COMPOSITIO MATHEMATICA

LIONEL BERARD BERGERY

Sur certaines fibrations d'espaces homogènes riemanniens

Compositio Mathematica, tome 30, n° 1 (1975), p. 43-61

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1975__30_1_43_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 30, Fasc. 1, 1975, pag. 43–61
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

SUR CERTAINES FIBRATIONS D'ESPACES HOMOGENES RIEMANNIENS

Lionel Berard Bergery

1. Introduction

Dans l'article [11], A. Weinstein a introduit la notion de 'unflat bundles' que nous traduirons ici par la:

DÉFINITION 1: Un fibré principal différentiable $P \to M$ de groupe de Lie H, vérifie la propriété (W) pour la connexion principale θ et le sous-groupe de Lie K de H si pour tout élément X non nul de l'annihilateur $\mathfrak{k}^{\perp}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K dans le dual $\mathfrak{h}'$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, la 2-forme alternée $X \cdot \Omega$ est de rang maximal sur la distribution horizontale de P, où Ω est la forme de courbure de la connexion θ.

L'intérêt de cette notion provient du fait suivant: pour toute structure riemannienne sur M, il existe une structure riemannienne sur P/K telle que:

(a) la fibration $P/K \to M$ en espaces homogènes H/K associée à $P \to M$ devient, munie de ces structures riemanniennes, une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, dont la distribution horizontale est la distribution induite par θ.

(b) la courbure des 2-plans tangents à P/K engendrés par un vecteur vertical et un vecteur horizontal est strictement positive.

Et réciproquement, une submersion riemannienne qui vérifie (a) et (b) est associée à un fibré principal vérifiant une condition (W). (Pour cette correspondance, qui est une conséquence immédiate des formules de B. O'Neill [6], voir par exemple [1]).

Dans cet article, nous étudions des exemples de fibrés vérifiant (W), construits à l'aide des fibrations d'espaces homogènes: soit G un groupe de Lie réel réductif, H et K deux sous-groupes de Lie compacts emboités. Nous allons classer les fibrés $G \to G/H$ qui vérifient (W) pour une connexion principale invariante par H et pour K.

Nous montrerons ensuite qu'à l'aide de ces résultats, on peut retrouver toutes les variétés riemanniennes homogènes à courbure positive

découvertes par N. R. Wallach dans [8], [9] et [10]. Nous étudierons enfin quelques exemples dans le cas où G n'est plus supposé réductif.

2. Réduction aux algèbres de Lie

L'étude des fibrations d'espaces homogènes et des connexions invariantes se ramène immédiatement à un problème d'algèbres de Lie: soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ les sous-algèbres correspondant à H et K; la donnée d'une connexion invariante pour $G \to G/H$ est équivalente (si H est connexe) à la donnée d'une application linéaire $\Lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ vérifiant:

(a) $\Lambda([X, Y]) = [X, \Lambda(Y)] \qquad \forall X \in \mathfrak{h}$ et $Y \in \mathfrak{g}$

(b) $\Lambda(X) = X \qquad \forall X \in \mathfrak{h}$ (voir [4] ou [5]).

La condition (W) se traduit par la:

DÉFINITION 2: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifie (WH) pour Λ si:

$\forall X$ non nul dans $\mathfrak{k}^{\perp}$ (annihilateur de $\mathfrak{k}$ dans le dual $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{h}$) et $\forall Y$ non nul dans le noyau $\mathfrak{n}$ de Λ, il existe Z dans $\mathfrak{n}$ tel que $X \cdot (\Lambda([Y, Z])) \neq 0$.

Pour simplifier l'étude, nous supposerons de plus que le groupe G opère effectivement sur G/K. Nous sommes donc ramenés au problème suivant sur les algèbres de Lie:

Trouver les triples $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ tels que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle réductive, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont deux sous-algèbres compactes emboitées, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ n'ont pas d'idéal commun, et il existe Λ vérifiant (a) et (b) telle que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifie (WH) pour Λ.

REMARQUE: Pour revenir des algèbres de Lie aux groupes de Lie, il suffit de trouver un groupe de Lie connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ tel que les sous-groupes connexes H et K correspondant à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ soient compacts. Rappelons que par définition ([4] p. 120) une sous-algèbre $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ est dite compacte si le sous-groupe connexe correspondant à ad(u) dans Int($\mathfrak{g}$) est compact. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifient les hypothèses ci-dessus, il suffit de prendre G à centre fini puisque G est alors un revêtement fini de Int($\mathfrak{g}$). Si $\mathfrak{g}$ a un centre $\mathfrak{c}$, nous verrons que, toujours sous les hypothèses ci-dessus, $\mathfrak{c}$ est de dimension 1 et que $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{h}_1$ avec $\mathfrak{h}_1 \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{h}_1$ idéal de $\mathfrak{h}$. Soit alors G_1 un revêtement connexe fini de Int($\mathfrak{g}$), H_1 le sous-groupe connexe correspondant à $\mathfrak{h}_1$ dans G_1. H_1 est compact. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}a \times G_1$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $H = \mathbb{R}/\mathbb{Z}a \times H_1$ est compact. Nous verrons que dans les cas

qui nous intéressent, il est possible de choisir a tel que le sous-groupe connexe K correspondant à $\mathfrak{k}$ dans G soit lui aussi compact.

3. Quelques lemmes

Comme $\mathfrak{g}$ est réductive, elle est somme directe de son centre $\mathfrak{c}$ et d'un idéal semi-simple $\mathfrak{g}_0$. Nous pouvons donc choisir sur $\mathfrak{g}$ une forme bilinéaire symétrique invariante non-dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifiant les propriétés suivantes:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie négative sur $\mathfrak{c}$

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ coïncide avec la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_0$

(c) $\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{g}_0 \rangle = 0$

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie négative sur $\mathfrak{h}$ puisque $\mathfrak{h}$ est compacte. Nous noterons $\mathfrak{m}$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{h}$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\mathfrak{p}$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{k}^{\perp}$ par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'adjoint Λ^* de Λ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ annule $\mathfrak{m}$ et peut se décomposer sur $\mathfrak{h}$ en $\Lambda^*(X) = X + f(X)$ avec $f : \mathfrak{h} \to \mathfrak{m}$ linéaire. Nous avons le:

LEMME 1: $[X, f(X)] = 0 \ \forall X \in \mathfrak{h}$.

DÉMONSTRATION:

$$\begin{aligned}\langle [f(X), X], Y \rangle &= \langle [f(X)+X, X], Y \rangle = \langle [\Lambda^*(X), X], Y \rangle \\ &= \langle \Lambda^* X, [X, Y] \rangle = \langle X, \Lambda[X, Y] \rangle = \langle X, [X, \Lambda Y] \rangle \\ &= \langle [X, X], \Lambda Y \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{h} \quad \text{et} \quad Y \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

Remarquons que la projection orthogonale de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{m}$ induit une bijection de $\mathfrak{n}$ sur $\mathfrak{m}$ puisque $\mathfrak{n}$ est un supplémentaire de $\mathfrak{h}$. Comme Λ commute à $\mathrm{ad}(X)$ si $X \in \mathfrak{h}$, la condition (WH) peut se récrire:

$$\forall X \in \mathfrak{p}, \ X \neq 0, \ \forall Y \in \mathfrak{m}, \ Y \neq 0, \ \exists Z \in \mathfrak{m} \quad \text{tel que} \quad \langle X, \Lambda[Y, \Lambda(Z) - Z] \rangle \neq 0.$$

LEMME 2: $f(X) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{p}$.

