

# Astérisque

BRUCE KLEINER

JOHN LOTT

**Local collapsing, orbifolds, and geometrization  
- Résumé - Table des matières**

*Astérisque*, tome 365 (2014), p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2014\\_\\_365\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__365__1_0)

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 365

LOCAL COLLAPSING, ORBIFOLDS,  
AND GEOMETRIZATION

Bruce Kleiner  
John Lott

*B. Kleiner*

Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer St., New York, NY 10012.

*E-mail* : `bkleiner@cims.nyu.edu`

*J. Lott*

Department of Mathematics, University of California at Berkeley,  
Berkeley, CA 94720.

*E-mail* : `lott@math.berkeley.edu`

---

**2010 Mathematics Subject Classification.** — 53C20, 53C21, 53C23, 53C44, 57M50.

**Key words and phrases.** — Collapsing, Ricci flow, geometrization, orbifold.

---

# LOCAL COLLAPSING, ORBIFOLDS, AND GEOMETRIZATION

Bruce Kleiner, John Lott

**Abstract.** — This volume has two papers, which can be read separately. The first paper concerns local collapsing in Riemannian geometry. We prove that a three-dimensional compact Riemannian manifold which is locally collapsed, with respect to a lower curvature bound, is a graph manifold. This theorem was stated by Perelman without proof and was used in his proof of the geometrization conjecture. The second paper is about the geometrization of orbifolds. A three-dimensional closed orientable orbifold, which has no bad suborbifolds, is known to have a geometric decomposition from work of Perelman in the manifold case, along with earlier work of Boileau-Leeb-Porti, Boileau-Maillot-Porti, Boileau-Porti, Cooper-Hodgson-Kerckhoff and Thurston. We give a new, logically independent, unified proof of the geometrization of orbifolds, using Ricci flow.

**Résumé (Effondrements locaux, orbifold et géométrisation).** — Ce volume contient deux articles qui peuvent être lus séparément. Le premier concerne des effondrements locaux en géométrie riemannienne. Nous démontrons qu'une variété riemannienne de dimension 3 qui est localement effondrée, relativement à une borne inférieure de la courbure, est un graphe. Ce théorème était énoncé par Perelman sans démonstration et a été utilisé dans sa preuve de la conjecture de géométrisation. Le second article concerne la géométrisation des orbifolds. Un orbifold fermé orientable de dimension 3 qui ne contient pas de mauvais sous-orbifolds admet une décomposition géométrique d'après le travail de Perelman dans le cas des variétés, et d'après les travaux de Boileau-Leeb-Porti, Boileau-Maillot-Porti, Boileau-Porti, Cooper-Hodgson-Kerckhoff et Thurston. Nous donnons une démonstration nouvelle et unique de la géométrisation des orbifolds, *via* le flot de Ricci.



# CONTENTS

<i>Locally Collapsed 3-Manifolds</i> .....	7
1. Introduction .....	7
2. Notation and conventions .....	18
3. Preliminaries .....	21
4. Splittings, strainers, and adapted coordinates .....	27
5. Standing assumptions .....	39
6. The scale function $\mathfrak{r}$ .....	41
7. Stratification .....	45
8. The local geometry of the 2-stratum .....	46
9. Edge points and associated structure .....	48
10. The local geometry of the slim 1-stratum .....	57
11. The local geometry of the 0-stratum .....	59
12. Mapping into Euclidean space .....	62
13. Adjusting the map to Euclidean space .....	71
14. Extracting a good decomposition of $M$ .....	80
15. Proof of Theorem 16.1 for closed manifolds .....	84
16. Manifolds with boundary .....	87
17. Application to the geometrization conjecture .....	90
18. Local collapsing without derivative bounds .....	91
19. Appendix A : Choosing ball covers .....	93
20. Appendix B : Cloudy submanifolds .....	94
21. Appendix C : An isotopy lemma .....	97
References .....	97
<i>Geometrization of Three-Dimensional Orbifolds via Ricci Flow</i> .....	101
1. Introduction .....	101
2. Orbifold topology and geometry .....	104
3. Noncompact nonnegatively curved orbifolds .....	123
4. Riemannian compactness theorem for orbifolds .....	129

5. Ricci flow on orbifolds .....	130
6. $\kappa$ -solutions .....	136
7. Ricci flow with surgery for orbifolds .....	143
8. Hyperbolic regions .....	150
9. Locally collapsed 3-orbifolds .....	152
10. Incompressibility of cuspidal cross-sections and proof of Theorem 1.1 ....	160
11. Appendix A : Weak and strong graph orbifolds .....	165
References .....	174