COMPOSITIO MATHEMATICA

LE DUNG TRANG
FRANÇOISE MICHEL
CLAUDE WEBER

Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes

Compositio Mathematica, tome 72, n° 1 (1989), p. 87-113
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1989__72_1_87_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica **72**: 87–113, 1989.
© 1989 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes

LE DUNG TRANG,[1] FRANCOISE MICHEL[2] & CLAUDE WEBER[3]*

[1]*Département de mathématiques, Université de Paris VII, Place Jussieu, F-75005 Paris, France;*
[2]*Département de mathématiques, Université de Nantes, 2 ch. de la Houssinière, F-44072 Nantes, France;*
[3]*Section de mathématiques, Université de Genève, 2–4 rue du Lièvre, case postale 240, CH-1211 Geneve 24, Switzerland (*author for correspondence)*

Received 23 September 1988

Section 1. Introduction

Soit f: $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ un germe à l'origine de fonction holomorphe, tel que $f(0) = 0$. Dans tout ce texte, nous supposons f réduit et non identiquement nul.

D'autre part, soit $t(X, Y) = bX - aY$ une forme linéaire, non identiquement nulle. *La polaire de f dans la direction définie par t* est, par définition, le germe de courbe $f'_t = a(\partial f/\partial X) + b(\partial f/\partial Y)$.

Dans cet article, nous exploitons la détermination des quotients polaires et les méthodes topologiques de [L.M.W.] pour obtenir des renseignements sur le comportement de la polaire f'_t lorsque t n'est pas dans le cone tangent de f. Plus précisément, soit π_0: $\Sigma_0 \to \mathbf{C}^2$ la résolution minimale de f et soit $E_0 = \pi_0^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel de la résolution. Notre théorème principal donne des restrictions importantes sur les points de contact avec E_0 de la transformée stricte par π_0 de $(f'_t)^{-1}(0)$.

Dans le langage des géomètres italiens, ceci a pour conséquence de donner des précisions sur les points infiniment voisins de l'origine qui sont communs à f et à f'_t. En d'autres termes, un peu vagues, nous précisons "où passe la polaire f'_t".

Voici brièvement quel est le contenu de cet article:

Dans la Section 2, nous donnons un énoncé détaillé du théorème principal de ce texte.

Dans la Section 3, nous faisons le lien entre d'une part le coefficient de contact au sens de H. Hironaka d'un germe ϕ et d'une branche β et, d'autre part, certaines propriétés des arbres de résolution de la singularité produit $\phi\beta$. Pour cela, nous introduisons la notion de coefficient d'insertion d'une composante irréductible du diviseur exceptionnel d'une résolution. Nous établissons au théorème (3.2) une propriété de croissance cruciale de ces coefficients d'insertion.

Dans la Section 4, nous étudions quand une branche β se détache d'un germe ϕ, après éclatements successifs.

La Section 5 est consacrée à la démonstration du théorème principal, après avoir rappelé ce qui est nécessaire de [L.M.W.].

La Section 6 contient des exemples.

Finalement, dans un appendice, nous avons exposé de façon détaillée comment construire l'arbre de résolution d'un germe à deux variables, en attribuant à ses sommets des poids rationnels, que nous avons baptisés quotients de Zariski. Cette façon de pondérer l'arbre de résolution est essentielle pour démontrer, de façon constructive, le théorème de croissance de la Section 3.

Les constructions explicites de l'appendice et les preuves constructives de la Section 3 permettent, entre autres choses, de calculer de façon systématique les quotients polaires de n'importe quel germe à deux variables.

Section 2. Enoncé du theorème principal

Nous commençons par quelques rappels sur les résolutions de germes de courbes planes. Pour des preuves complètes, voir [B.K.].

Soit $\pi: \Sigma \to \mathbf{C}^2$ une composition d'éclatements (de points). Le sous-espace $E = \pi^{-1}(0)$ est le *diviseur exceptionnel* de l'application π. C'est une courbe dans Σ, dont les composantes irréductibles sont toutes isomorphes à $P^1(\mathbf{C})$.

Soit $\Psi: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ un germe à l'origine de fonction holomorphe, non identiquement nul, et tel que $\Psi(0) = 0$. Notons $\hat{\Psi}$ la composition $\Psi \circ \pi$. L'adhérence de $\hat{\Psi}^{-1}(0) - E$ est la *transformée stricte* par π de $\Psi^{-1}(0)$. Nous ferons en général un petit abus de langage en disant qu'il s'agit de la transformée stricte par π de Ψ. L'intersection I de la transformée stricte avec le diviseur exceptionnel est un ensemble fini de points, appelé *ensemble des points de contacts* avec E de la transformée stricte.

Une composition d'éclatements $\pi: \Sigma \to \mathbf{C}^2$ est une *résolution* de Ψ si les trois conditions suivantes sont remplies:

(1) Les points de contact sont tous des points lisses de E.
(2) En chaque point de contact, il ne passe qu'une branche de la transformée stricte.
(3) Chaque branche de la transformée stricte est lisse et transverse au diviseur exceptionnel.

Une *résolution de* Ψ est *minimale* si aucune contraction de π n'est encore une résolution de Ψ. Voir [B.K.] Chapitre III Section 8.4.

A chaque résolution $\pi: \Sigma \to \mathbf{C}^2$ de Ψ, on associe un arbre R, qui est *l'arbre dual de la configuration du diviseur exceptionnel.* Plus précisément:

(i) Chaque composante irréductible de E est représentée par un sommet.
(ii) Deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux

composantes irréductibles correspondantes se coupent. C'est une propriété des compositions d'éclatements qu'une telle intersection est toujours transverse. De plus:

AFFIRMATION: (a) Deux composantes irréductibles se coupent en au plus un point. (b) Par un point de E, il passe au plus deux composantes irréductibles. (c) Le graphe ainsi construit est un arbre. Pour une démonstration de l'affirmation, voir [B.K.] Chapitre III Section 8.4 ou [M.W.] Chapitre VI Section 5. Finalement:

(iii) On représente chaque composante irréductible de la transformée stricte par une flèche. On attache cette flèche au sommet qui représente la composante irréductible de E contenant le point de contact.

NOTE. On peut pondérer l'arbre en associant aux sommets divers poids, entiers ou rationnels. Voir [B.K.] ou [M.W.]. Dans l'appendice, nous attribuons à chaque sommet de l'arbre un nombre rationnel positif, que nous appelons *quotient de Zariski.*

Conventions sur les arbres de résolution. Nous noterons $\#1$ la composante irréductible de E (et le sommet qui lui correspond dans l'arbre R) créée lors du premier éclatement, c'est-à-dire lors de l'éclatement de l'origine dans $\mathbf{C}^2$. Les arêtes de l'arbre R sont orientées positivement lorsqu'on les parcourt en s'éloignant du sommet $\#1$. *L'origine* de l'arête α est le point du bord de α qui est le plus proche de $\#1$; tandis que son *extrémité* en est le point le plus éloigné.

Vocabulaire pour les arbres de résolution. Si P est un sommet de R, *la valence de* P, *notée* $v(P)$, est le nombre de flèches et d'arêtes qui s'attachent à P. Le sommet P est un *sommet de rupture* si sa valence $v(P)$ est supérieure ou égale à 3. Cette terminologie est due à P. Deligne dans [De.]. Le sommet P est une *extrémité* si P est distinct du sommet $\#1$ et si $v(P)$ est égal à 1. Une *branche morte* de R est une géodésique de R reliant un sommet de rupture à une extrémité et telle que tous les autres sommets sur la géodésique aient valence 2. Il résulte de la construction de R que d'un sommet de rupture il part au plus une branche morte. C'est une conséquence immédiate, par exemple, de la construction de R que nous donnons dans l'appendice. Voir aussi [B.K.] Chapitre III Section 8.4.

Le théorème principal de cet article est le suivant:

(2.1) THEOREME. *Soit* $f\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ *un germe réduit et soit* $t(X, Y) = bX - aY$ *une forme linéaire qui n'appartient pas un cone tangent de* f. *Soit* $\pi_0\colon \Sigma_0 \to \mathbf{C}^2$ *la résolution minimale de* f. *Soit* I *l'ensemble des points de contact de la transformée stricte de* f *et soit* I'_t *l'ensemble de ceux de* f'_t. *Alors:*

(1) $I \cap I'_t = \emptyset$. *En d'autres termes,* f'_t *se détache déjà de* f *dans la résolution minimale de* f.

(2) *Si le cone tangent de f se compose exactement de deux droites, l'_t rencontre la composante $\#1$ exactement une fois et en un point lisse.*
(3) *l'_t rencontre au moins une fois chaque composante de rupture sans branche morte. Les points de contract en question sont tous lisses.*
(4) *l'_t rencontre chaque branche morte.*
(5) *l'_t ne rencontre aucune composante irréductible de E qui n'est pas mentionnée dans* (2), (3) *ou* (4).

REMARQUES. (i) Le point (4) du théorème ne précise pas quelles composantes d'une branche morte contiennent des points de l'_t. Une telle précision parait difficile. En effet, nous verrons sur des exemples à la Section 6 que ces composantes varient, en général, en fonction de la forme linéaire t, et en fonction de l'équation f représentant une classe d'équisingularité donnée.

(ii) Le point (1) du théorème est connu des spécialistes, tout au moins dans le cas où f est irréductible.
(iii) Des résultats plus précis sont connus pour des équations f particulières. Voir [Ca. 1], [Ca. 2], [Du.] et [M].

Section 3. Coefficients d'insertion

Dans tout ce paragraphe, $\phi: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ est un germe non identiquement nul et $\beta: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ est un germe irréductible. On suppose que β n'est pas une branche de ϕ.

DEFINITION. Le *coefficient de contact de ϕ avec β* (au sens de H. Hironaka) est le nombre rationnel positif:

$$h(\phi, \beta) = \frac{I(\phi, \beta)}{\text{mult}(\beta)} \quad \text{où} \quad I(\phi, \beta) \text{ désigne le nombre d'intersection à l'origine de}$$

ϕ et β et où mult (β) est la multiplicité de β.

Voir. [Hi.] p. 5. Noter que Hironaka suppose ϕ lisse, mais sa définition s'étend de suite au cas général.