DÉMONSTRATION: Si $\exists X \in \mathfrak{p}$ tel que $f(X) \neq 0$, alors $X \neq 0$ et

$$\begin{aligned}\langle X, \Lambda[f(X), \Lambda(Z) - Z] \rangle &= \langle X + f(X), [f(X), \Lambda(Z) - Z] \rangle \\ &= \langle [X + f(X), f(X)], \Lambda(Z) - Z \rangle = 0\end{aligned}$$

$\forall Z \in \mathfrak{m}$, ce qui contredit (WH).

LEMME 3: (WH) *est équivalente à*:

$$\forall X \in \mathfrak{p},\ X \neq 0,\ \forall Y \in \mathfrak{m},\ Y \neq 0, \quad \textit{alors } [X, Y] \neq 0.$$

DÉMONSTRATION: Si $X \in \mathfrak{p}$, Y et $Z \in \mathfrak{m}$,

$$\langle X, \Lambda[Y, \Lambda(Z) - Z]\rangle = \langle X, [Y, \Lambda(Z) - Z]\rangle$$
$$= \langle [X, Y], \Lambda(Z) - Z\rangle = -\langle [X, Y], Z\rangle$$

puisque $[X, Y] \in \mathfrak{m}$ et $\Lambda(Z) \in \mathfrak{h}$. Enfin $\langle \cdot\, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}}$ est non-dégénérée puisque $\mathfrak{m}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{h}$.

Nous appellerons ici *rang* d'une algèbre de Lie réductive la dimension de ses sous-algèbres abéliennes maximales.

LEMME 4: *rang* $(\mathfrak{g})$ = *rang* $(\mathfrak{h})$.

DÉMONSTRATION: Soit $X \in \mathfrak{p}$, $X \neq 0$. Il existe une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{h}$ contenant X. Si rang $(\mathfrak{g})$ > rang $(\mathfrak{h})$, il existe Y dans $\mathfrak{g} \backslash \mathfrak{h}$ tel que $[Y, \mathfrak{t}] = 0$. $Y = U + V$, $U \in \mathfrak{h}$, $V \in \mathfrak{m}$. Or $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ donc $[U, \mathfrak{t}] = [V, \mathfrak{t}] = 0$. En particulier $[V, X] = 0$ et $V \neq 0$, ce qui contredit (WH).

LEMME 5: *Le centre* $\mathfrak{c}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est dans* $\mathfrak{h}$ *et ne rencontre pas* $\mathfrak{k}$.

DÉMONSTRATION: Soit $X = U + V \in \mathfrak{c}$, $U \in \mathfrak{h}$, $V \in \mathfrak{m}$. $[X, Y] = 0$ $\forall Y \in \mathfrak{h}$, donc $[U, Y] = [V, Y] = 0$. Et (WH) implique $V = 0$. Enfin tout sous-espace de $\mathfrak{c}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et par hypothèse, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ n'ont pas d'idéal commun.

LEMME 6: *La paire* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie la propriété* (B):

$$\forall X \textit{ et } Y \in \mathfrak{p} \textit{ tels que } X \wedge Y \neq 0, \qquad \textit{alors } [X, Y] \neq 0.$$

DÉMONSTRATION: $X \to \operatorname{ad}(X)|_{\mathfrak{m}}$ est une représentation de $\mathfrak{h}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$, par des applications qui sont antisymétriques pour $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{m}}$. Si deux applications antisymétriques commutent, on sait qu'une combinaison linéaire non nulle de ces deux applications est singulière. Donc si X et Y dans $\mathfrak{p}$ vérifient $[X, Y] = 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$(a, b) \neq (0, 0)$ et $Z \in \mathfrak{m}$ tels que $[aX + bY, Z] = 0$, $Z \neq 0$. Enfin $X \wedge Y \neq 0$ implique $aX + bY \neq 0$ dans $\mathfrak{p}$, ce qui contredit (WH).

REMARQUE: M. Berger a classifié dans [2] les paires $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ d'algèbres de Lie compactes emboitées sans idéal commun vérifiant (B). Notre paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ est donc de la forme $(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$, avec $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ idéaux de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}_1$ idéal de $\mathfrak{k}$ et $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{k}_1)$ l'une des paires énnumérées dans les propositions 17.1 et 35.1 de [2], ou la paire $(\mathbb{R}, 0)$. Un simple examen de ces paires nous donne le:

LEMME 7: $\dim(\mathfrak{c}) \leqq 1$.

En effet la dimension du centre de $\mathfrak{h}_1$ est inférieure ou égale à 1, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}_2$ et $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}_2 = 0$ puisque $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{k}$.

LEMME 8: $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$.

DÉMONSTRATION: Si rang $(\mathfrak{g})$ = rang $(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{h}$ n'a qu'un seul complémentaire invariant dans $\mathfrak{g}$.

Nous allons maintenant étudier séparément le cas $\dim(\mathfrak{p}) = 1$, les résultats étant très différents dans le cas $\dim(\mathfrak{p}) \geqq 2$.

4. Cas d'une fibre de dimension 1

Si $\dim(\mathfrak{p}) = 1$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de $\mathfrak{h}$ en idéaux orthogonaux. Si T est un générateur de $\mathfrak{p}$, (WH) est équivalente à: $\mathfrak{h}$ est le centralisateur de T dans $\mathfrak{g}$. Nous avons donc le:

THÉORÈME 1: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *avec* $\dim(\mathfrak{h}) - \dim(\mathfrak{k}) = 1$ *si et seulement si*: $\mathfrak{h}$ *est le centralisateur d'un élément* T *non nul de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ *est l'idéal orthogonal de* T *dans* $\mathfrak{h}$ *pour une forme bilinéaire symétrique invariante sur* $\mathfrak{g}$ *vérifiant les conditions* (a), (b) *et* (c); *et* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{k}$ *sont compactes. Enfin dans la décomposition de* $\mathfrak{g}$ *en idéaux simples ou abélien,* T *a une composante dans chacun.*

La dernière condition traduit l'hypothèse; $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ sans idéal commun. Nous ne détaillerons pas plus la structure des $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$; remarquons simplement que la condition de compacité sur $\mathfrak{h}$ impose que les idéaux simples de $\mathfrak{g}$ admettent chacun une sous-algèbre compacte de même rang, ce qui élimine certains types d'idéaux. Nous ne préciserons pas non plus

les conditions que doit vérifier T pour qu'il existe un groupe de Lie G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ tel que les sous-groupes H et K engendrés par $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ soient compacts. Si cela est réalisé, on peut munir l'espace homogène G/H d'une structure de variété symplectique à forme entière et l'espace homogène G/K d'une structure de variété de contact régulière telles que la fibration $G/K \to G/H$ soit celle construite par W. M. Boothby et H. C. Wang dans [3]. Dans le cas G compact, G/H peut même être munie d'une structure de variété de Hodge (voir [7]). (pour ces structures, voir l'étude du cas non nécessairement homogène dans [1]).

