponse à cette question.

Les courbes (n, log p_n) ont toujours la forme de S allongé et ne seront pas étudiées plus en détail ici.

Lorsqu'on trace les courbes (a_n, p_n) pour les différentes substances minérales, on peut noter certaines particularités qui traduisent ce qu'on pourrait appeler le plus ou moins grand degré de *concentration géographique* de la substance.

La forme générale reste toujours celle qu'on a vue dans le cas de l'or; mais, suivant l'importance relative des trois parties, petits producteurs, producteurs moyens, grands producteurs, l'apparence peut être différente.

Le cas le plus fréquent correspond, comme pour l'or, à une partie si faible pour les petits producteurs (A'B') que le graphique ne permet pas de les distinguer, sauf à très grande échelle; de telle sorte que les points A' et B' sont sensiblement confondus avec l'origine; l'allure est donc celle d'une courbe composée : d'abord d'une partie rectiligne (A'B') C' qui correspond aux producteurs moyens, suivie d'une partie C'D' concave vers le haut, qui correspond aux grands producteurs. Suivant l'importance relative de ces deux parties, on peut distinguer les cas suivants :

1. Producteurs moyens négligeables, substances très concentrées (fig. 4); la courbe est à peu près uniquement formée de la branche C'D' qui peut même se réduire à la droite relative au seul principal producteur (molybdène, gaz naturel, nickel, soufre, lignite, pétrole);

2. Les producteurs moyens ont une certaine importance (fig. 5) : la courbe a alors la forme de celle de l'or, concave vers le haut (tungstène, manganèse, fer, cuivre, or, zinc, plomb, argent);

3. La part relative aux grands producteurs est moins marquée ou plutôt la courbure de la branche C'D' est faible (fig. 6) : dans ce cas, le graphique tout entier a une allure presque rectiligne (mercure, étain, houille, phosphate, pyrite, chrome)

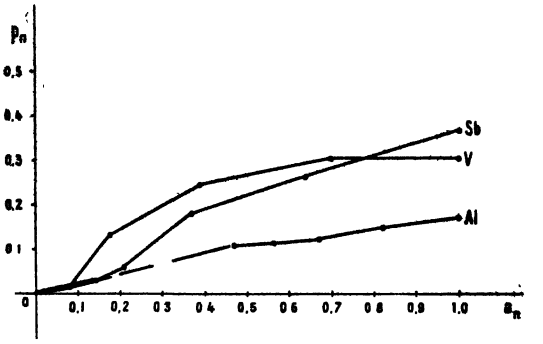

Fig. 7. Productions de 1937 Courbes $a_n p_n$. *Groupe très peu concentré.*

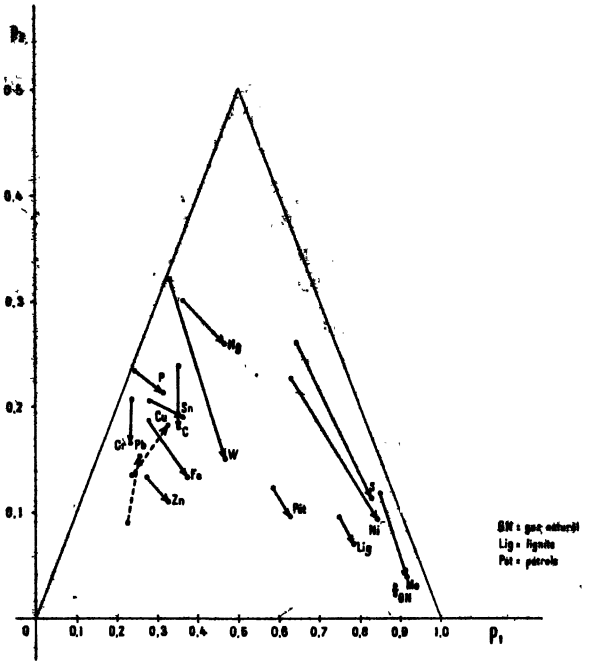

Fig. 8. Productions 1932-1937. Variations de la concentration. Eléments normaux

p_1 : production (relative) du 1er producteur
p_2 : " " 2e "
(Le symbole représentatif de la substance correspond à l'année 1937)

Enfin :

4. La part des petits producteurs peut être assez grande pour que la partie A'B' convexe vers le haut soit visible (fig. 7), corrélativement, la branche des producteurs moyens et grands est presque rectiligne (antimoine, vanadium, aluminium).

On a là quatre groupes à concentration décroissante; il est bien entendu que les coupures précédentes sont un peu arbitraires et que l'on peut trouver des passages d'un groupe à l'autre.

Cette notion de concentration est évidemment essentielle pour l'étude que nous esquissons. Sous la forme précédente, elle est peut être un peu complexe à manier, mais on peut en avoir une approximation simple et intéressante de la manière suivante :

Si l'on admet que les idées de Pareto ou de Gibrat s'appliquent au cas que nous envisageons, la courbe (n, log p_n) doit pouvoir être définie par trois ou quatre paramètres seulement. On peut, notamment, prendre comme paramètres la production mondiale et les fractions relatives aux deux ou trois plus grands producteurs. On voit donc qu'en valeur relative (c'est-à-dire à une translation près), la courbe (n, log p_n) devrait pouvoir être déterminée par la simple connaissance des productions (relatives) des deux ou trois plus grands producteurs; il en est de même de la forme de la courbe (a_u, p_n) qui découle directement de la précédente. On conçoit, dans ces conditions, qu'on puisse avoir une première idée de la concentration de la substance en ne considérant que les deux plus grands producteurs et en prenant comme seuls paramètres les fractions de la production mondiale qui leur correspondent.