REMARQUE. Cette notion de contact est non symétrique en ϕ et β. Elle est mieux comprise intuitivement si l'on s'imagine ϕ comme fixe et β comme variable. Alors, par exemple, toutes les branches β transverses à ϕ donnent la même valeur mult(ϕ) pour $h(\phi, \beta)$. C'est la valeur minimale que peut prendre $h(\phi, -)$.

Quotients polaires. Notons γ_t une branche de la polaire $f'_t = a(\partial f/\partial X) + b(\partial f/bY)$. Par définition, *l'ensemble Q_t des quotients polaires de f pour la direction définie par* t est le sous-ensemble des rationnels composé des coefficients de contact $h(f, \gamma_t)$, lorsque γ_t parcourt l'ensemble des branches de la polaire f'_t. Voir [Le 2] et [Te.].

Si t n'est pas dans le cone tangent de f, l'ensemble Q_t a été déterminé dans [L.M.W.]. Cette détermination, ainsi que les méthodes utilisées pour y parvenir, nous permettront à la Section 5 de démontrer le Théorème (2.1) sur le comportement de f_t'. Auparavant, nous allons développer des propriétés du coefficient de contact, en relation avec la résolution des singularités. Pour cela, nous revenons à la situation du début de ce paragraphe.

Soient $\pi\colon \Sigma \to \mathbf{C}^2$ une résolution de ϕ, E son diviseur exceptionnel, I l'ensemble des points de contact. Choisissons une composante irréductible C de E et un point A sur C qui soit un point lisse de E. Supposons que A n'appartient pas à I.

DEFINITION. Une *curvette* ρ_C de C (en A) est une branche lisse en A, transverse à C. Cette terminologie est due à P. Deligne.

L'image $\pi(\rho_C)$ est une branche en l'origine de $\mathbf{C}^2$. Sa topologie, de même que la topologie de la courbe $|\phi^{-1}(0)| \cup \pi(\rho_C)$, ne dépendent pas du choix de la curvette ρ_C transverse à C. (Le lieu des zéros, réduit, $\phi^{-1}(0)$ est noté $|\phi^{-1}(0)|$). Par conséquent, le coefficient de contact $h(\phi, \pi(\rho_C))$ ne dépend que de C.

Soit maintenant R l'arbre (dual) de la résolution π. Soit P le sommet de R qui représente la composante C. Par abus de langage, ρ_C sera aussi appelée une curvette du sommet P et, par abus de notation, notée ρ_P.

DEFINITION. Le *coefficient d'insertion* $q(P)$ du sommet P est le coefficient de contact $h(\phi, \pi(\rho_P))$.

Les notions de coefficient de contact et de coefficient d'insertion sont intimément liées, comme le théorème suivant l'indique. Pour le voir, soit $\pi\colon \Sigma \to \mathbf{C}^2$ une résolution de ϕ et soit R son arbre. Supposons que π soit aussi une résolution de $\phi\beta$. Soient $\phi_1, \ldots, \phi_i, \ldots, \phi_r$ les branches de ϕ. Notons Γ_i la géodésique de R qui relie le sommet $\#1$ à l'extrémité de la flèche qui représente ϕ_i. Notons Γ la géodésique de R qui relie $\#1$ à la flèche qui représente β.

DEFINITION. Le *sommet de séparation* $P_{\text{sép.}}$ de ϕ avec β est le sommet le plus éloigné de $\#1$ qui se trouve sur $\bigcup_i(\Gamma \cap \Gamma_i)$.

(3.1) THEOREME. *On a l'égalité* $h(\phi, \beta) = q(P_{\text{sép.}})$.

NOTE. Ce théorème n'est pas vraiment nouveau. Voir [Zar.] Section 6, pour ϕ irréductible.

Le théorème suivant porte sur la croissance des coefficients d'insertion lorsqu'on se déplace dans l'arbre de résolution. C'est, d'un point de vue technique, un énoncé important de cet article. Sur lui reposeront largement les arguments nécessaires pour prouver le Théorème (2.1).

NOTATION. Si P est un sommet de l'arbre R, notons $q_i(P)$ le coefficient de contact $h(\phi_i, \pi(\rho_P))$.

(3.2) THEOREME. *Soit a une arète R, d'origine P et d'extrémité P'. On a*: (1) *$q_i(P) < q_i(P')$ si, en parcourant l'arète a dans le sens positif on se rapproche de la flèche symbolisant ϕ_i.* (2) *$q_i(P) = q_i(P')$ sinon.*

(3.3) COROLLAIRE. *Soit a une arète de R comme dans le théorè*me (3.2). *Alors*:

(i) *$q(P) = q(P')$ si l'arète a se trouve sur une branche morte.*
(ii) *$q(P) < q(P')$ sinon.*

NOTE. A nouveau, ce type de résultats est plus ou moins connu. Voir, par exemple, [Zar.] p. 938.

Preuve du corollaire. Ecrivons $\phi = \Pi_{i=1}^{r} \phi_i^{\varepsilon_i}$ avec ε_i entier strictement positif. Par bilinéarité du nombre d'intersection, on a $q(P) = \Sigma_{i=1}^{r} \varepsilon_i q_i(P)$. Le corollaire est maintenant une conséquence immédiate du Théorème (3.2), si l'on observe qu'une arète se trouve sur une branche morte si et seulement si on s'éloigne de toutes les flèches de l'arbre R en la parcourant dans le sens positif.

Nous passons maintenant aux démonstrations des Théorèmes (3.1) et (3.2). Elles reposent fortement sur la pondération des arbres de résolution par les "quotients de Zariski" telle qu'elle est établie dans l'appendice de cet article. Nous conseillons au lecteur de s'y reporter avant de poursuivre la lecture de ce paragraphe.

Comme dans l'appendice, nous noterons u_P/v_P le nombre rationnel (quotient de Zariski) attaché au sommet P. Ici, u_P et v_P sont des entiers positifs, premiers entre eux.

DEFINITION–NOTATION: Soit P un sommet de l'arbre R. Soient ρ_P et ρ'_P deux curvettes du sommet P, disjointes. On pose alors $\Lambda_P = I(\pi(\rho_P), \pi(\rho'_P))$. Bien sûr, Λ_P peut s'interpréter topologiquement comme coefficient d'enlacement d'un certain noeud du tore itéré avec un de ses parallèles.

Nous allons maintenant énoncer trois lemmes. Il s'agit de reformulations, adaptées à nos besoins, de résultats classiques. Les démonstrations peuvent se faire de plusieurs façons:

1° En utilisant les calculs de O. Zariski dans [Zar.] Section 6.
2° En utilisant la formule d'intersection de M. Noether, telle qu'elle est donnée par exemple dans [B.K.] Satz 13 p. 690.
3° En passant par la topologie, via le calcul des coefficients d'enlacement des composantes d'un entrelacs torique itéré. Voir, par exemple, [M.W.] Chapitre 5 Section 4.

LEMME 1. *Λ_P ne dépend pas du choix des deux curvettes, le sommet P étant fixé. De plus le quotient Λ_P/v_P est un entier.*

NOTATION. On pose $\ell_P = \Lambda_P/v_P$.

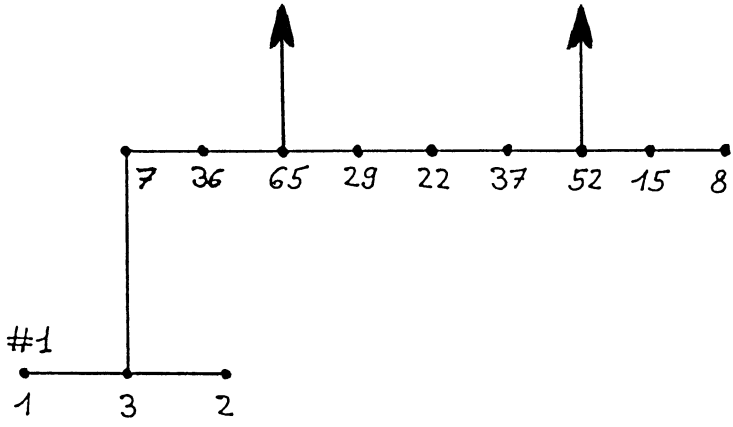
Méthode de calcul de ℓ_P. On considère la géodésique de l'arbre R qui relie le

sommet $\#1$ au sommet P. On fait la liste des quotients de Zariski attachés aux sommets caractéristiques (définis dans l'appendice) que l'on rencontre successivement en parcourant la géodésique, et dont on sort par la tige. Soit p_1/q_1, $p_2/q_2, \ldots, p_{w-1}/q_{w-1}$ cette liste. On adjoint à cette liste $p_w/q_w = u_P/v_P$. On considère les entiers $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_w$ définis inductivement de la façon suivante:

$$\ell_1 = p_1; \ell_2 = \ell_1 q_1 q_2 + p_2; \ldots; \ell_w = \ell_{w-1} q_{w-1} q_w + p_w.$$

LEMME 2. *On a l'égalité:* $\ell_w = \ell_P$.

Nous illustrons le calcul des entiers ℓ_P en considérant la singularité à deux branches étudiée dans l'appendice. Nous dessinons son arbre de résolution, en indiquant la valeur de l'entier ℓ en chaque sommet.



Calcul du nombre d'intersection de deux branches de ϕ. Soient α_1 et α_2 deux flèches de l'arbre de R, représentant les branches ϕ_1 et ϕ_2 de ϕ. On peut calculer le nombre d'intersection $I(\phi_1, \phi_2)$ de la façon suivante:

On considère la géodésique Γ_i de l'arbre R qui relie le sommet $\#1$ à la flèche α_i. On considère l'intersection $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ et on note $P_{\text{sép.}}$ le sommet de l'intersection qui est le plus éloigné de $\#1$. $P_{\text{sép.}}$ est le sommet de séparation des branches ϕ_1 et ϕ_2. Ecrivons $\Lambda_{\text{sép.}}$ pour $\Lambda_{P_{\text{sép.}}}$. Soit $\rho_{\text{sép.}}$ une curvette de $P_{\text{sép.}}$.

LEMME 3. *On a l'égalité*:

$$I(\phi_1, \phi_2) = \frac{\text{mult}(\phi_1)\ \text{mult}(\phi_2)\Lambda_{\text{sép.}}}{\text{mult}(\rho_{\text{sép.}})^2}$$

NOTE. Dans un langage un peu différent, c'est la formule (18) p. 952 de [Zar.]. Voir aussi [M.W.] Chap. 5 Prop. (5.4.1).

