Astérisque

NICOLAS BERGERON

La conjecture des sous-groupes de surfaces [d'après Jeremy Kahn et Vladimir Markovic]

Astérisque, tome 352 (2013), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 1055, p. 429-458

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__429_0>

© Société mathématique de France, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 2012
64e année, 2011-2012, n° 1055, p. 429 à 458

LA CONJECTURE DES SOUS-GROUPES DE SURFACES [d'après Jeremy Kahn et Vladimir Markovic]

par **Nicolas BERGERON**

Une variété hyperbolique est une variété riemannienne, lisse, connexe, complète et de courbure sectionnelle constante égale à -1. On note $\mathbf{H}_3$ l'unique — à isométrie près — variété hyperbolique simplement connexe de dimension 3. Dans ce rapport, on utilise le modèle du demi-espace $\mathbf{H}_3 = (\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+^*, \frac{|dz|^2+dt^2}{t^2})$. L'extension de Poincaré de l'action par homographies de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ fournit une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{H}_3$ par isométries et donc — *via* la différentielle — une action sur le fibré des repères. Cette action est simplement transitive ; le choix d'un point base $p_0 = (0,1) \in \mathbf{H}_3$ et de deux vecteurs tangents unitaires orthogonaux $\vec{u}_0 = (0,1)$ et $\vec{n}_0 = (1,0)$ permet donc d'identifier $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ au fibré des repères de $\mathbf{H}_3$ *via* l'application $g \mapsto g \cdot (p_0, \vec{u}_0, \vec{n}_0, \vec{u}_0 \wedge \vec{n}_0)$.

Sauf mention contraire, dans tout ce rapport le terme *variété* désignera dorénavant une variété lisse, compacte, connexe, orientable et sans bord, et *surface* une variété de dimension 2. Un choix indifférent de point base est effectué lorsque l'on parle du groupe fondamental d'un espace connexe par arc, et un choix approprié de points bases est effectué lorsque l'on parle de morphisme entre groupes fondamentaux.

1. INTRODUCTION : LA CONJECTURE VH ET SES AMIES

Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. On conjecture tour à tour les énoncés suivants (voir [**37**, p. 380]) :

(1) Le groupe fondamental de M contient un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins 2.

(2) La variété M possède un revêtement fini qui contient une surface *plongée* de sorte que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux.

(3) La variété M possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est non nul.

(4) Pour tout entier n, la variété M possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est supérieur à n.

(5) La variété M possède un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang 2.

(6) La variété M possède un revêtement fini qui fibre sur le cercle.

Il n'est pas difficile de vérifier que[1]

$$\begin{array}{ccccccc} (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow & (3) & \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \\ & \Uparrow & \\ & (6) & \end{array}$$

La conjecture VH (pour virtuellement Haken) est l'énoncé (2). L'objet de ce rapport est d'expliquer les grandes idées de la démonstration, par Jeremy Kahn et Vladimir Markovic **[22]**, de la conjecture (1) :

THÉORÈME 1.1 (Kahn-Markovic). — *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 ; alors il existe une surface S de genre $g \geq 2$ et une injection*

$$\pi_1 S \hookrightarrow \pi_1 M.$$

Commentaires. — 1. Dans une prépublication récente, Dani Wise démontre notamment l'implication (2) $\Rightarrow$ (6). Son résultat est plus général, nous revenons sur ses travaux au §6.2. Tout récemment Ian Agol a fait circuler une prépublication dans laquelle, en se reposant sur les travaux de Wise et de Kahn et Markovic, il démontre les six conjectures ci-dessus.

2. Dans le cas où M est *arithmétique*, le théorème 1.1 est dû à Marc Lackenby **[28]**.

3. Dans le cas où M est une variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini mais *non compacte*, Daryl Cooper, Darren Long et Alan Reid **[12]** démontrent (5) et les résultats de Wise s'appliquent encore pour démontrer (6).

4. Dans un cadre plus général, Mikhail Gromov pose :

QUESTION 1.2. — *Soit Γ un groupe hyperbolique au sens de Gromov qui ne contient pas un sous-groupe libre d'indice fini. Le groupe Γ contient-il un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins 2 ?*

On renvoie à **[11]** pour des travaux récents en lien avec cette question.

[1] L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est la plus délicate, voir **[20**, Lem. 6.6**]**.

2. CONSTRUCTION D'UNE SURFACE À PARTIR DE PANTALONS

Dans toute cette partie, $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}_3$ est une variété hyperbolique de dimension 3 uniformisée, où Γ est un sous-groupe discret et sans torsion du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. De cette manière, on identifie le fibré des repères de M à $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.