Nous supposerons désormais jusqu'au paragraphe 8): $\dim(\mathfrak{p}) \geqq 2$.

5. Réduction au cas G compacte simple

Si $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple, son centre $\mathfrak{c}$ est dans $\mathfrak{h}$, de dimension 1 et ne rencontre pas $\mathfrak{k}$. Un examen des paires vérifiant (B) montre que $\mathfrak{k}$ a un centre non nul. Si $\mathfrak{c} = \mathbb{R}C$, $C = U + V$, U dans le centre de $\mathfrak{k}$ et $V \in \mathfrak{p}$, $V \neq 0$. Et $\mathfrak{g}$ admet une décomposition orthogonale

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbb{R}U \oplus \mathbb{R}V \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{m}$$

avec $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbb{R}U$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathbb{R}V$. Soit $T = V + aC$ avec a défini par $\langle V, C\rangle + a\langle C, C\rangle = 0$. Alors $\langle C, T\rangle = 0$ et $[V, X] = [T, X] \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbb{R}T \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{m} = D\mathfrak{g}$$

est semi-simple. Nous posons $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbb{R}T \oplus \mathfrak{p}_1$. C'est une sous algèbre de $\mathfrak{g}_1$. Remarquons enfin que $[T, \mathfrak{k}_1] = [V, \mathfrak{k}_1] = [U + V, \mathfrak{k}_1] = [C, \mathfrak{k}_1] = 0$.

LEMME 9: $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{k}_1)$ *vérifie* (WH).

DÉMONSTRATION: $[aT + X, Y] = [aV + X, Y] \quad \forall X \in \mathfrak{p}_1$ et $Y \in \mathfrak{m}$.

La même démonstration donne aussi la réciproque:

LEMME 10: *Soit* $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{k}_1)$ *vérifiant* (WH) *avec* $\mathfrak{g}_1$ *semi-simple,* $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbb{R}T \oplus \mathfrak{p}_1$ *et* $[T, \mathfrak{k}_1] = 0$. *Formons la somme directe d'algèbres* $\mathbb{R}C \oplus \mathfrak{g}_1$ *et choisissons* $U = aC + T$ *tel que* $(\mathbb{R}C \oplus \mathfrak{h}_1, \mathbb{R}U \oplus \mathfrak{k}_1)$ *vérifie* (B). *Alors* $(\mathbb{R}C \oplus \mathfrak{g}_1, \mathbb{R}C \oplus \mathfrak{h}_1, \mathbb{R}U \oplus \mathfrak{k}_1)$ *vérifie* (WH).

Nous avons donc ramené l'étude du cas non-semi-simple à celle du

cas semi-simple. Supposons maintenant $\mathfrak{g}$ semi-simple mais non compacte. Comme $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre compacte, il existe une sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{u}$ telle que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{u} \subsetneq \mathfrak{g}$. De plus $(\mathfrak{g}, \mathfrak{u})$ est une paire symétrique orthogonale (voir [4]). Nous notons $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{u})$ la paire symétrique orthogonale duale de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{u})$ que l'on construit ainsi: si $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{e} = \mathfrak{g}^* = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, la complexifiée de $\mathfrak{g}$. Nous avons le:

LEMME 11: *Si* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH), $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *le vérifie aussi et* $\mathfrak{g}^*$ *est compacte.*

DÉMONSTRATION: Si $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{m}$, nous avons les décompositions orthogonales:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{e} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus i\mathfrak{e} \quad \text{où}$$
$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{e}.$$

Donc si $X \in \mathfrak{p}$, $Y \in \mathfrak{m}_1$ et $Z \in \mathfrak{e}$, $[X, Y+Z] \neq 0$ est équivalent à $[X, Y+iZ] \neq 0$.

Inversement, en renversant la démonstration précédente, nous avons le:

LEMME 12: *Si* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *avec* $\mathfrak{g}$ *compacte et si il existe une sous-algèbre stricte compacte* $\mathfrak{u}$ *de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{u})$ *soit une paire symétrique orthogonale, et* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{u}$, *alors* $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *où* $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{u})$ *est la paire symétrique duale de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{u})$.

Nous avons donc ramené l'étude du cas semi-simple à celle du cas compact semi-simple. Supposons maintenant $\mathfrak{g}$ semi-simple compacte. Un examen des paires classifiées par M. Berger montre que la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ admet une décomposition en idéaux de l'un des trois types suivants:

type (1): $(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ avec $\mathfrak{k}_1$ et $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}_1$

type (2): $(A_1 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \bar{A}_1 \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ avec
$$\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{h}_1, \bar{A}_1 \text{ et } \mathfrak{p} \subset A_1 \oplus \mathfrak{h}_1$$

type (3): $(\mathbb{R}_1 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \mathbb{R}_a \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ avec
$$\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{h}_1, \mathbb{R}_a \text{ et } \mathfrak{p} \subset \mathbb{R}_1 \oplus \mathfrak{h}_1.$$

Comme rang $(\mathfrak{g})$ = rang $(\mathfrak{h})$ et que $\mathfrak{h}_1$ et A_1 sont des idéaux *simples*, ils sont chacun contenu dans un seul idéal de $\mathfrak{g}$. D'autre part $\mathfrak{m}$ est la somme directe de ses intersections avec les idéaux simples de $\mathfrak{g}$. Nous voyons donc immédiatement que $\mathfrak{g}$ est simple si $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ est de type (1) et a au plus deux idéaux simples si $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ est de type (2). Pour le type (3), nous avons le:

LEMME 13: *Si* $(\mathfrak{g}, \mathbb{R}_1 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \mathbb{R}_a \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ *vérifie* (WH), *il existe* $\mathbb{R}_2 \subset \mathfrak{h}_1$ *tel que* $(\mathfrak{h}_1, \mathbb{R}_2 \oplus \mathfrak{k}_1)$ *vérifie* **(B)**, $\mathbb{R}_a \subset \mathbb{R}_1 \oplus \mathbb{R}_2$ *et*

$$(\mathfrak{g}, \mathbb{R}_1 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \mathbb{R}_1 \oplus \mathbb{R}_2 \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$$

vérifie (WH). *En particulier* $\mathfrak{g}$ *est simple.*

DÉMONSTRATION: Nous noterons $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ le premier triple et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}', \mathfrak{k}')$ le second. L'existence de $\mathbb{R}_2$ tel que $(\mathfrak{h}_1, \mathbb{R}_2 \oplus \mathfrak{k}_1)$ vérifie (B) et $\mathbb{R}_a \subset \mathbb{R}_1 \oplus \mathbb{R}_2$ résulte de l'examen des paires de type (3) de [2]. Soit $\mathbb{R}_b$ tel que $\langle \mathbb{R}_a, \mathbb{R}_b \rangle = 0$ et $\mathbb{R}_a \oplus \mathbb{R}_b = \mathbb{R}_1 \oplus \mathbb{R}_2$. Nous avons alors les deux décomposition orthogonales: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}_b \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{m}$, donc la condition (WH) pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}', \mathfrak{k}')$ est contenue dans (WH) pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$. Nous sommes donc ramenés au type (1). $\mathfrak{p}_1$ est différent de 0 puisque $\mathfrak{p} = \mathrm{R}_b \oplus \mathfrak{p}_1$ est de dimension $\geqq 2$. Donc $\mathfrak{g}$ est simple.