Des lemmes précédents, on peut déduire une règle de calcul des coefficients d'insertion partiels $q_i(P)$. Voici comment: Dans l'arbre R, on considère la géodésique Γ_i qui relie le sommet $\#1$ à la flèche α_i. Soit Γ_P la géodésique qui relie $\#1$ à P. Soit $P_{\text{sép.}}$ le sommet de séparation de ces deux géodésiques.

LEMME 4. *On a l'égalité*:

$$q_i(P)=\frac{\text{mult}(\phi_i)\Lambda_{\text{sép.}}}{\text{mult}(\rho_{\text{sép.}})^2}.$$

Le Lemme 4 se déduit immédiatement du Lemme 3 et de la définition de $q_i(P)$.

Nous pouvons maintenant passer à la *démonstration des Théorèmes* (3.1) *et* (3.2).

Preuve de (3.2) *partie* (2). Comme on s'éloigne de la flèche α_i en parcourant l'arête a, le sommet de séparation pour Γ_i et Γ_P est le même que le sommet de séparation pour Γ_i et $\Gamma_{P'}$. La formule du Lemme 4 montre alors immédiatement que $q_i(P) = q_i(P')$.

Preuve du Théorème (3.1). Notons P_i le sommet de séparation de Γ_i et de Γ. Les lemmes 3 et 4 montrent immédiatement que $h(\phi_i, \beta) = q_i(P_i)$. La partie (2) du Théorème (3.2) implique que $q_i(P_i) = q_i(P_{\text{sép.}})$. La bilinéarité du nombre d'intersection achève la démonstration.

Preuve de (3.2) *partie* (1). Comme R est un arbre, le fait que l'on se rapproche de α_i en parcourant l'arête a (orientée positivement en s'éloignant de $\#1$) implique que l'arête a se trouve sur la géodésique Γ_i. Par conséquent, P est le sommet de séparation des géodésiques Γ_i et Γ_P. De même, P' est le sommet de séparation des géodésiques Γ_i et $\Gamma_{P'}$.

Nous allons maintenant calculer ℓ_P et $\ell_{P'}$ en utilisant le Lemme 2. Pour cela, nous considérons les paires caractértistiques pour le sommet P': $p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots, p_{w-1}/q_{w-1}$. On a: $\ell_P = \ell_{w-1} q_{w-1} q_{w-1} v_P + u_P$ et $\ell_{P'} = \ell_{w-1} q_{w-1} v_{P'} + u_{P'}$.

NOTE. Ces deux formules sont vraies sauf dans le cas suivant: P est un sommet caractéristique pour $\Gamma_{P'}$ et P' est le premier sommet sur la tige qui sort de P. Alors, une variante des calculs que nous allons faire donne le résultat cherché.

Par le Lemme 4 on a:

$$q_i(P) = \frac{\text{mult}(\phi_i)}{\text{mult}(\rho_{\text{sép.}})^2}\Lambda_{\text{sép.}}$$

et donc

$$q_i(P) = \frac{\text{mult}(\phi_i)}{(q_1 q_2 \ldots q_{w-1})^2 v_P^2}\Lambda_{\text{sép.}}.$$

Or, par définition de ℓ_P on a: $\Lambda_P = \ell_P v_P$. Donc:

$$q_i(P) = \frac{\text{mult}(\phi_i)}{(q_1 q_2 \cdots q_{w-1})^2} \cdot \frac{\ell_P}{v_P}. \quad \text{De même:}$$

$$q_i(P') = \frac{\text{mult}(\phi_i)}{(q_1 q_2 \cdots q_{w-1})^2} \cdot \frac{\ell_{P'}}{v_{P'}}.$$

En remplaçant ℓ_P et $\ell_{P'}$ on obtient:

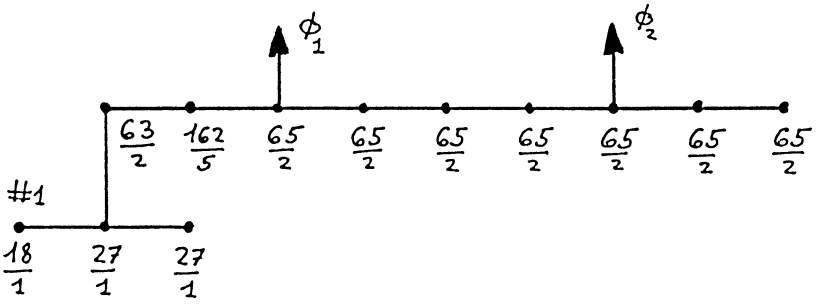
$$q_i(P) = \frac{\text{mult}(\phi_i)}{(q_1 q_2 \cdots q_{w-1})^2}\left(\ell_{w-1} q_{w-1} + \frac{u_P}{v_P}\right),$$

$$q_i(P') = \frac{\text{mult}(\phi_i)}{(q_1 q_2 \cdots q_{w-1})^2}\left(\ell_{w-1} q_{w-1} + \frac{u_{P'}}{v_{P'}}\right).$$

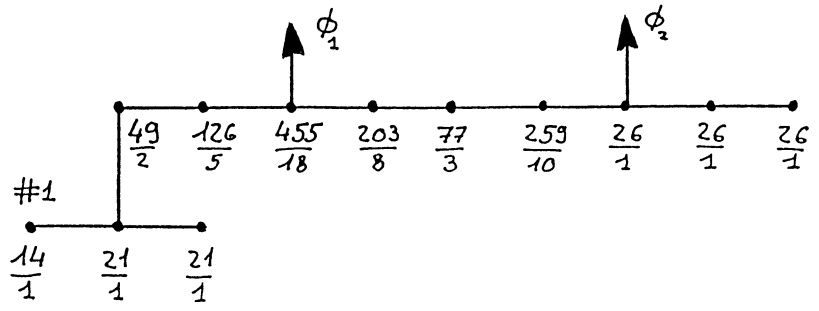
Comme $u_P/v_P < u_{P'}/v_{P'}$ on a bien l'inégalité annoncée. Ceci achève la démonstration du Théorème (3.2).

Nous illustrons maintenant le théorème (3.2) en calculant les coefficients q_1, q_2 et q pour la singularité à deux branches étudiée dans l'appendice. En ce qui concerne les notations, nous avons $\phi_1 = F$ et $\phi_2 = \hat{F}$.

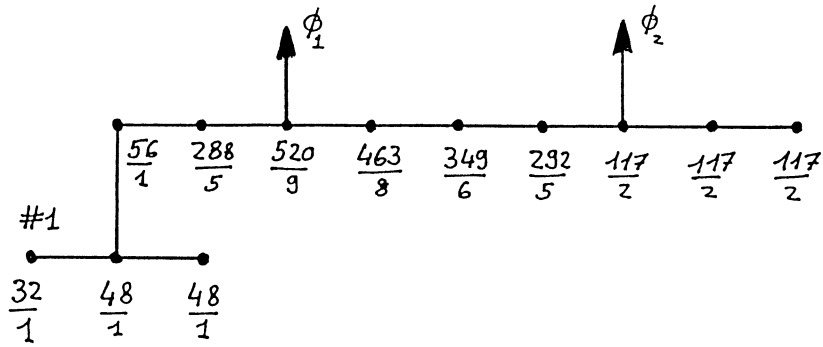
Coefficients q_1.



Coefficients q_2.



Coefficients q.



Nous achevons ce paragraphe par quelques remarques au sujet de la notion de coefficient de contact. Pour ne pas alourdir l'exposition, nous nous donnons deux singularités irréductibles (deux branches) β_1 et β_2. Une façon (fort ancienne) de définir le contact est de procéder "à la F. Enriques", comme suit:

DEFINITION. Le *coefficient de contact au sens d'Enriques* de β_1 et β_2 est le nombre d'éclatements qu'il faut faire pour détacher β_1 et β_2. Nous le noterons $e(\beta_1; \beta_2)$.

Ainsi, deux branches sont transverses si et seulement si elles ont coefficient de contact au sens d'Enriques égal à 1. Cette notion de contact est particulièrement bien adaptée au diagramme d'Enriques de la singularité produit $\beta_1 \cdot \beta_2$. Voir "Mültplizitätsequenzen" dans [B.K.]. Dans ce langage, $e(\beta_1; \beta_2)$ n'est rien d'autre que le nombre de sommets sur la géodésique qui relie le sommet $\#1$ au sommet "de séparation" dans le diagramme d'Enriques.

Comparaison entre Enriques et Hironaka. Considérons β_1 comme fixe et β_2 comme variable.

AFFIRMATION. Les hiérarchies de contact induites sur l'ensemble des germes β_2 par $h(\beta_1; -)$ et par $e(\beta_1; -)$ ne sont pas les mêmes. Voici un exemple:

Soient β_1 la branche d'équation $Y^5 - X^{12} = 0$; β_2 la branche $Y^3 - X^7 = 0$ et $\hat{\beta}_2$ la branche $Y = 0$. On a:

$$e(\beta_1; \beta_2) = 5 > e(\beta_1; \hat{\beta}_2) = 3 \quad \text{tandis que}$$

$$h(\beta_1; \beta_2) = 35/12 < h(\beta_1; \hat{\beta}_2) = 12.$$

Les résultats de cet article indiquent que, pour mesurer le contact entre f et les branches de la polaire f'_t, le coefficient h est mieux adapté que le coefficient e.

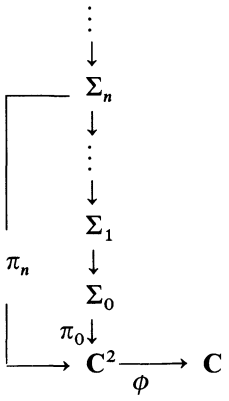
Section 4. Points de détachement

A nouveau, soit $\phi: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ un germe à l'origine de fonction holomorphe, réduit, tel que $\phi(0) = 0$. Soit $\pi_0: \Sigma_0 \to \mathbf{C}^2$ la résolution minimale de ϕ. Soient E_0 son diviseur exceptionnel et I_0 l'ensemble (fini) des points de contact.

Eclatons chaque point de contact. Nous obtenons une projection $\Sigma_1 \to \Sigma_0$. La composition $\pi_1: \Sigma_1 \to \Sigma_0 \to \mathbf{C}^2$ est une résolution de ϕ, de diviseur exceptionnel E_1 et d'ensemble de points de contact I_1.