DÉFINITION 2.1. — *Soit S une surface dont on fixe un revêtement universel $\widetilde{S} \to S$, de groupe de revêtement $\pi_1(S)$. Une structure de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface *sur S est la donnée d'une immersion $F : \widetilde{S} \to \mathbf{H}_3$ et d'une représentation $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$ telles que F soit équivariante relativement à ρ. Deux structures de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surfaces (F_1, ρ_1) et (F_2, ρ_2) sur S sont* équivalentes *s'il existe un élément g de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tel que $F_2 = gF_1$ et $\rho_2 = g\rho_1 g^{-1}$.*

Par analogie avec la notion de (G, X)-structure, on dira que F est l'*application développante* et ρ le *morphisme d'holonomie* de la structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface. Le groupe de surface du théorème 1.1 sera obtenu comme groupe de monodromie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur une surface S immergée dans M. On aura également besoin de considérer des surfaces à bord ; on demande alors que l'application développante envoie chaque composante de bord sur une géodésique.

2.1. L'espace des futals

Fixons Π un pantalon orienté (à bord). On numérote C_1, C_2 et C_3 les composantes de bord orientées de Π et on choisit un élément $c_n \in \pi_1(\Pi)$ dans la classe de conjugaison correspondant à chaque composante de bord C_n pour $n = 1, 2, 3$, de sorte que

$$c_1 c_2 c_3 = \mathrm{id}.$$

Rappelons qu'un élément $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ — vu comme isométrie de $\mathbf{H}_3$ — a une *longueur de translation complexe* $\ell(A) \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$, telle que[2] $\mathrm{trace}(A) = \pm 2\cosh(\ell(A)/2)$.

Étant donné un morphisme $\rho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, on note $\ell_n = \ell_n(\rho)$ les longueurs de translation complexes des $\rho(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$.

Kourouniotis [**26**, Prop. 1.6] montre que trois nombres complexes $\sigma_n \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$ où $n = 1, 2, 3$, déterminent deux hexagones gauches à angles droits isométriques, mais d'orientations opposées, dont trois côtés non-adjacents sont de longueurs complexes $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_3$ pour un choix de $\hat{\sigma}_n \in \{\sigma_n, \sigma_n + i\pi\}$. En recollant ces deux hexagones on

[2] On prendra garde au fait que la trace de A n'est définie qu'au signe près et que la demi-longueur $\ell(A)/2$ n'est définie que modulo $i\pi$.

munit le pantalon Π d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface de représentation d'holonomie $\rho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ telle que $\ell_n(\rho) = 2\sigma_n$ pour $n = 1, 2, 3$. Réciproquement, si ρ est le morphisme d'holonomie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur Π et si les extrémités des axes de translation des $\rho(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$ sont deux à deux distinctes, alors ρ est conjuguée à une représentation d'holonomie associée comme ci-dessus à trois *demi-longueurs* $\sigma_n = \sigma_n(\rho) \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$ où $n = 1, 2, 3$.

Remarque 2.2. — 1. Quitte à conjuguer ρ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, on peut supposer que l'axe de translation de $\rho(c_1)$ est la géodésique (orientée) $i\mathbf{R}_+^*$ de $\mathbf{H}_3$ qui va de 0 à l'infini. Les perpendiculaires communes à $i\mathbf{R}_+^*$ et aux axes de translation des $\rho(c_n)$ où $n = 2, 3$, déterminent deux éléments v_- et v_+, de points base p_- et p_+, du fibré unitaire normal à $i\mathbf{R}_+^*$ que l'on numérote de sorte que l'orientation du segment $[p_-, p_+]$ coïncide avec l'orientation de la géodésique $i\mathbf{R}_+^*$. Alors l'homographie $z \mapsto e^{\sigma_1} z$ est l'unique isométrie directe de $\mathbf{H}_3$ qui préserve l'axe $i\mathbf{R}_+^*$ et envoie v_- sur v_+. Cela détermine l'élément $\sigma_1 \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$; on procède de même pour σ_2 et σ_3.

2. Toute représentation ρ comme ci-dessus admet un relevé $\tilde{\rho}$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ tel que $\mathrm{trace}(\tilde{\rho}(c_n)) = -2\cosh\sigma_n$ pour $n = 1, 2, 3$. Les σ_n déterminent la classe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$-conjugaison de $\tilde{\rho}$.