Remarquons que la réciproque de ce lemme n'est pas toujours vraie; pour passer du type (1) au type (3), il nous faudra regarder cas par cas. Nous allons traiter maintenant le cas où $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ est de type (2) et $\mathfrak{g}$ a deux idéaux simples non nuls.

LEMME 14: *Si* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *avec* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$ *somme directe de deux idéaux simples non nuls, alors* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{k}$ *admettent des décompositions en idéaux de la forme*: $\mathfrak{h} = A_1' \oplus \mathfrak{h}' \oplus A_1'' \oplus \mathfrak{h}''$ *avec* $A_1' \oplus \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ *et* $A_1'' \oplus \mathfrak{h}'' \subset \mathfrak{g}''$; $\mathfrak{k} = \bar{A}_1 \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$ *où* $\bar{A}_1$ *est la sous-algèbre diagonale de* $A_1' \oplus A_1''$; *et* $(\mathfrak{g}', A_1' \oplus \mathfrak{h}', \mathfrak{h}')$ *et* $(\mathfrak{g}'', A_1'' \oplus \mathfrak{h}'', \mathfrak{h}'')$ *vérifient* (WH) *ou bien l'une d'entre elles vérifie* (WH) *et l'autre est le triple* $(A_1, A_1, 0)$.

DÉMONSTRATION: Comme rang $(\mathfrak{h})$ = rang $(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{h}$ a une décomposition en idéaux $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1' \oplus \mathfrak{h}_1''$ avec $\mathfrak{h}_1' \subset \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}_1'' \subset \mathfrak{g}''$. Puisque $\mathfrak{g}$ n'est pas simple, $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ est de type (2), donc $\mathfrak{h} = A_1' \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{k} = \bar{A}_1 \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$; Si $A_1' \oplus \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_1'$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}_1'$. Donc $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}'' = 0$, $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{h}_1'' \subset \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{k}$, impossible. Nous pouvons donc supposer: $A_1' \subset \mathfrak{h}_1'$ et $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_1''$ puisque ce sont des idéaux simples. Nous avons alors des décompositions en idéaux $\mathfrak{h}_1' = A_1' \oplus \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}_1'' = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}''$ et $\mathfrak{k} = \bar{A}_1 \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$ et des décompositions orthogonales: $\mathfrak{g}' = A_1' \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}'$ et $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{h}'' \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus A_1'' \oplus \mathfrak{p}'' \oplus \mathfrak{m}''$ avec $A_1' \oplus A_1'' = \bar{A}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}''$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{m}''$. $\mathfrak{p}'' \subset \mathfrak{g}''$ et $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{g}'$ donc $[\mathfrak{p}'', \mathfrak{m}'] = 0$. Nous avons alors deux cas:

(A) $\mathfrak{p}'' = 0$: Alors $\mathfrak{k}_1 = 0$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Soit $X \in \mathfrak{p}$ et $Y \in \mathfrak{m}$: $X = X' + X''$, $X' \in A_1'$ et $X'' \in A_1''$; $Y = Y' + Y''$, $Y' \in \mathfrak{m}'$ et $Y'' \in \mathfrak{m}''$; $[X, Y] = [X', Y'] + [X'', Y'']$. Enfin $X \neq 0 \Leftrightarrow X' \neq 0$ *et* $X'' \neq 0$; $Y \neq 0 \Leftrightarrow Y' \neq 0$ *ou* $Y'' \neq 0$, et le lemme est démontré.

(B) $\mathfrak{m}' = 0$: Alors $\mathfrak{g}' = A_1 = \mathfrak{h}'_1$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}''$; si $X \in \mathfrak{p}$ et $Y \in \mathfrak{m}$, $X = X' + X''_1 + X''_2$ avec $X' \in A'_1$, $X''_1 \in A''_1$ et $X''_2 \in \mathfrak{p}''$;

$$[X, Y] = [X' + X''_1 + X''_2, Y] = [X''_1 + X''_2, Y]$$

et $X' = 0 \Leftrightarrow X''_1 = 0$. Donc $(\mathfrak{g}'', A''_1 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}'', \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{h}'')$ vérifie (WH) avec $\mathfrak{g}''$ simple. Nous verrons dans la classification du cas simple que cela n'est possible que si $\mathfrak{h}_1 = 0$. Et nous sommes alors dans le deuxième cas de la conclusion du lemme.

La même démonstration nous donne la réciproque:

LEMME 15: *Si* $(\mathfrak{g}', A'_1 \oplus \mathfrak{h}', \mathfrak{h}')$ *vérifie* (WH) *et* $(\mathfrak{g}'', A''_1 \oplus \mathfrak{h}'', \mathfrak{h}'')$ *vérifie* (WH) *ou est le triple* $(A_1, A_1, 0)$, *alors*

$$(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'', A'_1 \oplus \mathfrak{h}' \oplus A''_1 \oplus \mathfrak{h}'', \bar{A}_1 \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'')$$

vérifie (WH) *si* $\bar{A}_1$ *est la sous-algèbre diagonale de* $A'_1 \oplus A''_1$.

Nous nous sommes donc ramenés dans tous les cas à l'étude du cas $\mathfrak{g}$ compacte simple, que nous allons aborder par un lemme préliminaire.

6. Esquisse de la classification dans le cas simple

LEMME 16: *Si* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *avec* $\mathfrak{g}$ *compacte simple et* $\dim(\mathfrak{h}) - \dim(\mathfrak{k}) \geqq 2$, *alors* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *est une paire symétrique compacte.*

DÉMONSTRATION: Soient $\mathfrak{t}_1$ et $\mathfrak{t}$ sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement, telles que $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{t}$. $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit R le système de racines de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ pour $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(\alpha)$ le sous-espace propre associé à la racine α et $\mathfrak{g}(\alpha) = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(-\alpha)) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-\alpha)$. Soit R_+ le système de racines positives correspondant au choix d'une chambre de Weyl. Nous avons les décompositions en somme directe:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}(\alpha), \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_1} \mathfrak{g}(\alpha), \qquad \mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha \in R_2} \mathfrak{g}(\alpha)$$

où $R_1 \cup (-R_1)$ est un sous-système de R et R_+ est la réunion disjointe de R_1 et R_2. Pour montrer que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une paire symétrique, il suffit de montrer que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ ou encore que $\forall \alpha, \beta \in R_2$, si $\alpha \pm \beta$ est racine, elle est dans $R_1 \cup (-R_1)$. L'examen de la structure des paires vérifiant (B) telle qu'elle est détaillée dans [2] montre que $\mathfrak{p}$ contient un $\mathfrak{g}(\gamma)$, $\gamma \in R_1$

ou bien un certain sous-espace de dimension 2 de $\mathfrak{g}(\gamma) \oplus \mathfrak{g}(\delta)$ où γ et $\delta \in R_1$ et (γ, δ) est un 'couple tordu' au sens de [2], et dans ce deuxième cas, $\mathfrak{p}$ contient aussi un élément T de $\mathfrak{t}$ de la forme $H_\gamma + H_\delta$ où H_γ et H_δ sont des générateurs particuliers de $[\mathfrak{g}(\gamma), \mathfrak{g}(\gamma)]$ et $[\mathfrak{g}(\delta), \mathfrak{g}(\delta)]$ respectivement. Soit $\mathfrak{u}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les racines α, β, γ et éventuellement δ. $(\mathfrak{u}, \mathfrak{u} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$ vérifie (WH). Il suffit alors de démontrer le:

SOUS-LEMME: *Si* $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ *vérifie* (WH) *et si rang* $(\mathfrak{u}) \leqq 3$ *ou bien si* rang $(\mathfrak{u}) = 4$ *et* $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ *n'a que des 'couples tordus', alors* $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ *est une paire symétrique.*

Pour démontrer ce sous-lemme, nous nous ramenons au cas $\mathfrak{u}$ simple. Puis nous passons en revue les cas possibles pour $\mathfrak{v}$ de même rang que $\mathfrak{u}$. Nous pouvons déjà éliminer tous ceux pour lesquels $\dim(\mathfrak{u}) - \dim(\mathfrak{v})$ n'est pas divisible par 4, d'après le corollaire 1.2 de [11], puisque $\dim(\mathfrak{v}) - \dim(\mathfrak{w}) \geqq 2$. Il faut ensuite éliminer les autres cas par une vérification cas par cas que nous ne détaillerons pas ici.

Maintenant, pour classer les $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifiant (WH) avec $\mathfrak{g}$ compacte simple, il suffit de comparer la liste des paires $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ symétriques de même rang avec $\mathfrak{g}$ simple compacte avec la liste des $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifiant (B) de [2]. A l'aide des décompositions en racines, nous pouvons alors éliminer la plupart des cas. Nous ne donnerons pas ici le détail de ces calculs. Nous nous contenterons de donner la liste des cas qui restent et pour chacun d'entre eux, la démonstration qu'il vérifie bien (WH).

7. Le théorème de classification

THÉORÈME 2: *Si* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *avec* $\dim(p) \geqq 2$, *alors* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *est l'un des triples suivants*:

(A) *Cas* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *du type* $(A_1, \mathbb{R}_1)$

(1) $(A_n, A_{n-2} \oplus \mathbb{R} \oplus A_1, A_{n-2} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}_1)$ $\quad n \geqq 2$
(2) $(B_n, B_{n-2} \oplus A_1 \oplus A_1, B_{n-2} \oplus A_1 \oplus \mathbb{R}_1)$ $\quad n \geqq 2$
(3) $(C_n, C_{n-1} \oplus A_1, C_{n-1} \oplus \mathbb{R}_1)$ $\quad n \geqq 2$
(4) $(D_n, D_{n-2} \oplus A_1 \oplus A_1, D_{n-2} \oplus A_1 \oplus \mathbb{R}_1)$ $\quad n \geqq 3$
(5) $(E_6, A_5 \oplus A_1, A_5 \oplus \mathbb{R}_1)$
(6) $(E_7, D_6 \oplus A_1, D_6 \oplus \mathbb{R}_1)$
(7) $(E_8, E_7 \oplus A_1, E_7 \oplus \mathbb{R}_1)$
(8) $(F_4, C_3 \oplus A_1, C_3 \oplus \mathbb{R}_1)$
(9) $(G_2, \bar{A}_1 \oplus A_1, \bar{A}_1 \oplus \mathbb{R}_1)$
(10) $(G_2, A_1 \oplus \bar{A}_1, A_1 \oplus \mathbb{R}_1)$

où $\bar{A}_1$ *et* A_1 *sont associées respectivement à une petite et une grande racine orthogonales entre elles.*

ou le triple dual de l'un des précédents.

(B) *Cas* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *du type* $(A_1, 0)$

Alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *est l'un des triples énumérés dans* (A) *où l'on a supprimé l'idéal* $\mathbb{R}_1$ *de* $\mathfrak{k}$. *Ces triples seront numérotés de* (11) *à* (20) *dans le même ordre que dans le cas* (A).

(C) *Autres cas à* $\mathfrak{g}$ *simple et* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *de type* (1)

(21) $(A_n, A_{n-4} \oplus \mathbb{R} \oplus A_3, A_{n-4} \oplus \mathbb{R} \oplus \bar{C}_2)$ $\quad n \geqq 4$

(22) $(B_n, B_{n-4} \oplus D_4, B_{n-4} \oplus \bar{B}_3)$ $\quad n \geqq 4$

(23) $(C_n, C_{n-2} \oplus C_2, C_{n-2} \oplus A_1 \oplus A_1)$ $\quad n \geqq 3$

(24) $(D_n, D_{n-4} \oplus D_4, D_{n-4} \oplus \bar{B}_3)$ $\quad n \geqq 5$

(25) $(E_6, \mathbb{R} \oplus D_5, \mathbb{R} \oplus B_4)$

(26) $(E_7, A_1 \oplus D_6, A_1 \oplus B_5)$

(27) (E_8, D_8, B_7)

(28) (F_4, B_4, D_4)

ou le triple dual de l'un des précédents.

(D) *Cas* $\mathfrak{g}$ *simple et* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *de type* (3)

(29) $(A_n, A_{n-2} \oplus \mathbb{R} \oplus A_1, A_{n-2} \oplus \mathbb{R}_a)$ $\quad n \geqq 2$

(30) $(D_3, \mathbb{R} \oplus A_1 \oplus A_1, A_1 \oplus \mathbb{R}_a)$

ou le triple dual de l'un des deux précédents.

(E) *Cas* $\mathfrak{g}$ *semi-simple non simple*

Alors

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'', A_1' \oplus \mathfrak{h}' \oplus A_1'' \oplus \mathfrak{h}'', \bar{A}_1 \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'')$$

où $(\mathfrak{g}', A_1' \oplus \mathfrak{h}', \mathfrak{h}')$ *est l'un des cas de* (B) *et* $(\mathfrak{g}'', A_1'' \oplus \mathfrak{h}'', \mathfrak{h}'')$ *est soit l'un des cas de* (B), *soit le triple* $(A_1, A_1, 0)$. *En particulier,* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *est du type* $(A_1 \oplus A_1, \bar{A}_1)$ *où* $\bar{A}_1$ *est la sous-algèbre diagonale de* $A_1 \oplus A_1$.

(F) *Cas* $\mathfrak{g}$ *non semi-simple*

Alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}) = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1, \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1, \mathbb{R}_a \oplus \mathfrak{k}_1)$ *où* $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{k}_1)$ *est l'un des cas de* (B) *et* $\mathbb{R}_a \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}_1$ *avec* $\mathbb{R}_1 \subset \mathfrak{h}_1$ *tel que* $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbb{R}_1)$ *soit l'un des cas de* (A), $\mathbb{R}_a \neq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_a \not\subset A_1$.

En particulier, $(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *est du type* $(\mathbb{R} \oplus A_1, \mathbb{R}_a)$.