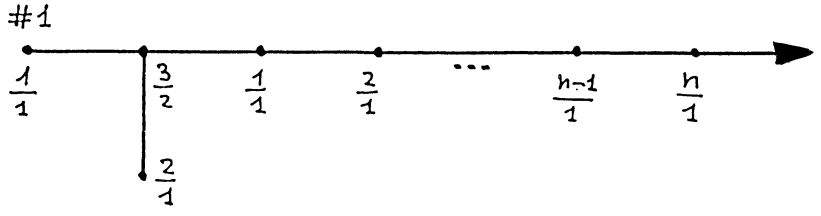
Eclatons maintanant chaque point de I_1. Nous obtenons une résolution $\pi_2: \Sigma_2 \to \mathbf{C}^2$. En poursuivant indéfiniment ce jeu, nous obtenons une "tour de résolutions" que l'on pourrait appeler la tour des "petites" résolutions de ϕ. (Ces résolutions sont raisonnables en un certain sens, car elles sont obtenues en n'éclatant que des points de contact).

On peut représenter ce que l'on obtient par un diagramme:



Bien entendu, on notera E_n le diviseur exceptionnel de π_n et I_n l'ensemble des points de contact de la transformée stricte avec E_n.

PARENTHESE. L'arbre de résolution R_n de π_n est obtenu en 'allongeant" chaque flèche de l'arbre R_0, de façon à lui faire porter n sommets. La pondération par quotients de Zariski est facile à décrire: le sommet le plus proche de la flèche porte le quotient $n/1$; celui qui est juste avant porte le quotient $n - 1/1$; etc. Par exemple, l'arbre R_n pour le cusp $Y^2 - X^3 = 0$ est et suivant:



Fin de la parenthèse.

Soit maintenant β un germe irréductible qui ne soit pas une branche de ϕ. Cette dernière hypothèse entraine qu'il existe un entier n tel que le point de contact de la transformée stricte par π_n de β n'appartienne pas à I_n. Soit $\hat{n}$ le plus petit entier ayant cette propriété. Le point de contact de la transformée stricte par $\pi_{\hat{n}}$ de β sera appelé *point de détachement* de β avec ϕ et sera noté Dét(β). Par construction même, Dét(β) n'appartient pas à $I_{\hat{n}}$. Il y a alors deux cas possibles.

Premier cas. Dét(β) est un point lisse de $E_{\hat{n}}$. Il appartient donc à exactement une composante irréductible C de $E_{\hat{n}}$. Notons P le sommet de $R_{\hat{n}}$ qui représente C.

Deuxième cas. Dét(β) se trouve sur l'intersection de deux composantes irréductibles C et C' de $E_{\hat{n}}$. Notons a l'arête orientée de $R_{\hat{n}}$ qui représente l'intersection de C et C'. Notons P l'origine de l'arête a et P' son extrémité.

(4.1) THOREME. *Dans le premier cas, on a* $h(\phi;\beta) = q(P)$. *Dans le deuxième cas on a:* (i) $q(P) < h(\phi;\beta) < q(P')$ *si l'arête a ne se trouve pas sur une branche morte de l'arbre* $R_{\hat{n}}$. (ii) $q(P) = h(\phi;\beta) = q(P')$ *si l'arête a se trouve sur une branche morte de l'arbre* $R_{\hat{n}}$.

Preuve du Thèorème (4.1). La démonstration est très simple dans son principe. Elle consiste à examiner ce qu'il faut faire pour passer de la résolution $\pi_{\hat{n}}$ de ϕ à une résolution de $\phi \cdot \beta$, puis à appliquer les résultats de la Section 3. Or, on sait que β est détachée de ϕ dans la résolution $\pi_{\hat{n}}$. Il s'agit donc de faire suffisamment d'éclatements successifs à cette résolution pour que la transformée stricte de β devienne lisse et transverse au diviseur exceptionnel.

Dans le premier cas, quelle que soit la position de la transformée stricte de β par $\pi_{\hat{n}}$, c'est le fait qu'elle passe par un point lisse de $E_{\hat{n}}$ qui compte. Dans un arbre de résolution du produit $\phi \cdot \beta$, le sommet P sera le sommet de séparation de β avec ϕ. Le résultat est alors une conséquence immédiate du Théorème (3.1).

Dans le deuxième cas, pour obtenir un arbre de résolution de $\phi \cdot \beta$ à partir de $R_{\hat{n}}$ il faut commencer par remplacer l'arête a par un segment plus long, avec plusieurs sommets intermédiaires entre P et P'. Ce segment correspond aux éclatements qu'il faut faire pour que β passe par un point lisse du diviseur exceptionnel. L'un de ces sommets intermédiaires sera le sommet de séparation de β avec ϕ. Le résultat suit alors immédiatement du Théorème (3.1) et du Corollaire (3.3).

Ceci achève la preuve du Théorème (4.1).

Nous concluons ce paragraphe en considérant le cas où β n'est pas détachée de ϕ.

Soit $\pi: \Sigma \to \mathbf{C}^2$ une résolution de ϕ. Soit Z le point de contact de la transformée stricte par π de β. Supposons que $Z \in I$. Comme π est une résolution de ϕ, Z est un point lisse de E. Soit donc C la composante irréductible de E telle que $Z \in C$ et soit P le sommet de l'arbre R qui représente C.

(4.2) THEOREME. *On a l'inégalité stricte* $q(P) < h(\phi;\beta)$.

Preuve du théorème (4.2). Nous allons suivre le même chemin que dans la

preuve du Théorème (4.1). Pour obtenir une résolution de $\phi \cdot \beta$ à partir de π, il faut commencer par faire plusieurs éclatements (et au moins un) pour détacher β de la branche ϕ_1 (par choix de notations) de ϕ qui passe par Z.

Ceci a pour effet de transformer l'arbre R en allongeant la tige sur laquelle la flèche symbolisant ϕ_1 se trouve. Lorsqu'on aura finalement une résolution de $\phi \cdot \beta$, un des sommets de cette tige allongée sera le sommet de séparation de β avec ϕ_1. Les sommets de séparation de β avec les autres branches ϕ_i pour $i \geqslant 2$ étaient déjà définis dans R et ne changent pas.

Les Théorèmes (3.1) et (3.2) donnent immédiatement le résultat.

Section 5. Preuve du théoreme principal

Nous commençons par rappeler, sous la forme qui nous convient, les principaux résultats de [L.M.W.].

Envisageons le germe à l'origine Φ_t d'application de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2$ défini par $\Phi_t(x, y) = (t(x, y), (f(x, y))$. Le lieu critique de Φ_t est exactement le lieu des zéros de la polaire f'_t comme le montre un calcul facile.

Soit $\varepsilon > 0$ le rayon d'une boule de Milnor pour f, qu'on considère comme fixe. Soit $\theta > 0$ un nombre réel suffisamment petit par rapport à ε. On note B l'ensemble des points (x, y) de la boule fermée D^4_ε de $\mathbf{C}^2$ (centrée à l'origine, de rayon ε) tels que $|x| \leqslant \theta$. Soit $\eta > 0$ un nombre réel, très petit par rapport à θ. On pose $\nabla = B \cap f^{-1}(D^2_\eta)$ et $M_\eta = B \cap f^{-1}(S^1_\eta)$. Ici, D^2_η est le disque de rayon η dans $\mathbf{C}$, centré à l'origine. Son bord est S^1_η. Le bord $b\nabla$ de ∇ est égal à $M_\eta \cup (bB \cap f^{-1}(D^2_\eta))$.

Nous avons démontré dans [L.M.W.] Prop. 2.1.8 ce qui suit:

AFFIRMATION. Il existe un difféomorphisme de $b\nabla$ sur la sphère de Milnor S^3_ε envoyant $\mathbf{K} = bB \cap f^{-1}(0)$ sur $K = S^3_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$.

Comme K est l'entrelacs algébrique associé au germe f, ce difféomorphisme permet d'identifier M_η avec l'extérieur M de l'entrelacs K, ce que nous ferons désormais.

NOTATION. Soit $M = \cup M_j$ la *décomposition minimale de Waldhausen* de M et soit J la *famille de Jaco-Shalen* qui lui est associée.

Pour chaque composante connexe M_j de la décomposition, choisissons une *fibre régulière de Seifert* ζ_j. Considérons alors le coefficient de contact au sens topologique de l'entrelacs K associé à f avec ζ_j. Il est défini par:

$$k(K, \zeta_j) = \frac{\pounds(K, \zeta_j)}{b(\zeta_j)}.$$

Explication des notations. (i) $\pounds(K, \zeta_j)$ désigne le coefficient d'enlacement dans

la sphère $b\nabla$ de l'entrelacs K avec le noeud ζ_j. (Tout le monde est orienté). Par le théorème de S. Lefschetz (Voir, par exemple, [Re.]) $\pounds(K, \zeta_j)$ est égal au nombre d'intersection à l'origine de $f^{-1}(0)$ avec une branche définissant ζ_j. (ii) $b(\zeta_j)$ désigne le "braid index" du noeud ζ_j. Il s'agit du nombre minimal de brins d'une tresse λ telle que la tresse fermée $\hat{\lambda}$ soit un noeud isotope à ζ_j. Deux théorèmes de H. Schubert [Sch.] théorèmes 9 et 10, impliquent que, pour un noeud algébrique, le "braid index" est égal à la multiplicité d'une branche qui définit le noeud.

Par construction, le nombre rationnel $k(K, \zeta_j)$ ne dépend que de la composante M_j. C'est un invariant topologique de l'entrelacs $K \subset S^3_\varepsilon$.

NOTATION. Nous écrirons $c(M_j)$ pour $k(K, \zeta_j)$.

Maintenant, la description que nous avons donnée dans [L.M.W.] de la décomposition minimale de Waldhausen de l'extérieur M montre que chaque composante connexe M_j est obtenue à partir d'un sommet de rupture bien défini P_j de l'arbre R_0 de la résolution minimale de f. On peut prendre pour fibre de Seifert ζ_j le bord d'une curvette ρ_j du sommet P_j.

(5.1). PROPOSITION. On a l'égalité $c(M_j) = q(P_j)$.

COROLLAIRE. *Le coefficient $q(P_j)$ est un invariant topologique de la singularité de f à l'origine.*

Preuve de la proposition. Elle découle immédiatement du théorème de Lefschetz sur l'égalité entre nombre d'intersection et coefficient d'enlacement d'une part et de l'égalité entre multiplicité et "braid index" d'autre part.

