COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS FREUDENTHAL

Bettische Gruppe mod. 1 und Hopfsche Gruppe

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 235-238

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__235_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bettische Gruppe mod. 1 und Hopfsche Gruppe

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

In Fußnote [8]) der Arbeit „Die Hopfsche Gruppe, . . ." [1]) haben wir angegeben, daß man die Beziehungen zwischen der Hopfschen Gruppe und den Homologieeigenschaften eines kompakten Raumes einfacher aussprechen und beweisen kann, wenn man mit der Bettischen Gruppe co mod 1 [2]) arbeitet. Es gilt dann der

SATZ: *Bettische Gruppe co mod* 1 (*höchster Dimension*) *und Hopfsche Gruppe sind Charakteregruppen mod* 1 *voneinander.*

Dieser Satz beruht auf einem

HILFSSATZ: *Q sei ein Teilpolyeder des* $(d+1)$*-dimensionalen Polyeders* P, $\mathfrak{H}^d(Q, P)$ [3]) *sei die Gruppe der Zyklen aus Q co mod* 1, *die in P co mod* 1 *beranden.* S^d *sei die d-dimensionale Sphäre. Notwendig und hinreichend für die Fortsetzbarkeit der Abbildung* [4]) $fQ \subset S^d$ *zu einer Abbildung* $fP \subset S^d$ *ist die Beziehung* $f\mathfrak{H}^d(Q, P) = 0$.

Das ist nichts Anderes als der Erweiterungssatz von H. Hopf [5]), nur co mod 1 formuliert. Die Formulierung co mod 1 gestattet es, den Hilfssatz etwas einfacher zu beweisen; prinzipiell unterscheidet sich unser Beweis aber kaum vom Hopfschen.

In **1** beweisen wir den Hilfssatz, in **2** beweisen wir unsern Satz für Polyeder, in **3** allgemein. Ob auch der Hilfssatz allgemein (d.h. für kompakte Räume statt Polyeder) gilt, ist uns nicht bekannt. Dagegen ergibt sich aus unserm Satz ohne weiteres:

Zwei Abbildungen eines d-dimensionalen kompakten Raumes in die S^d *gehören dann und nur dann zur selben Abbildungsklasse,*

---

[1]) Compositio Math. **2** (1935), 134—162.

[2]) Diese Sprechweise habe ich in vorstehender Arbeit [Compositio Math, **4** (1935), 145—234] eingeführt; co mod 1 soll heißen: mit den reellen Zahlen mod 1 als Koeffizientenbereich.

[3]) Auch diese Bezeichnung stammt aus vorstehender Arbeit.

[4]) Es handelt sich hier nur um eindeutige stetige Abbildungen.

[5]) Commentarii Helvet. **5** (1933), 39—54, Satz 2.

wenn sie denselben Homomorphismus der d-ten Bettischen Gruppe co mod 1 *induzieren*[6]).

1. Die Notwendigkeit der Bedingung des Hilfssatzes ist evident; wir beweisen, daß sie hinreichend ist. Dabei dürfen wir f bekanntlich als simplizial voraussetzen.

$\mathfrak{K}^d(Q)$ bzw. $\mathfrak{K}^d(P)$ sei die Gruppe der Linearformen k^d aus den d-dimensionalen Simplexen von Q bzw. P mit reellen Zahlen mod 1 als Koeffizienten. $\mathfrak{H}^d(P)$ sei die Gruppe *der* $k^d \subset \mathfrak{K}^d(P)$, die Rand eines k^{d+1} (Linearform aus den $(d+1)$-dimensionalen Simplexen von P) sind. $\mathfrak{K}^d(Q)$ und $\mathfrak{H}^d(P)$ sind *abgeschlossene* Untergruppen von $\mathfrak{K}^d(P)$.

$\chi_i(k^d)$ gebe an, mit welchem Koeffizienten das i-te Simplex u_i^d von S^d in fk^d auftritt. χ_i ist ein stetiger Charakter mod 1 von $\mathfrak{K}^d(Q)$. Wir setzen nun χ_i auf ganz $\mathfrak{K}^d(P)$ stetig fort, und zwar setzen wir $\chi_i = 0$ auf $\mathfrak{H}^d(P)$. Dann ist χ_i auf der von $\mathfrak{K}^d(Q)$ und $\mathfrak{H}^d(P)$ erzeugten Gruppe U als Charakter mod 1 stetig definiert. Daß diese Definition wirklich eindeutig ist, sieht man so:

Sei $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, $x_\nu \subset \mathfrak{K}^d(Q)$, $y_\nu \subset \mathfrak{H}^d(P)$. Dann ist $x = x_1 - x_2 \subset \mathfrak{K}^d(Q)$, $y = y_1 - y_2 \subset \mathfrak{H}^d(P)$ und $x + y = 0$, also $x = -y \subset \mathfrak{K}^d(Q) \wedge \mathfrak{H}^d(P)$[7]) $= \mathfrak{H}^d(Q, P)$. Nach Voraussetzung ist dann aber $\chi_i(x) = \chi_i(y) = 0$. Also ist $\chi_i(x_1) = \chi_i(x_2)$, $\chi_i(y_1) = \chi_i(y_2)$, also wirklich $\chi_i(x_1+y_1) = \chi_i(x_2+y_2)$.

Das auf der Untergruppe U der Torusgruppe $\mathfrak{K}^d(P)$ stetig definierte χ_i läßt sich nun auf ganz $\mathfrak{K}^d(P)$ als stetiger Charakter mod 1 fortsetzen[8]).