DÉFINITION 2.3. — (1) *Un* futal *dans M est la classe de conjugaison $\mathbf{\Pi} = [\rho]$ dans Γ d'un morphisme injectif $\rho : \pi_1(\Pi^0) \to \Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tel que ρ est l'holonomie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur Π, les extrémités des axes de translation des $\rho(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$ sont deux à deux distinctes et ρ vérifie*

$$\sigma_n(\rho) = \frac{1}{2}\ell_n(\rho), \quad n = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Dans la suite on choisira toujours des représentants $\ell_n \in \mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R}$ tels que $-\pi < \mathrm{Im}(\ell_n) \leq \pi$.

(2) *Un* futal marqué *dans M est la donnée $(\mathbf{\Pi}, g^*)$ d'un futal et d'une géodésique fermée orientée g^* dans M qui représente la classe de conjugaison de $\rho(c_n)$ pour un certain $n = 1, 2, 3$.*

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des futals marqués dans M muni de la topologie discrète. Le groupe Γ opère, à gauche diagonalement et par conjugaison, sur Γ^3 et un futal marqué $(\mathbf{\Pi}, g^*)$ est uniquement déterminé par la classe de conjugaison du triplet ordonné $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\rho(c_n), \rho(c_{n+1}), \rho(c_{n+2})) \in \Gamma^3$, où l'entier n, considéré modulo 3, est tel que g^* représente la classe de conjugaison de $\rho(c_n)$. Un tel triplet vérifie en outre la relation

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \mathrm{id} \tag{2}$$

qui est préservée par l'action par conjugaison de Γ. Notons

$$\widehat{\mathcal{P}} = \Gamma \backslash \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \Gamma^3 \ : \ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \mathrm{id} \right\}.$$

On identifiera dorénavant $\mathcal{P}$ à un sous-ensemble de $\widehat{\mathcal{P}}$.

L'ensemble $\widehat{\mathcal{P}}$ est naturellement muni d'une *involution* $\mathcal{R}$ définie par :

$$\mathcal{R}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma_1^{-1}, \gamma_3^{-1}, \gamma_2^{-1})$$

et d'un *tricycle* rot défini par

$$\mathrm{rot}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma_2, \gamma_3, \gamma_1).$$

Remarque 2.4. — On peut penser à l'involution $\mathcal{R}$ comme à l'application qui envoie un futal marqué $(\mathbf{\Pi}, g^*) \in \mathcal{P}$ sur le futal $\mathbf{\Pi}$ muni de l'« orientation opposée » et marqué par la géodésique $-g^*$ (c'est-à-dire g^* munie de l'orientation opposée). Le tricycle rot préserve également le sous-ensemble $\mathcal{P}$; il correspond à un changement cyclique du marquage.

Soit $(\mathbf{\Pi}, g^*) = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] \in \mathcal{P}$ un futal marqué. On note $\sigma = \sigma(\mathbf{\Pi}, g^*) \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$ la demi-longueur complexe de la composante de bord marquée : $\sigma = \frac{1}{2}\ell(\gamma_1)$.

2.2. Étiquetage des futals et construction d'une surface

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini.

DÉFINITION 2.5. — *Un* étiquetage légal *est un triplet* $(E, \mathcal{R}_E, \mathrm{rot}_E)$, *que par abus nous noterons juste* E, *constitué de trois applications* $E : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$, $\mathcal{R}_E : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *et* $\mathrm{rot}_E : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *telles que*

(1) *l'application* $\mathcal{R}_E$ *est involutive et vérifie*

$$\mathcal{R} \circ E = E \circ \mathcal{R}_E,$$

(2) *l'application* rot_E *est d'ordre* 3 *et vérifie*

$$\mathrm{rot} \circ E = E \circ \mathrm{rot}_E.$$

Étant donnés un étiquetage légal E et un élément $e \in \mathcal{E}$, on note $(\mathbf{\Pi}_e, g_e^*)$ le futal marqué $E(e)$.