Nous énonçons maintenant les résultats importants pour nous de [L.M.W.] sous forme de quatre faits. Nous notons Γ le lieu des zéros de la polaire f'_t et γ une branche de Γ. Dans tout ce qui suit, t est une forme linéaire non contenue dans le cone tangent de f.

1*er fait.* Lorsque le cone tangent de f se compose exactement de deux droites, il y a une et une seule branche γ telle que son quotient polaire soit égal à mult(f).

2*e fait.* Après isotopie éventuelle de la famille de Jaco-Shalen J, l'intersection $\Gamma \cap M$ ne rencontre pas J.

Fixons J. Pour chaque branche γ, l'intersection $\gamma \cap M$ est, par conséquent, un noeud dans M, entièrement contenu dans une composante connexe bien définie de la décomposition minimale de Waldhausen. Notons cette composante $M(\gamma)$. Nous supposons maintenant:

Hypothèse H. Ou bien γ est une composante quelconque de Γ lorsque le cone tangent de f ne se compose pas exactement de deux droites, ou bien γ est une composante de Γ dont le quotient polaire n'est pas égal à mult(f) lorsque le cone tangent de f se compose exactement de deux droites. Dans ces conditions:

3*e fait.* Le quotient polaire $h(f, \gamma)$ associé à γ est égal à $c(M(\gamma))$.

REMARQUE. Ce fait est absolument crucial. Il va plus loin que le simple calcul des quotients polaires.

4*e fait*: Pour toute composante connexe M_j de la décomposition minimale de Waldhausen de M, il existe au moins une branche γ de Γ telle que $\gamma \cap M \subset M_j$.

Démonstration proprement-dite du Théorème (2.1). Commençons par régler le cas du sommet $\neq 1$, lorsque sa valence est égale à 2, c'est-à-dire lorsque le cone tangent de f se compose exactement de deux droites. En ce cas, le premier fait que nous venons d'énoncer affirme qu'il y a exactement une composante γ telle que $h(f,\gamma) = \text{mult}(f)$. Or, le Corollaire (3.3) sur la croissance des coefficients d'insertion implique facilement que, dans l'arbre R_0 il y a un et un seul sommet P tel que $q(P)$ soit égal à $\text{mult}(f)$ et ce sommet est $\neq 1$. D'après les résultats de la Section 4, le point de contact de γ avec la composante $\neq 1$ est un point lisse, distinct des points de contact éventuels de f avec la composante $\neq 1$. En effet, on aurait sinon $\text{mult}(f) < h(f,\gamma)$. Ceci démontre le point (2) du Théorème (2.1).

Nous pouvons donc supposer maintenant que nous ne sommes plus dans le cas que nous venons de régler. En d'autres termes, γ est une composante de Γ satisfaisant l'hypothèse H.

D'après le deuxième fait, soit $M(\gamma)$ la composante connexe de la décomposition minimale de Waldhausen de M qui contient $\gamma \cap M$. Soit P_γ le sommet de rupture de l'arbre R_0 à partir duquel $M(\gamma)$ est construite "par propagation". On a $q(P_\gamma) = h(f,\gamma)$.

Soit maintenant U le plus grand voisinage étoilé fermé du sommet P_γ dans l'arbre R_0. Le fait que $\gamma \cap M$ est contenu dans $M(\gamma)$ implique que le point de contact Z de la transformée stricte par π_0 de γ se trouve dans la partie du diviseur exceptionnel E_0 qui correspond à U.

LEMME. *Le point de contact Z ne peut se trouver que sur P_γ ou sur la branche morte qui part éventuellement de P_γ.*

Preuve du lemme. Considérons un bras b de l'étoile U, partant du sommet de rupture P_γ et ayant pour extrémité soit un autre sommet de rupture soit le sommet $\neq 1$. En d'autres termes, le bras b n'est pas l'éventuelle branche morte qui part de P_γ.

Nous allons montrer que Z ne se trouve pas sur ce bras. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il s'y trouve. Par construction, aucun point de l'ensemble I_0 (ensemble des points de contact de la transformée stricte de f) ne se trouve sur le bras b. Par conséquent, Z n'appartient pas à I_0. Maintenant, le long du bras b, pour un sens de parcours bien choisi, les coefficients d'insertion croissent strictement. (Voir toutefois la note ci-dessous). Il serait alors impossible d'avoir $h(f,\gamma)$ égal à $q(P_\gamma)$. C'est ici que le troisième fait intervient. Fin de la preuve du lemme.

Le point (5) du Théorème (2.1) est ainsi démontré.

NOTE. Il y a une seule exception au fait que les coefficients d'insertion croissent le long d'un bras d'une étoile. C'est lorsque le sommet $\#1$ se trouve sur le bras et n'en est pas une extrémité. Comme alors le sommet $\#1$ a valence 2, ceci implique que l'on se trouve (à nouveau) dans le cas où le cone tangent de f contient exactement deux droites. Le raisonnement ci-dessus est encore vrai dans ce cas, mais par un argument qui nécessite d'entrer plus à fond dans la géométrie de [L.M.W.]. Pour ne pas trop allonger, disons que ce qui se trouve dans [L.M.W.] Chapître 3 Section 1 permet de montrer qu'il faut arrêter le bras b au sommet $\#1$ et ne pas aller au-delà. En effet, la branche γ ne peut pas traverser la zone qui correspond au sommet $\#1$. C'est la géométrie du 1er fait qui est ici essentielle.

Nous démontrons maintenant le point (1) du Théorème (2.1) c'est-à-dire que le point de contact Z n'appartient pas à I_0. Par le 3e fait, nous savons que la branche γ a son quotient polaire $h(f,\gamma)$ égal à $q(P_\gamma)$. Si on avait $Z \in I_0$ par le Théorème (4.2) alors $h(f,\gamma)$ serait strictement plus grand que $q(P_\gamma)$.

Le lemme ci-dessus et le 4e fait démontrent maintenant le point (4) du Théorème (2.1), car la branche morte contient (par définition) le point de rupture.

Pour avoir en plus la démonstration du point (3) du Théorème (2.1), il faut montrer que le point de contact Z est lisse. Si ce n'était pas le cas, à nouveau on aurait $h(f,\gamma)$ distinct de $q(P_\gamma)$ à cause du Théorème (4.1) première partie du deuxième cas.

Ceci achève la démonstration du Théorème (2.1).

Section 6. Quelques exemples

Dans ce paragraphe, nous donnons plusieurs exemples qui illustrent divers aspects de l'énoncé et de la démonstration du Théorème (2.1).

A. Les théorémes d'E. Casas

Dans le cas d'une branche, les exemples génériques sont donnés par *E.* Casas. Nous allons énoncer les résultats contenus dans [Ca. 1] et [Ca. 2] en utilisant le langage que nous développons dans cet article. Nous espérons convaincre le lecteur qu'il est bien adapté à ce genre de questions. Pour cela, nous avons tout d'abord besoin de deux résultats qui sont des conséquences du "théorème de μ-constant" de D.T. Le. Voir [Le 1] et aussi [Te.].

THEOREME. *Soit* $\phi: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ *un germe réduit. Alors, il existe un ouvert dense* $U_\phi \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *tel que, pour toute forme linéaire* t *appartenant à* U_ϕ *la singularité produit* $\phi \cdot \phi'_t$ *ait même topologie.*

DEFINITION, Nous appelerons ce type topologique le *couple polaire de* ϕ.

Soit f un germe réduit et soit $\sigma(f)$ la strate à μ-constant de f.

THEOREME. *Il existe un ouvert dense de Zariski* $W \subset \sigma(f)$ *tel que le couple polaire soit constant pour tous les germes* ϕ *appartenant à* W.

DEFINITION. Nous appelerons ce type topologique le *couple polaire générique de la strate* $\sigma(f)$. Remarquez qu'il n'y a aucune raison pour que f appartienne à W.

Les théorèmes d'E. Casas déterminent complètement le couple polaire générique de $\sigma(f)$, lorsque f est irréductible. C'est ce que nous allons expliquer maintenant, en commençant par $f(X, Y) = Y^q - X^p$ avec $q < p$, p et q premiers entre eux.

Considérons le développement en fraction continue:

$$\frac{p}{q} = k^0 + \frac{1}{k^1 + \cdots + \frac{1}{k^w}}$$

(où les exposants sont des indices). Les k^i sont entiers et $k^0 \geqslant 0$, $k^i \geqslant 1$ pour $i \geqslant 1$. On demande que le nombre w soit pair. Un tel développement existe et est unique.

Considérons les valeurs de l'approximation rapide de p/q associées au développement donné:

$$b^j = k^0 + \frac{1}{k^1 + \cdots + \frac{1}{k^j}} \quad \text{pour } j \text{ tel que } \quad 0 < j \leqslant w.$$

(6.1) PROPOSITION. (1) *Le germe* $f(X, Y) = Y^q - X^p$ *a un seul quotient polaire et ce quotient est égal à* p. (2) *Soit* P^j *le sommet de l'arbre de résolution minimale correspondant à* b^j. (*Voir la construction de l'arbre de résolution dans l'appendice*). *Alors le coefficient d'insertion* $q(p^j)$ *est égal à* p *si et seulement si* j *est impair.*

La preuve de la proposition découle facilement du théorème de croissance (3.2) et de l'appendice de cet article. En fait, on a mieux: Soit a_i une valeur de l'approximation lente de p/q et soit P_i le sommet de l'arbre de résolution minimale qui correspond à a_i. Alors $q(P_i) = p$ si et seulement si $p/q \leqslant a_i$.

Dans [Ca. 1] E. Casas démontre le théorème suivant:

THEOREME. *Soit* $\phi \in W \subset \sigma(f)$ *pour* $f(X, Y) = Y^q - X^p$. *Alors, la transformée stricte de* ϕ_t' *dans la résolution minimale de* ϕ *se compose, pour chaque* j *impair, de* k^{j+1} *curvettes s'attachant à la composante* P^j. (*t est supposée générique*).