Zu einem d-dimensionalen Simplex t_k^d von P gehört die abgeschlossene Untergruppe αt_k^d von $\mathfrak{K}^d(P)$ (α reell mod 1). Durch χ_i wird sie stetig homomorph in die Additionsgruppe der reellen Zahlen mod 1 abgebildet. Es gibt also ein ganzzahliges p_{ik} derart, daß $\chi_i(\alpha t_k^d) = p_{ik}\alpha$ identisch in α mod 1 gilt. Genau wie H. Hopf[9]) erweitern wir f auf die Gesamtheit der t^d derart, daß für jedes k gilt: $ft_k^d = \sum_i p_{ik} u_i^d$. Da dann jedes Element von $\mathfrak{H}^d(P)$, insbesondere also der Rand jedes t^{d+1}, durch f auf 0 abgebildet wird, läßt sich f auf ganz P als Abbildung in die S^n fortsetzen[9]).

2. Die Hopfsche Gruppe des Polyeders P^d kann man (siehe

---

[6]) Das ist (für Polyeder) im Wesentlichen der Hopfsche Satz 1, a. a. O. [5]).

[7]) $\wedge$ bedeutet die Durchschnittsbildung.

[8]) Siehe etwa J. W. Alexander, L. Zippin [Annals of Math. (2) **36** (1935), 71—85], 78, Corollary.

[9]) a. a. O. [5]), 49.

8 a.a.O. [1])) so erhalten: Man betrachtet „spezielle" Abbildungen $fP^d \subset S^d$, $gP^d \subset S^d$ (die jedes $(d-1)$-dimensionale Simplex in den Nordpol abbilden), versteht unter $(f+g)k^d$ den Ausdruck $fk^d + gk^d$ (k^d=Linearform co mod 1 in den d-dimensionalen Simplexen von P^d) und identifiziert zwei Abbildungen, die zur selben Klasse gehören.

Um unsern Satz (für Polyeder) zu beweisen, brauchen wir nach L. Pontrjagin [10]) nur zu zeigen, daß die Bettische Gruppe co mod 1 und die Hopfsche Gruppe ein primitives Gruppenpaar bilden, sobald einer Abbildungsklasse, repräsentiert durch die „spezielle" Abbildung f, und einem Element der Bettischen Gruppe co mod 1, repräsentiert durch einen Zyklus z^d, als „Produkt" der Koeffizient α von S^d in $fz^d = \alpha S^d$ zugeordnet wird.

Daß es zu jedem $z^d \neq 0$ ein f gibt mit $fz^d \neq 0$ ist klar; man nehme nur ein Simplex t^d, das in z^d mit nichtverschwindendem Koeffizienten (mod 1) auftritt, und bilde es in naheliegender Weise auf S^d und alles Übrige auf den Nordpol ab.

Aus den Hilfssatz schließt man in bekannter Weise [11]), daß $fz^d \neq 0$ (identisch in z^d) die Unwesentlichkeit von f nach sich zieht [12]). Zu jedem wesentlichen f gibt es also ein z^d mit $fx^d \neq 0$.

Das Gruppenpaar ist also wirklich primitiv.

3. Wir dürfen uns den d-dimensionalen kompakten Raum, den wir untersuchen, in eine R_n-adische Folge P_n d-dimensionaler Polyeder entwickelt denken [13])

$$\varphi_n^m P_m \subset P_n .$$

Diese Entwicklung induziert [14]) eine G_n-adische Entwicklung der Bettischen Gruppe co mod 1 von R in die Folge der Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^d(P_n)$:

$$\varphi_n^m \mathfrak{B}^d(P_m) \subset \mathfrak{B}^d(P_n).$$

Weiter induziert sie aber [15]) eine G_n-ale Entwicklung der Hopfschen

---

[10]) Annals of Math. (2) **35** (1934), 361—388, Theorem 5. Doch ist man auf die Pontrjaginsche Theorie eigentlich nicht angewiesen, da es sich hier um die elementaren Fälle handelt — die Hopfsche Gruppe ist eine Gruppe von endlich vielen Erzeugenden.

[11]) a. a. O. [5]), 43—45.

[12]) Der Hilfssatz wird also nicht annähernd in seinem vollen Umfang angewendet.

[13]) Vorstehende Arbeit [2]), Kap. VI. Die Tatsache, die wir hier verwenden, ist jedoch viel elementarer, da wir keine auf -R_n-adische Entwicklung brauchen.

[14]) a. a. O. [2]), Nr. 40, Hauptsatz V, Folgerung 1.

[15]) a. a. O. [1]), 155 oben.

Gruppe $H(R)$ von R in der Folge der Hopfschen Gruppen $H(R_n)$:

$$H(P_n)\varphi_n^m \subset H(P_m);$$

wir schreiben hier das Funktionszeichen hinter das Argument, weil ein Element von $H(P_n)$, repräsentiert durch die Abbildung $f_n P_n \subset S^d$, durch φ_n^m abgebildet wird auf ein Element von $H(P_m)$, repräsentiert durch die Abbildung $f_m P_m \subset S^d$ mit $f_n\varphi_n^m = f_m$.

Nach **2** bilden $\mathfrak{B}^d(P_n)$ und $H(P_n)$ ein primitives Gruppenpaar mod 1. Dabei ist, wenn der Zyklus z_n ein Element von $\mathfrak{B}^d(P_n)$ repräsentiert,

$$f_n(\varphi_n^m z_m) = (f_n\varphi_n^m)z_m.$$

Die Limesgruppen der beiden Folgen bilden also [16]) ebenfalls ein primitives Gruppenpaar mod 1, was wir beweisen wollten.

(Eingegangen den 2. November 1935.)

[16]) a. a. O. [2]), Nr. 20—21.