COMMENTAIRES: Les inclusions $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ sont bien connues et caractérisées par la donnée des types des idéaux. Mais il faut préciser l'inclusion de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{h}$. En règle générale, si deux idéaux simples sont écrits à la même place dans $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$, c'est un idéal commun. Pour les autres:

dans le cas (A), $\mathbb{R}_1$ est inclu dans le A_1 (ou le $\bar{A}_1$) le plus à droite dans $\mathfrak{h}$.

dans le cas (C), (21) $\bar{C}_2 \subset A_3$ est isomorphe à l'inclusion canonique $B_2 \subset D_3$,

(23): $A_1 \oplus A_1 \subset C_2$ est isomorphe à l'inclusion canonique $D_2 \subset B_2$

(25), (26), (27), (28): ce sont les inclusions canoniques:

$$B_4 \subset D_5;\ B_5 \subset D_6;\ B_7 \subset D_8;\ D_4 \subset B_4$$

(22) et (24): $\bar{B}_3 \subset D_4$ est isomorphe à l'inclusion canonique $B_3 \subset D_4$, mais par un *automorphisme de trialité* de D_4 (qui en particulier ne se prolonge pas forcément aux sur-algèbres de D_4).

Dans le cas (D) le choix de $\mathbb{R}_a$, qui est contenu dans $\mathbb{R} \oplus A_1$, n'est pas quelconque et sera précisé dans le paragraphe suivant.

8. Vérifications

Nous allons vérifier que dans les cas énumérés dans le théorème 2, les triples $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifient bien la condition (WH).

Cas (A); si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifie (WH) alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathbb{R} \oplus \mathfrak{k})$ aussi évidemment; nous sommes donc ramenés au cas (B).

Cas (B) (11) à (19): ces triples ont déjà été considérés (pour un autre problème) par J. A. Wolf dans [12]. Ils sont obtenus par la construction générale suivante: Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple compacte, $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ pour $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, R_+ l'ensemble des racines positives par rapport à une chambre de Weyl et β la racine maximale associée. Nous formons $\mathfrak{t}_1 = \{X \in \mathfrak{t};\ \beta(X) = 0\}$,

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{t}_1 \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in R_+ \\ \langle \alpha, \beta \rangle = 0}} \mathfrak{g}(\alpha),$$

$A_1 = \mathfrak{g}(\beta) \oplus \mathfrak{t}_2$ où $\mathfrak{t}_2 = [\mathfrak{g}(\beta), \mathfrak{g}(\beta)]$ est de dimension 1,

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{\substack{\alpha \in R_+ \\ \langle \alpha, \beta \rangle \neq 0}} \mathfrak{g}(\alpha);$$

$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$.

J. A. Wolf a démontré (pages 1043 et 1044 de [12]) que $\operatorname{ad}(A_1)|_{\mathfrak{m}}$ engendre une algèbre de quaternions sur $\mathfrak{m}$. Donc en particulier $\operatorname{ad}(X)|_{\mathfrak{m}}$ est inversible sur $\mathfrak{m}$ pour tout X dans A_1 et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifie (WH). Ce sont exactement les triples (11) à (19) de (B).

Signalons que les espaces G/H correspondant sont exactement les

espaces symétriques quaternionniens et les G/K les espaces homogènes complexes de contact.

Cas (B) (20): La représentation de $\bar{A}_1$ dans $\mathfrak{m}$ est la représentation irréductible de symbole $\binom{3}{0}$. Pour une base H, X, Y de $sl(2, \mathbb{C})$, la représentation $\binom{3}{0}$ se décrit dans $\mathbb{C}^4$ par les matrices suivantes (voir par exemple [13] page IV–5):

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La sous-algèbre compacte A_1 de $sl(2, \mathbb{C})$ est l'ensemble des

$$aiH + b(X - Y) + ci(X + Y)$$

avec a, b, c réels, qui correspondent donc aux matrices:

$$\begin{pmatrix} 3ia & 3(b+ic) & 0 & 0 \\ 3(-b+ic) & ia & 2(b+ic) & 0 \\ 0 & 2(-b+ic) & -ia & b+ic \\ 0 & 0 & -b+ic & -3ia \end{pmatrix}$$

dont le déterminant (comme application complexe) vaut $9(a^2+b^2+c^2)^2$ et est donc nul si et seulement si $a = b = c = 0$.

Remarque: Dans les notations des cas (A) et (B), on peut remarquer que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}_1, \mathfrak{k})$ vérifie aussi (WH).

Cas (C): Les représentations dans $\mathfrak{m}$ de l'idéal simple de $\mathfrak{h}$ contenant $\mathfrak{p}$ sont décrites par les diagrammes suivants:

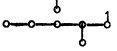
(12) $(n-3)$ fois

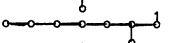
(13) $(n-3)$ fois

(14) $(n-2)$ fois

(15) $(n-4)$ fois

(16)

(17) 

(18) 

(19)

Ce sont donc des représentations spinorielles ou semi-spinorielles de l'algèbre du groupe orthogonal. On peut décrire ces représentations de

la manière suivante: soit $\mathscr{C}_n$ l'algèbre de Clifford de rang n, représentée dans $\mathbb{R}^N$ ($N = [n/2]$) par une représentation irréductible. Une base de $\mathscr{C}_n$ nous fournit des $E_i \in Gl(N, \mathbb{R})$ vérifiant: $E_i^2 = -\mathrm{Id}$ et $E_iE_j + E_jE_i = 0$ ($i = 1$ à n). L'espace vectoriel engendré par les E_i et les E_iE_j, muni du crochet ($[X, Y] = XY - YX$) est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n+1)$ et la représentation obtenue de $\mathfrak{so}(n+1)$ est spinorielle ou semi-spinorielle suivant la parité de n. Le sous-espace engendré par les E_iE_j est isomorphe à la sous-algèbre $\mathfrak{so}(n)$. Pour son complémentaire $\mathfrak{p}$, de dimension n, engendré par les E_i, nous avons:

$$(\sum_i a_i E_i)^2 = -(\sum_i a_i^2)\,\mathrm{Id},$$

donc tout élément non nul de $\mathfrak{p}$ opère dans $\mathbb{R}^N$ par une application inversible. Donc pour toute représentation spinorielle ou semi-spinorielle de $\mathfrak{so}(n+1)$ il existe une sous-algèbre $\mathfrak{so}(n)$ dont le complémentaire est représenté par des applications inversibles. Dans les cas qui nous intéressent, nous avions éliminé toutes les possibilités sauf une; celle-là vérifie donc (WH).

Cas (D) (29): $\mathfrak{g} = A_n = \{\text{matrices anti-hermitiennes } (n+1, n+1)\} = \mathfrak{su}(n+1)$ $\mathfrak{h}$ est la somme directe des trois idéaux:

$$A_1 \quad \text{espace des matrices} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X \in \mathfrak{su}(2)$$

$$A_{n-2} \text{ espace des matrices} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Y \in \mathfrak{su}(n-1)$$

$\mathbb{R}$ engendré par la matrice diagonale de coefficients diagonaux:

$$\left(i, i, -\frac{2}{n-1}i, \cdots, -\frac{2}{n-1}i\right)$$

Soit $\mathbb{R}_a$ l'espace engendré par la matrice diagonale de coefficients diagonaux:

$$\left(bi, ci, -\frac{b+c}{n-1}i, \cdots, -\frac{b+c}{n-1}i\right) b \text{ et } c \text{ réels.}$$

Alors $\mathfrak{p}$ est l'espace des matrices:

$$\begin{bmatrix} xi & z & 0 & \cdots & & 0 \\ -\bar{z} & yi & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & ti & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & ti & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ti \end{bmatrix}$$

avec

$$t = -\frac{x+y}{n-1}$$

x, y réels, z complexe vérifiant:

$$bx+cy+\frac{(b+c)(x+y)}{n-1} = 0.$$

Et $\mathfrak{m}$ est l'espace des matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & U \\ -{}^tU & 0 \end{pmatrix}$$

où U est une matrice $(2, n-1)$ à coefficients complexes. $\mathfrak{m}$ est la somme directe des espaces $\mathfrak{m}_j$ ($j = 1$ à $n-1$) formé des matrices dont la matrice U a toutes ses colonnes nulles sauf la j-ième. L'action adjointe de $\mathfrak{p}$ respecte cette décomposition et l'élément de coordonnées (x, y, z) de $\mathfrak{p}$ agit sur chacun des $\mathfrak{m}_j$ par la matrice:

$$\begin{pmatrix} (x-t)i & z \\ -\bar{z} & (y-t)i \end{pmatrix}$$

de déterminant $z\bar{z}-(x-t)(y-t)$.