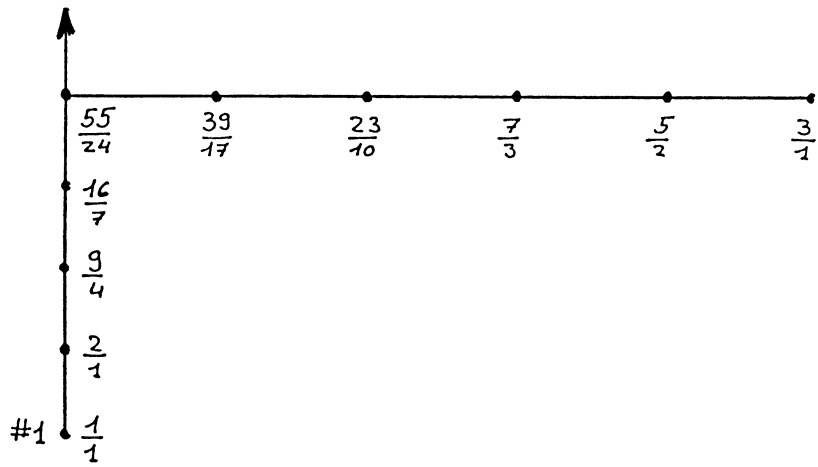
REMARQUE. Les sommets P^j dont il est question dans le théorème se trouvent bien sur la branche morte de l'arbre de résolution, comme le montre la description que nous donnons dans l'appendice de la résolution minimale. On observera aussi que, dans ce cas, I_t' est constitué de points lisses de la branche morte et que, mieux encore, la résolution minimale de ϕ résoud aussi ϕ_t' et même $\phi \cdot \phi_t'$.

Il est bon d'illustrer le théorème précédent par un exemple numérique explicite.

Soit $f(X, Y) = Y^{24} - X^{55}$. Le développement en fraction continue adéquat est:

$$\frac{55}{24} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}. \qquad \text{On a} \quad b_1 = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{39}{17}.$$

L'arbre de résolution de f (ou de ϕ) avec quotients de Zariski est:



Pour $\phi \in W \subset \sigma(f)$, la transformée stricte de ϕ_t' s'obtient en attachant deux curvettes au sommet $\frac{7}{3}$ et une curvette au sommet $\frac{39}{17}$.

Nous considérons maintenant le cas d'un germe f irréductible et nous utilisons le langage de l'appendice de cet article. Soient $p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots, p_g/q_g$ les paires caractéristiques de Zariski associées à f. Soient

$$\frac{p_i}{q_i} = k_i^0 + \frac{1}{k_i^1} + \cdots + \frac{1}{k_i^{w(i)}}$$

les développements en fraction continue, avec $w(i)$ pairs, de p_i/q_i. Pour chaque j entier tel que $0 < j \leqslant w(i)$ on considère la valeur de l'approximation rapide:

$$b_i^j = k_i^0 + \frac{1}{k_i^1} + \cdots + \frac{1}{k_i^j}.$$

Soit P_i^j le sommet de l'arbre R_0 correspondant à b_i^j. Dans [Ca. 2], A. Casas démontre le théorème suivant:

THEOREM: *Soit $\phi \in W \subset \sigma(f)$. Alors, la transformée stricte de ϕ_t' dans la résolution minimale de ϕ se compose, pour chaque j impair, de k_i^{j+1} curvettes s'attachant à la composante P_i^j. (t générique).*

B. Le polaires de $f(X, Y) = Y^9 - X^{52}$

Pour les directions qui ne sont pas dans le cone tangent, il y a du point de vue de la topologie (ou, de façon équivalente, du point de vue de l'arbre de résolution) deux possibilités.

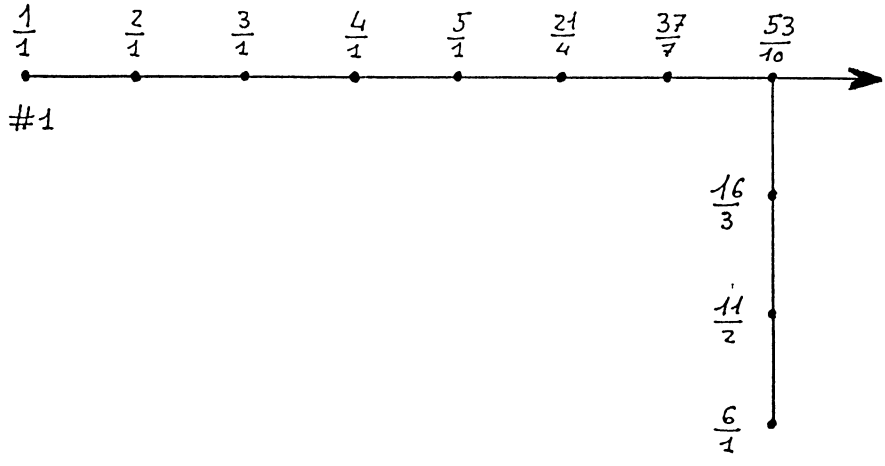
(1) $t(X, Y) = X$, c'est-à-dire $a = 0$ et $b = 1$. Alors $f'_t = \partial f/\partial X = 9X^8$. La transformée stricte de f'_t dans la résolution de minimale de f est une curvette de l'extrémité de la branche morte, avec multiplicité 8.

(2) $t(X, Y) = bX - aY$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Alors $f'_t = \alpha Y^8 - \beta X^{51}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. La topologie de $f \cdot f'_t$ est entièrement déterminée per l'observation que f et f'_t ont nombre maximum de points infiniment voisins en commun. Après 6 éclatements, f'_t est détachée de f. Elle passe par un point lisse du diviseur exceptionnel, plus précisément de l'extrémité de la branche morte. Ce n'est pas une curvette. Elle a une paire caractéristique égale à $\frac{8}{3}$ avec tangence maximum avec le diviseur exceptionnel.

Note pour les "happy few". $f(X, Y) = Y^9 - X^{52}$ est un des nombreux contre-exemples possibles, à la B. Segre, de "l'affirmation des Italiens". Voir [Se.].

C. Les polaires de $g(X, Y) = Y^{10} - X^{53}$

A nouveau, pour t n'appartenant pas au cone tangent, il y a deux possibilités du point de vue de la topologie. Le cas intéressant est lorsqu'on dérive dans la direction associée à une forme linéaire $t(X, Y) = bX - aY$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Alors $g'_t = \alpha Y^9 - \beta X^{52}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Les germes g et g'_t ont nombre maximum de points infiniment voisins en commun. L'arbre de résolution minimale de g est le suivant:



Un calcul simple montre alors que g'_t a pour point de contact dans la résolution minimale de g un point que se trouve à l'intersection de la composante qui a $\frac{11}{2}$ pour quotient de Zariski avec celle qui a $\frac{6}{1}$ pour quotient. On voit donc que, même pour des directions appartenant à un ouvert dense de $P^1(\mathbf{C})$, les polaires peuvent très bien avoir pour point de contact un point non lisse du diviseur exceptionnel de la résolution minimale. Ce point est nécessairement sur la partie qui correspond à une branche morte.

Beaucoup d'autres exemples du même style sont possibles. Nous laissons au lecteur le plaisir de les découvrir.

D. La détermination des polaires a été faite par J.-L. Dupeyrat dans le cas où f est un bouquet de branches lisses et par F. Michel dans le cas où f est un "arbre de Noël". Voir [Du.] et [M.].

Appendice

Dans cet appendice, nous construisons l'arbre R de la résolution minimale d'une singularité réduite $\psi(X, Y) = 0$. Nous attribuons à chaque sommet de l'arbre un nombre rationnel positif, que nous appelons le *quotient de Zariski* du sommet. Ce nombre rationnel est appelé "coefficient de Newton" par Monique Lejeune dans sa thèse, dans une situation somme toute assez proche de la notre. Voir [Lej.].

La construction de l'arbre R se fera par récurrence sur le nombre r de branches de ψ. Nous choisissons une fois pour toutes un système de coordonnées dans $\mathbf{C}^2$ tel que l'axe des Y ne soit pas dans le cone tangent de ψ.

Nous commençons par introduire la notion d'*approximation lente* d'un nombre rationnel positif p/q. Pour cela, considérons le développement en fraction continue:

$$\frac{p}{q} = h^0 + \frac{1}{h^1 + \cdots + \dfrac{1}{h^s}} \quad \text{avec les } h^i \text{ entiers}, \quad h^0 \geqslant 0,\ h^i \geqslant 1 \quad \text{si} \quad i \geqslant 1,$$

et $h^s \geqslant 2$. La lettre i désigne un indice et non pas une puissance.

Soit $\ell = \ell(p/q) = \Sigma_i\, h^i$ *la longueur* de la fraction continue. *L'approximation lente* de p/q est la suite a_k (pour $k = 1, 2, \ldots, \ell$) de nombres rationnels positifs définie de la façon suivante:

$$a_k = k \quad \text{pour} \quad k \leqslant h^0,$$

$$a_k = h^0 + \frac{1}{k - h^0} \quad \text{pour} \quad h^0 + 1 \leqslant k \leqslant h^0 + h^1$$

et, plus généralement:

$$a_k = h^0 + \frac{1}{h^1 + \cdots + \dfrac{1}{h^{i+1} + \dfrac{1}{k - (h^0 + h^1 + \cdots + h^{i-1})}}}$$

pour

$$h^0 + h^1 + \cdots + h^{i-1} + 1 \leqslant k \leqslant h^0 + h^1 + \cdots + h^i.$$

Ceci étant, considérons le plus petit segment compact $A(p/9)$ de la droite $\mathbf{R}$ qui contient tous les points a_k (pour $k = 1, 2, \ldots, \ell$). Ce segment a une *extrémité gauche*, une *extrémité droite* et contient ℓ "sommets": les points a_k. Si P est le sommet correspondant à la valeur a_k nous attribuons à P le *quotient de Zariski* $a_k = u_P/v_P$. Ici, u_P et v_P sont des entiers positifs, premiers entre eux.

Plus généralement, si $p_1/q_1 \cdot p_2/q_2 \cdots p_t/q_t$ sont t nombres rationnels positifs, on peut considérer le plus petit segment compact de la droite $\mathbf{R}$ qui contient les valeurs des approximations lentes des t nombres rationnels donnés. Nous noterons ce segment $A(p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots, p_t/q_t)$. Il contient un certain nombre de sommets. Par définition, il s'agit des points de $\mathbf{R}$ qui sont valeur de l'approximation lente d'au moins un p_i/q_i. A chacun de ces sommets P est attribué le quotient de Zariski u_P/v_P défini comme précédemment. On a, par construction:

AFFIRMATION. Les nombres rationnels u_P/v_P croissent strictement lorsqu'on se déplace sur le segment $A(p_1/q_1, \ldots, p_t/q_t)$ de l'extrémité gauche vers l'extrémité droite.