On peut utiliser la notion précédente en définissant, sur un graphique approprié, chaque substance par un point dont l'abscisse est la fraction relative au plus fort producteur et l'ordonnée la fraction relative au deuxième plus fort producteur, quantités que nous appellerons ci-après p_1 et p_2.

Le point figuratif se déplace naturellement sur le diagramme suivant les années; lorsqu'on étudie ces variations en détail dans la période 1931 1939, on peut voir que le point reste au voisinage d'un segment de droite dont les points extrêmes correspondent aux années de production minimum (1932 en général) et de production maximum (1937 ou 1939).

En nous limitant, pour simplifier la figure, aux deux dates extrêmes et au segment intermédiaire, les diagrammes (fig. 8 et 9) montrent que les substances se groupent en deux catégories :

a) 1re catégorie : éléments normaux (fig. 8); pour la plupart des éléments, p_1 (production relative du plus fort producteur) augmente lorsque la production mondiale augmente, ce qui signifie qu'en période de crise la réduction est supportée principalement par le plus fort producteur. Pour la houille (C sur le diagramme) et le chrome (Cr) la variation de p_1 est insensible;

b) 2e catégorie : éléments anormaux (fig. 9). Pour quelques éléments (V, Mn, Ag, Au, Sb, Pyrite, Al), l'évolution a lieu en sens inverse : la part relative p_1 du principal producteur diminue lorsque la production mondiale augmente (une explication technique ou économique de ce phénomène pourrait être donnée).

Pour la plupart des éléments normaux (1re catégorie), l'augmentation de p_1,

fraction relative du plus grand producteur, s'accompagne de la diminution de p_2, fraction du deuxième producteur : de 1932 à 1937, le point figuratif se déplace vers le bas et la droite (fig. 8). Pour le plomb (Pb) et le cuivre (Cu), l'accroissement de p_1 est accompagné de l'augmentation de p_2 : la droite est alors orientée vers le haut et la droite (fig. 8).

Pour la plupart des éléments anormaux (2e catégorie) (fig. 9), la diminution de p_1 est accompagnée de l'accroissement de p_2 : la droite est alors orientée vers

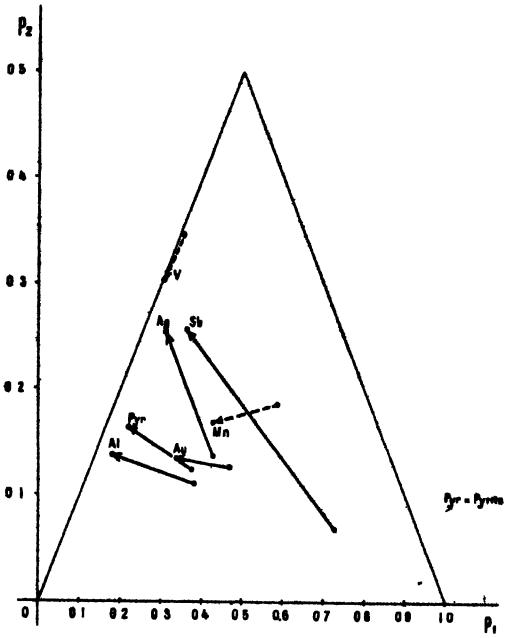

Fig 9 Productions 1932-1937 Variations de la concentration Eléments anormaux.
P_1 production (relative) du 1er producteur
P_2 ——— ——— — 2e ———
(Le symbole représentatif de la substance correspond à l'année 1937)

le haut et la gauche. Pour le vanadium (V) et le manganèse (Mn), les deux premiers producteurs diminuent : la droite est orientée vers le bas et la gauche.

De toute manière, chaque substance reste dans une certaine zone qui définit sa concentration.

On comprend que les données qui viennent d'être esquissées, dans la mesure où elles sont quantitatives, dépendent plus ou moins du découpage politique de la surface terrestre en États. Ce découpage représente d'ailleurs une réalité dont il est nécessaire de tenir compte lorsqu'on se pose des problèmes de politique économique; mais il n'a aucun sens lorsqu'on n'a en vue que des problèmes de prospection et de possibilités de découverte de productions nouvelles. Il faut alors considérer un découpage basé non plus sur des frontières politiques, mais sur des limites géologiques; cependant, la méthode reste la même. Il convient d'ajouter que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, les résultats qualitatifs ne sont pas très différents.

Conclusions.

Sans avoir besoin de développer les remarques qui précèdent, on comprend qu'elles puissent apporter une aide importante à la solution de certains problèmes pratiques relatifs à la prospection minière et à l'économie minérale (politique et commerciale) :

1. Par la méthode précédente, on peut introduire dans ces problèmes la notion de *hasard simple* et, par conséquent, les règles générales de la statistique mathématique;

2. On peut définir, d'une manière cohérente, les notions de *grands producteurs*, *producteurs moyens* et *petits producteurs*. On pourrait montrer que, dans le langage courant, ces expressions sont, suivant les cas, associées à des idées qui ne sont pas nécessairement cohérentes entre elles;

3. On peut, par l'analyse précédente, préciser la notion de *concentration géographique* d'une substance déterminée. On a pu se rendre compte que cette concentration reste qualitativement stable dans le temps pour une substance déterminée, mais qu'elle est assez variable suivant les substances. On conçoit qu'on puisse en déduire des conséquences pratiques importantes sur la manière de conduire les opérations commerciales du marché mondial et, en temps de guerre, de conduire un blocus efficace et un ravitaillement certain.

F. Blondel.

***