Pour que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifie (WH), il faut et il suffit que $(x-t)(y-t) < 0$ pour tout élément non nul de $\mathfrak{p}$. Donc il faut et il suffit que $\mathbb{R}_a$ vérifie: $bc > 0$. Enfin le sous-groupe engendré par $\mathbb{R}_a$ dans $SU(n+1)$ est compact si et seulement si b/c est rationnel.

REMARQUE: dans le cas $\mathfrak{g} = A_2$, soit $\mathbb{R}_a$ l'élément diagonal de coefficients (bi, ci, di) avec $b+c+d = 0$. Si aucun des trois nombres b, c, d, n'est nul, il y en a au moins deux qui sont de même signe. Donc $\mathbb{R}_a$ est tel qu'il existe une sous-algèbre $A_1 \oplus \mathbb{R}$ pour laquelle $(A_2, A_1 \oplus \mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ vérifie (WH) si et seulement si aucun des trois nombres b, c, d n'est nul.

Cas (D) (30): isomorphe au cas (D) (29) pour $n = 3$.

Cas (E): conséquence immédiate des lemmes 14 et 15.

Cas (F): conséquence des lemmes 9 et 10.

Il nous reste à règler la question de la compacité de K dans le cas où $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple (voir la remarque du paragraphe 2) c.à.d. le cas (F).

Soit G_1 un revêtement connexe fini de Int $(\mathfrak{g}) =$ Int $(\mathfrak{g}_1)$; puisque $\mathfrak{g}_1$ est semi-simple, $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{k}_1 \oplus \mathbb{R}$ correspondent à des sous-groupes connexes compacts de G_1. En particulier $\mathbb{R}_1$ engendre un sous-groupe S^1 compact de G_1. Dans le sous-groupe $\mathbb{R} \times S^1$ de $\mathbb{R} \times G_1$, $\mathbb{R}_a$ engendre un sous-groupe non compact mais il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que le sous-groupe engendré par $\mathbb{R}_a$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}b \times S^1$ soit compact. Si nous prenons alors $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}b \times G_1$, H et K correspondants à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont compacts.

REMARQUE: il y a dans le théorème 2 quelques isomorphismes en basse dimension:

(1) $n = 3 \Leftrightarrow$ (4) $n = 3$; (2) $n = 2 \Leftrightarrow$ (3) $n = 2$; (11) $n = 3 \Leftrightarrow$ (14) $n = 3$; (12) $n = 2 \Leftrightarrow$ (13) $n = 2$; (29) $n = 3 \Leftrightarrow$ (30).

9. Application aux variétés homogènes a courbure positive

N. R. Wallach a montré dans [10] que l'espace homogène G/K d'un groupe de Lie compact G pour un sous-groupe compact K peut être muni d'une structure riemannienne homogène à courbure positive dès qu'il vérifie la condition (II):

DÉFINITION 3: (N. R. Wallach): (G, K) vérifie la condition (II) si il existe un produit scalaire Ad (K)-invariant sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G tel que le complémentaire orthogonal $\mathfrak{v}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K dans $\mathfrak{g}$ possède une décomposition orthogonale Ad (K)-invariante $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{v}_2$ telle que:

(1) $\quad [\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2] \subset \mathfrak{v}_2$; $[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_1] \subset \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{v}_1$; $[\mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_2] \subset \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{v}_1$

(2) si $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, $X_1, Y_1 \in \mathfrak{v}_1$, $X_2, Y_2 \in \mathfrak{v}_2$ et si $[X, Y] = 0$, $X \wedge Y \neq 0$ alors $[X_1, Y_1] \neq 0$.

La condition (1) peut se traduire par: $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{v}_1$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est symétrique. Nous avons alors la:

PROPOSITION: *Si* (G, K) *vérifie* (II), *alors* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *et* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *est une paire symétrique de rang* 1; *inversement si* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ *vérifie* (WH) *avec* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *paire symétrique de rang* 1, $\mathfrak{g}$ *compacte, et si* G *est un groupe de*

Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *dans lequel* $\mathfrak{k}$ *engendre un sous-groupe compact* K, *alors* (G, K) *vérifie* (II).

DÉMONSTRATION: Avec les notations de (2), prenons $X_2 = 0$ et $Y_1 = 0$, $X_1 \neq 0$ et $Y_2 \neq 0$; (2) implique: $[X_1, Y_2] \neq 0$, ce qui est bien (WH). Prenons $X_1 = 0$ et $Y_1 = 0$; (2) implique: $[X_2, Y_2] \neq 0$, donc $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est symétrique de rang 1.

Inversement, prenons $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{m}$: (1) est vérifié; si $[X, Y] = 0$ et $[X_1, Y_1] = 0$, alors $[X_2, Y_2] = 0$ et $[X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] = 0$. Si $Y_2 = 0$, la deuxième entraîne soit $Y_1 = 0$ et alors $Y = 0$, soit $X_2 = 0$ et alors d'après le lemme 6, $X_1 \wedge Y_1 = 0$. Si $Y_2 \neq 0$, puisque $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est symétrique de rang 1, la première entraîne $X_2 = aY_2$ donc $[X_1 - aY_1; Y_2] = 0$ et $X_1 = aY_1$.

REMARQUE: nous avons implicitement supposé $\mathfrak{v}_1$ et $\mathfrak{v}_2 \neq 0$. Si $\mathfrak{v}_1 = 0$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ et la condition (II) signifie que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est symétrique de rang 1. Si $\mathfrak{v}_2 = 0$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ et la condition (II) signifie que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ vérifie (B).