VOCABULAIRE. Les sommets du segment $A(p_1/q_1, \ldots, p_t/q_t)$ qui correspondent à un p_i/q_i seront appelés *sommets caractéristiques*. Dans la suite, les nombres rationnels p_i/q_i auront toujours la propriété que q_i est supérieur ou égal à 2.

A chacun des sommets caractéristiques du segment $A(p_1/q_1, \ldots, p_t/q_t)$ nous attachons une petite tige, pour obtenir un arbre que nous noterons $B(p_1/q_1, \ldots, p_t/q_t)$. On appellera *extrémité gauche* et *extrémité droite* celles qui proviennent de $A(p_1/q_1, \ldots, p_t/q_t)$.

Soit maintenant $F(X, Y) = 0$ un germe irréductible, de multiplicité n. Dans le système de coordonnées choisi, F possède un développement de Puiseux $\phi = \Sigma_k b_k X^k$ avec $b_k \in \mathbf{C}$ et $k \in (1/n)\mathbf{N}$. La suite $P(F)$ des *paires caractéristiques de Puiseux* de F est la suite des g couples d'entiers positifs $\{(m_1, n_1), \ldots, (m_g, n_g)\}$ satisfaisant: $n_j \geqslant 2$, $\text{pgcd}(m_j, n_j) = 1$ et définis de la façon suivante:

(1) Si $n = 1$, alors $P(F)$ est vide et $g = 0$.
(2) Si $n > 1$, on pose $k_1 = \min \{k \text{ tels que } b_k \neq 0 \text{ et } k \notin \mathbf{N}\}$. On écrit $k_1 = m_1/n_1$ avec m_1 et n_1 premiers entre eux. Ceci définit la première paire caractéristique de Puiseux.

(3) En raisonnant par récurrence, supposons que l'on a défini les paires $(m_1, n_1), \ldots, (m_p, n_p)$. Si $n = n_1 n_2 \ldots n_p$, on pose $g = p$ et $P(F) = \{(m_1, n_1), \ldots, (m_p, n_p)\}$. Si $n > n_1 n_2 \ldots n_p$, on considère $k_{p+1} = \min \{k$ tels que $b_k \neq 0$ et $k \notin (1/n_1 n_2 \ldots n_p)\mathbf{N}\}$. On écrit alors $k_{p+1} = m_{p+1}/n_1 n_2 \ldots n_p n_{p+1}$ avec m_{p+1} et n_{p+1} premiers entre eux.

DEFINITION. Les nombres rationnels $k_1, k_2, \ldots, k_g$ sont les *exposants caractéristiques de Puiseux* associés à ϕ. La *partie caractéristique* du développement de Puiseux ϕ est $\bar{\phi} = \Sigma_{j=1}^{q} X^{k_j}$.

RAPPEL. La *caractéristique* de F est la suite d'entiers $(n; \beta_1, \ldots, \beta_g)$ définis par $\beta_j = nk_j$.

DEFINITION. La suite $Z(F)$ des *paires caractéristiques de Zariski* de F est la suite $\{(p_1, q_1), \ldots, (p_g, q_g)\}$ de couples d'entiers positifs tels que $\text{pgcd}(p_j, q_j) = 1$ et définis par:

$$\bar{\phi} = X^{p_1/q_1}(1 + X^{p_2/q_1 q_2}(1 + \ldots(1 + X^{p_g/q_1 q_2 \cdots q_g})\ldots).$$

Formules de passage.

$$q_j = n_j \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, g \quad \text{et} \quad p_1 = m_1,$$

$$p_j = m_j - n_j m_{j-1} \quad \text{pour} \quad j = 2, \ldots, g.$$

Construction de l'arbre de résolution minimale pour une branche

Soit donc $F(X, Y)$ un germe irréductible. Soit $Z(F) = \{(p_1, q_1), \ldots, (p_g, q_g)\}$ la suite des paires caractéristiques de Zariski de F. Considérons les arbres $B(p_1/q_1), \ldots, B(p_g/q_g)$. Recollons l'extrémité gauche de $B(p_2/q_2)$ à l'extrémité de la tige de $B(p_1/q_1)$. Ensuite, recollons l'extrémité gauche de $B(p_3/q_3)$ à l'extrémité de la tige de $B(p_2/q_2)$. etc, etc. Pour finir, recollons l'extrémité gauche de $B(p_g/q_g)$ à l'extrémité de la tige de $B(p_{g-1}/q_{g-1})$. Attachons une flèche à l'extrémité de la tige de $B(p_g/q_g)$. Cette flèche symbolise la branche F. L'arbre ainsi obtenu est l'arbre R de la résolution minimale de la branche F. Chaque sommet P est pondéré par un quotient de Zariski u_p/v_p. Le sommet $\neq 1$ de l'arbre est l'extrémité gauche de $B(p_1/q_1)$.

Avant de construire l'arbre de résolution minimale R pour une singularité à deux branches, nous introduisons la notion d'exposant de coïncidence entre deux branches. Soient donc $F(X, Y)$ et $\hat{F}(X, Y)$ deux branches distinctes. Pour ne pas alourdir encore plus ce texte, convenons que chaque notion introduite pour F aura son pendant pour $\hat{F}$, désigné par un chapeau .

Soit n la multiplicité de F et posons $\zeta = e^{2i\pi/n}$. Soit $\phi = \Sigma_j b_j X^{j/n}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ un développement de Puiseux de F.

NOTATION. Pour tout entier $i \geqslant 0$, nous notons $\sigma^i(\phi)$ l'élément de $\mathbf{C}\{X^{1/n}\}$ défini par $\sigma^i(\phi) = \Sigma b_j(\zeta^i X^{1/n})^j$. Soit $\overline{\mathbf{C}\{X\}}$ la réunion $\bigcup_n \mathbf{C}\{X^{1/n}\}$. Sur $\overline{\mathbf{C}\{X\}}$ on a une valuation évidente, à valeurs dans $\mathbf{Q}$, définie par l'ordre du zéro à l'origine. Nous la noterons "val".

DEFINITION. L'*exposant de coincidence* de F et de $\hat{F}$ est le nombre rationnel positif $C(F, \hat{F})$ défini par:

$C(F, \hat{F}) = \max_{i,j}\{\mathrm{val}[\sigma^i(\phi) - \sigma^j(\hat{\phi})]\}$. Voir aussi [Zar.] Section 6 p. 927 formule (3).

Construction de l'arbre de résolution minimale pour une singularité à deux branches

Soit $\psi(X, Y) = F(X, Y)\,\hat{F}(X, Y)$ une singularité à deux branches, F et $\hat{F}$ étant, bien sûr, distinctes. La construction de l'arbre $R(\psi)$ va dépendre des valeurs possibles de $C(F, \hat{F})$.

1er cas. L'exposant de coincidence $C(F, \hat{F})$ est un exposant caractéristique pour F et pour $\hat{F}$.

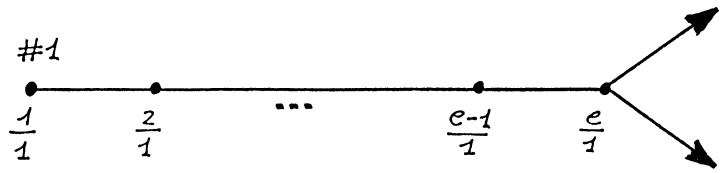
Si l'on revient à la définition de $C(F, \hat{F})$, on voit qu'il existe alors un entier j tel que: $k_1 = \hat{k}_1$, $k_2 = \hat{k}_2, \ldots, k_j = \hat{k}_j = C(F, \hat{F})$. On commence par construire l'arbre de résolution pour "la" singularité à une branche, ayant pour exposants caractéristiques $k_1, k_2, \ldots, k_j$. Au dernier sommet caractéristique, on supprime la flèche. A sa place, on attache deux tiges au lieu d'une. La long d'une des tiges, on poursuit la construction de l'arbre $R(F)$ tandis que, le long de l'autre tige, on poursuit la construction de $R(\hat{F})$.

2e cas. $C(F, \hat{F})$ n'est un exposant caractéristique ni pour F, ni pour $\hat{F}$.

Soit j le plus grand entier tel que $k_j < C(F, \hat{F})$. L'entier j peut, en principe, prendre les valeurs $0, 1, \ldots, g$. Par convention, nous dirons que $j = 0$ s'il n'existe pas d'entier satisfaisant la condition. La définition de $C(F, \hat{F})$ montre que $k_i = \hat{k}_i$ pour $i \leqslant j$ et que $c = n_1 n_2 \ldots n_j\, C(F, \hat{F})$ est un entier. Soit $e = c - m_j$. (Si $j = 0$ on pose $e = c = C(F, \hat{F})$). On a $e > 0$. Il y a maintenant deux possibilités.

1ère possibilité. $j = g = \hat{g}$. On construit alors, pour commencer, l'arbre de résolution pour la branche ayant pour exposants caractéristiques $k_1, k_2, \ldots, k_j$. On supprime la flèche. On rallonge la tige en lui ajoutant e sommets ayant pour quotients de Zariski: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots, e/1$. Au dernier sommet (celui qui a pour quotient $e/1$) on attache deux flèches, l'une symbolisant F et l'autre $\hat{F}$.

Si $j = 0$, l'arbre est le suivant:



2e possibilité. $j < g$. Pour commencer, on construit l'arbre $R(F)$. On considère la géodésique de cet arbre qui part du sommet caractéristique correspondant à p_j/q_j pour aboutir à la flèche. Soit P le sommet sur cette géodésique, le plus proche du sommet de départ, et ayant $e/1$ pour quotient de Zariski. (Un tel sommet existe nécessairement). Si $\hat{g} = j$, on ajoute une flèche au sommet P. Cette flèche symbolise $\hat{F}$. Si $j < \hat{g}$ on ajoute une tige à P et on poursuit la construction de $R(\hat{F})$ le long de cette tige.

3e cas. $C(F, \hat{F})$ est caractéristique pour F mais pas pour $\hat{F}$.

Soit donc $k_j = C(F, \hat{F})$. Un retour à la définition de $C(F, \hat{F})$ montre que:

(1) $k_1 = \hat{k}_1; \ldots; k_{j-1} = \hat{k}_{j-1}$.
(2) Ou bien $\hat{g} = j - 1$ ou bien $\hat{g} \geqslant j$ et alors $k_j < \hat{k}_j$.