Pour obtenir la liste des (G, K) qui vérifie (II) (avec $\mathfrak{v}_1$ et $\mathfrak{v}_2 \neq 0$), il suffit donc de regarder dans la liste du théorème 2 dans quels cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est de rang 1, et d'appliquer le théorème 1 au cas où $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est symétrique de rang 1. Nous obtenons la liste suivante:

$(C_n, C_{n-1} \oplus \mathbb{R}_1)$	$n \geqq 2$	par (A) (3)
(C_n, C_{n-1})	$n \geqq 2$	par (B) (13)
$(C_n \oplus \mathbb{R}, C_{n-1} \oplus \mathbb{R}_a)$	$n \geqq 2$	par (F)
$(C_n \oplus A_1, C_{n-1} \oplus \bar{A}_1)$	$n \geqq 2$	par (E)
$(A_4, \mathbb{R} \oplus \bar{C}_2)$		par (C) (21)
$(B_4, \bar{B}_3)$		par (C) (22)
(A_n, A_{n-1})	$n \geqq 1$	par le Th. 1
$(A_n \oplus \mathbb{R}, A_{n-1} \oplus \mathbb{R}_a)$	$n \geqq 1$	par le Th. 1

(découvertes par M. Berger)

$(A_2, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}_1)$	par (A) (1)
$(A_2, \mathbb{R})$	par (B) (11)
$(A_2, \mathbb{R}_a)$	par (D) (29)
$(A_2 \oplus \mathbb{R}_2, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}_a)$	par (F)
$(A_2 \oplus A_1, \mathbb{R} \oplus \bar{A}_1)$	par (E)
$(C_3, A_1 \oplus A_1 \oplus A_1)$	par (C) (23)
(F_4, D_4)	par (C) (28)

(découvertes par N. R. Wallach)

REMARQUES:

(1) Evidemment les espaces symétriques compacts de rang 1 ainsi que

$(C_2, \bar{A}_1)$, (B_3, G_2), (G_2, A_2) ne sont pas atteints par cette méthode puisqu'ils correspondent à des sous-algèbres maximales.

(2) Rappelons que dans le cas $(A_2, \mathbb{R}_a)$, (ainsi que dans le suivant) il y a des conditions sur $\mathbb{R}_a$, qui sont précisées dans la vérification du théorème 2 cas (D).

(3) Le cas $(A_2 \oplus A_1, \bar{A}_1)$ est omis dans [10], mais l'espace homogène obtenu est difféomorphe à celui du cas $(A_2, \mathbb{R})$.

(4) Munissons G/H et G/K des structures riemanniennes homogènes normales induites par un même produit scalaire G-invariant sur $\mathfrak{g}$. Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifie (WH) avec $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ symétrique de rang 1, alors la fibration $G/K \to G/H$ devient une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, vérifiant (W) avec une base et une fibre à courbure positive. Mais pour les sept derniers cas de la précédente liste, G/K n'est pas à courbure positive. Il suffit, pour obtenir une structure riemannienne à courbure positive, de conserver l'orthogonalité des vecteurs horizontaux et verticaux, de conserver la structure donnée sur les vecteurs horizontaux, et de la multiplier par une constante bien choisie sur les vecteurs verticaux. C'est la traduction 'fibrée' du lemme 2.2 de [10].

(5) Nous pourrions espérer trouver d'autres variétés homogènes à courbure positive en considérant les $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ vérifiant (WH) avec $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dans la liste précédente mais on retombe pour les $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ sur d'autres éléments de la liste.

10. Exemples dans le cas ou $\mathfrak{g}$ n'est pas réductive

DÉFINITION 4: Nous dirons que $\mathfrak{g}$ vérifie (NS) si il existe un supplémentaire $\mathfrak{n}$ du centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{c}$. ($\mathfrak{g}$ est évidemment nilpotente).

Comme l'identité de Jacobi se réduit à 0, la structure d'une telle $\mathfrak{g}$ est entièrement décrite par la donnée de l'application $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{c}$ ou encore, en composant avec les éléments du dual de $\mathfrak{c}$, par la donnée d'un espace vectoriel $\mathfrak{e}$ (de dimension celle de $\mathfrak{c}$) de formes bilinéaires alternées sur $\mathfrak{n}$. Avec ces notations, nous avons le:

LEMME 17: *Soit* $\mathfrak{g}$ *vérifiant* (NS) *avec* $\mathfrak{c} \neq 0$. *Alors* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{c}, 0)$ *vérifie* (WH) *pour* $\mathfrak{n}$ *si et seulement si tout élément non nul de* $\mathfrak{e}$ *est non dégénéré.*

DÉMONSTRATION: Simple traduction des définitions.

Nous pouvons construire des exemples de telles $\mathfrak{g}$ en considérant une représentation 'canonique' d'une algèbre de Clifford $\mathscr{C}_a$ dans $\mathbb{R}^b$ (avec $a = \mu(b-1)$, μ le nombre de Hurwitz-Radon-Adams) pour laquelle une

base de $\mathscr{C}_a$ est représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^b$ par des matrices E_i vérifiant $E_i^2 = -\mathrm{Id}$ et $E_iE_j + E_jE_i = 0$ $(i \neq j)$. (Remarquons que nous pouvons prendre les E_i à coefficients entiers). Il suffit alors de poser $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^b$ et $\mathfrak{e} = \{\sum_i a_i E_i,\ a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leqq i \leqq d = \dim(c) \leqq a\}$. Soit G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ainsi construite. Topologiquement, $G = \mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{n} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^b$, muni du produit $X \cdot Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$. Remarquons que si $\mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{Z}^b$ sont les réseaux canoniques de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^b$, alors $H = \mathbb{Z}^d \times 2\mathbb{Z}^b$ est un sous-groupe de G. Notons $C = \mathbb{R}^d$ le centre de G et $K = C \times 2\mathbb{Z}^b$. $G/K \to G/H$ est une fibration principale en tores T^d sur le tore T^b, qui vérifie (W) pour la connexion induite par $\mathfrak{n}$. Nous obtenons ainsi des fibrations vérifiant (W) pour toutes les dimensions (d, b) vérifiant la condition du corollaire 1.2 de [11], c.à.d. $d \leqq \mu(b-1)$.

REMARQUE: H et K ne sont pas compacts, donc G/H et G/K ne sont pas riemanniens homogènes. Cependant, si nous notons $\bar{G}$ le *groupe* $G/\mathbb{Z}^d$, à centre compact, nous pouvons écrire G/H et G/K sous la forme $\bar{G}/\bar{H}$ et $\bar{C}\backslash\bar{G}/\bar{H}$ et ils sont donc localement riemanniens homogènes.

Références

[1] BERARD BERGERY L.: *Submersions riemanniennes*. Exposés au séminaire Berger (1973–74) Université Paris 7

[2] BERGER M.: Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 15* (1961) 179–246

[3] BOOTHBY W. M. and WANG H. C.: On contact manifolds. *Ann. of Math. 68* (1958) 721–734

[4] HELGASON S.: *Differential geometry and symmetric spaces*. Academic Press, New York 1962

[5] KOBAYASHI K. and NOMIZU K.: *Foundations of differential geometry*. Interscience, New York I (1963) II (1969)

[6] O'NEILL B.: The fundamental equations of a submersion. *Michigan Math. J. 13* (1966) 459–469

[7] SERRE J. P.: *Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts*. Séminaire Bourbaki (mai 1954) exposé 100

[8] WALLACH N. R.: Homogeneous positively pinched riemannian manifolds. *Bull. A.M.S. 76* (1970) 783–786

[9] WALLACH N. R.: Compact homogeneous riemannian manifolds with strictly positive curvature. *Ann. of Math. 96* (1972) 277–295

[10] WALLACH N. R.: *An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures* (preprint)

[11] WEINSTEIN A.: *Unflat bundles* (preliminary report)

[12] WOLF J. A.: Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces. *J. of Math. and Mech. 14* (1965) 1033–1047

[13] SERRE J. P.: *Algèbres de Lie semi-simple complexes*. Benjamin, New York (1966)

(Oblatum 7–V–1974)

Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05 France