Examinons tout d'abord la première possibilité: $g = j - 1$. On commence par construire l'arbre $R(F)$. Puis, on attache une flèche à l'extrémité droite de $B(p_j/q_j)$. Cette flèche symbolise $\hat{F}$.

Passons maintenant à la deuxième possibilité: $j \leqslant \hat{g}$. On commence par construire l'arbre $\check{R}$ pour une branche ayant pour exposants caractéristiques $k_1, \ldots, k_{j-1}$. On construit ensuite $B(p_j/q_j, \hat{p}_j/\hat{q}_j)$. On attache son extrémité gauche à la place de la flèche de $\check{R}$. Finalement, on achève la construction de $R(F)$ à partir de la tige qui s'attache en p_j/q_j et on achève celle ce $R(\hat{F})$ à partir de la tige qui s'attache au sommet $\hat{p}_j/\hat{q}_j$.

Arbre de résolution pour une singularité à r branches, $r \geqslant 3$

Soit donc $\psi(X, Y)$ une singularité à r branches. Décomposons ψ en un produit $F_1 \cdot F_2 \ldots \cdot F_{r-2} \cdot F \cdot \hat{F}$ de façon que $C(F, \hat{F})$ soit maximal parmi les exposants de coincidence entre branches de ψ. Par récurrence sur r, on peut supposer que l'on sait construire l'arbre de résolution de n'importe quelle singularité ayant au plus $(r - 1)$ branches. La construction de l'arbre $R(\psi)$ se fait, en gros, comme dans le

cas $r = 2$, en fonction des valeurs possibles pour $C(F, \hat{F})$. Nous indiquons brièvement quelles sont les variantes, en reprenant les notations de la situation $r = 2$.

1er cas. $C(F, \hat{F})$ est un exposant caractéristique pour F et pour $\hat{F}$.

Il n'y a pratiquement pas de changement avec la situation $r = 2$. On construit pour commencer l'arbre $R(F_1 \cdot F_2 \ldots \cdot F_{r-2} \cdot F)$. On considère le sommet caractéristique pour F de quotient p_j/q_j. On lui ajoute une tige, le long de laquelle on poursuit la construction de $R(\hat{F})$.

2e cas. $C(F, \hat{F})$ n'est exposant caractéristique ni pour F ni pour $\hat{F}$.

On commence par construire l'arbre $R(F_1 \cdot F_2 \ldots \cdot F_{r-2} \cdot F)$. Les deux possibilités s'énoncent de façon analogue à la situation $r = 2$.

Pour la première possibilité, on considère la géodésique qui part du sommet caractéristique pour F de quotient p_j/q_j pour aboutir à la flèche symbolisant F. Par maximalité de $C(F, \hat{F})$, il existe un entier $\hat{e}$, avec $0 \leqslant \hat{e} \leqslant e$, tel que les quotients le long de cette géodésique soient successivement $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots, \hat{e}/1$. Si $\hat{e} < e$, on allonge la tige supportant F en lui ajoutant des sommets de quotients successifs $\hat{e} + 1/1, \ldots, e/1$. On attache alors deux flèches au dernier sommet, l'une symbolisant F et l'autre $\hat{F}$. Si $\hat{e} = e$, on ajoute une flèche au sommet de quotient $e/1$, symbolisant $\hat{F}$.

Pour la deuxième possibilité, il n'y a pas de différence notable avec ce que nous avons fait dans le cas $r = 2$.

3e cas. $C(F, \hat{F})$ est caractéristique pour F, mais pas pour $\hat{F}$.

On commence par construire l'arbre $R(F_1 \cdot F_2 \ldots \cdot F_{r-2} \cdot F)$. Dans cet arbre, le sommet caractéristique pour F de quotient p_j/q_j a été construit en utilisant un arbre $B(\bar{p}_1/\bar{q}_1, \ldots, \bar{p}_s/\bar{q}_s, p_j/q_j)$ pour un certain $s \geqslant 0$. (Par maximalité de $C(F, \hat{F})$, p_j/q_j est le plus grand quotient qui intervient dans la construction de ce segment B).

Pour la première possibilité, on attache une flèche à l'extrémité droite de $B(\bar{p}_1/\bar{q}_1, \ldots, \bar{p}_s/\bar{q}_s, p_j/q_j)$. Cette flèche symbolise $\hat{F}$.

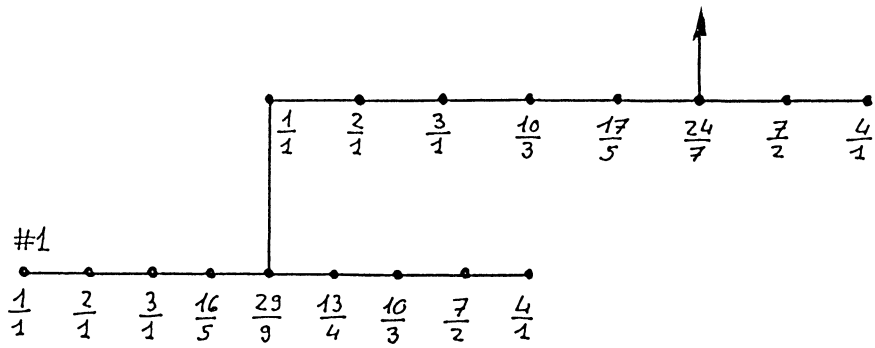
Pour la deuxième possibilité, on remplace $B(\bar{p}_1/\bar{q}_1, \ldots, \bar{p}_s/\bar{q}_s, p_j/q_j)$ par $B(\bar{p}_1/\bar{q}_1, \ldots, \bar{p}_s/\bar{q}_s, p_j/q_j, \hat{p}_j/\hat{q}_j)$. On achève la construction de façon analogue à ce que nous avons fait lorsque $r = 2$.

Nous illustrons maintenant la construction des arbres de résolution avec quotients de Zariski en donnant deux exemples.

1er exemple. Considérons une branche de développement caractéristique

$$\bar{\phi} = X^{29/9} + X^{227/63}. \qquad \text{On a} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{29}{9} \quad \text{et} \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{24}{7}.$$

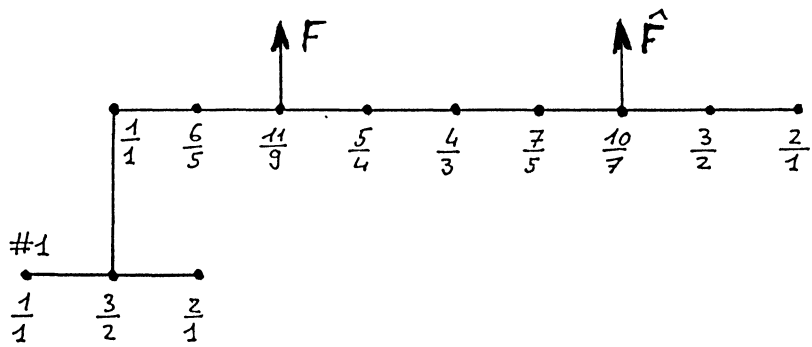
L'arbre de résolution est le suivant:



2e exemple. Considérons la singularité à deux branches F et $\hat{F}$, telles que:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{3}{2};\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{11}{9};\quad \frac{\hat{p}_1}{\hat{q}_1}=\frac{3}{2};\quad \frac{\hat{p}_2}{\hat{q}_2}=\frac{10}{7}\quad \text{et}\quad C(F,\hat{F})=\frac{19}{9}.$$

L'arbre de résolution est le suivant:



Bibliographie

[B.K.] E. Brieskorn et H. Knörrer, Ebene algebraische Kurven. Bierkhäuser (1981).

[Ca.1] E. Casas, On the singularities of polar curves. *Manuscripta Math.* 43(1983). 167–190.

[Ca.2] E. Casas, Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves. Preprint Barcelona (1986) 47 pp.

[De.] P. Deligne, Calculs avec le diagramme d'Enriques. Lettre à Le Dung Trang (1971).

[Du.] J.-L. Dupeyrat, Courbes polaires de courbes à branches lisses. Thèse 3e cycle Paris VII (1986) 130 pp.

[Hi.] H. Hironaka, Introduction to the theory of infnitely near singular points. Memorias del Instituto Jorge Juan n° 28 Madrid (1974).

[Le 1] D.T. Le, Sur un critère d'équisingularité. *CRAS* 272(1971) Série A pp. 138–140.
[Le 2] D.T. Le, La monodromie n'a pas de points fixes. *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo* 22(1975) 409–427.
[Lej.] M. Lejeune, Sur l'équivalence des singularités des courbes algébroïdes planes. Coefficients de Newton. Thèse.
[L.M.W.] D.T. Le, F. Michel et C. Weber, Courbes polaires et topologie des courbes planes. Preprint Genève (1987) 70 pp. A paraitre.
[M.] F. Michel, Courbes polaires pour les singularités du type arbre de Noël. Preprint Genève (1988).
[M.W.] F. Michel et C. Weber, Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches. Preprint Genève (1985) 300 pp.
[Mi.] J. Milnor, Singular Points of Complex Hypersurfaces. *P.U.P. Annals of Math. Studies* 61 (1968).
[Re.] J.E. Reeve, A summary of results in the topological classification of plane algebroid singularities. *Rend. Sem. Math. Torino* (1954–1955) 159–187.
[Te.] B. Teissier, Variétés polaires I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces. *Invent. Math.* 40(1977) 267–292.
[Sch.] H. Schubert, Uber eine numerische Knoteninvariante. *Math. Zeit.* 61(1954) 254–288.
[Se.] B. Segre, Sullo sciaglimento delle singularità delle varietà algebriche. *Annali di Mathematica* 33(1952) 5–48.
[Zar.] O. Zariski, General theory of saturation and of saturated rings. II. Saturated local rings of dimension 1. *Amer. Jour. Math.* 93(1971) 872–964.

NOTE: Les formules de ce texte redonnent immédiatement les valeurs des quotients polaires calculées par M. Merle dans le cas d'une singularité à une branche. Voir "Invariants polaires des courbes planes" Invent. Math. 41(1977) p. 103–111. Que les curvettes des sommets de rupture soient liées aux quotients polaires est implicite dans le travail de T.-C. Kuo et Y.-C. Lu: "On analytic function germs of two complex variables". Topology 16(1977) p. 299–310.