DÉFINITION 2.6. — *Une involution* $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *est dite* admissible, *relativement à un étiquetage légal* E, *si, pour tout* e *dans* $\mathcal{E}$, *on a :*

$$g^*_{\tau(e)} = -g^*_e.$$

On associe à un étiquetage légal $E : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ et à une involution admissible $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un graphe $\mathcal{G}$ trivalent : l'ensemble des sommets est $\mathcal{E}/\langle \mathrm{rot}_E \rangle$ et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'ils ont des représentants dans $\mathcal{E}$ échangés par τ. Quitte à ne considérer qu'une composante connexe choisie arbitrairement, nous supposerons dorénavant que $\mathcal{G}$ est connexe. Le bord d'un épaississement de $\mathcal{G}$ est alors une surface S qui fibre en cercles au-dessus de $\mathcal{G}$ et les cercles au-dessus des milieux des arêtes découpent S en pantalons orientés. On note Π_e ($e \in \mathcal{E}$) le pantalon correspondant au sommet $[e]$ dans $\mathcal{E}/\langle \mathrm{rot}_E \rangle$ dont on marque la composante de bord associée au milieu de l'arête joignant les sommets $[e]$ et $[\tau(e)]$. L'étiquetage légal E associe à chaque élément $e \in \mathcal{E}$ un futal $\mathbf{\Pi}_e = [\rho_e]$, où ρ_e est le morphisme d'holonomie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface (F_e, ρ_e) sur Π_e, ainsi qu'une géodésique fermée orientée $g_e^* \subset M$ correspondant à la composante de bord marquée de Π_e. Soit $\sigma_e = \sigma(\mathbf{\Pi}_e, g_e^*) \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$. Puisque τ est admissible, on a :

$$\sigma_{\tau(e)} = \sigma_e. \tag{3}$$

La surface à bord obtenue en recollant Π_e et $\Pi_{\tau(e)}$ selon les composantes de bord marquées est donc naturellement munie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface qui induit sur Π_e et $\Pi_{\tau(e)}$ des structures de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surfaces équivalentes à (F_e, ρ_e) et $(F_{\tau(e)}, \rho_{\tau(e)})$.[3] De cette manière on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. — *Pour tout étiquetage légal $E : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ et toute involution admissible $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, il existe une surface S munie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface de représentation d'holonomie*

$$\rho_{E,\tau} : \pi_1(S) \to \Gamma$$

telle que S est découpée en pantalons orientés Π_e avec une composante de bord marquée et la structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur S induit sur chaque Π_e une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface équivalente à (F_e, ρ_e).

2.3. Coordonnées de Fenchel-Nielsen

Soient γ un élément de Γ et g la géodésique fermée *non orientée* dans M associée à la classe de conjugaison de γ dans Γ. On note Z_γ le centralisateur de γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. La longueur complexe ℓ de γ, vue dans $\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R}$ avec $-\pi < \ell \leq \pi$, ne dépend que de g. On note $\widehat{\mathbf{T}}_\gamma = \langle\gamma\rangle\backslash Z_\gamma$ et $\mathbf{T}_g$ le tore euclidien $\mathbf{C}/(\sigma\mathbf{Z} + 2i\pi\mathbf{Z})$ où $\sigma = \frac{1}{2}\ell$. On note enfin $(\mathbf{T}_M, d)$ l'espace métrique obtenu en formant la réunion disjointe des $\mathbf{T}_g$, où g parcourt l'ensemble des géodésiques fermées (non orientées) dans M.

Si h est un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ la conjugaison par h induit un difféomorphisme de $\widehat{\mathbf{T}}_\gamma$ vers $\widehat{\mathbf{T}}_{h\gamma h^{-1}}$. Mais si l'axe (orienté) de γ est $i\mathbf{R}_+^*$, alors le groupe Z_γ est égal

[3] Noter qu'il est nécessaire pour cela que $\sigma_{\tau(e)} = \sigma_e$ plutôt que $\sigma_{\tau(e)} = \sigma_e + i\pi$.

à $\left\{A_\zeta = \begin{pmatrix} e^{\zeta/2} & \\ & e^{-\zeta/2} \end{pmatrix} : \zeta \in \mathbf{C}\right\}$. L'isomorphisme $A_\zeta \mapsto \zeta$ identifie canoniquement Z_γ au groupe $\mathbf{C}$; il permet de réaliser $\widehat{\mathbf{T}}_\gamma$ comme revêtement de degré 2 de $\mathbf{T}_g$.

Considérons maintenant un futal marqué $(\mathbf{\Pi}, g^*) = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] \in \mathscr{P}$. Comme dans la remarque 2.2 (1), la perpendiculaire commune aux axes de γ_1 et γ_2, resp. γ_1 et γ_3, détermine un élément du fibré unitaire normal à l'axe de γ_1 et donc, en prenant d'abord le vecteur tangent de l'axe de translation orienté de γ_1 puis en complétant par leur produit vectoriel, un élément du fibré des repères de $\mathbf{H}_3$. On note r_- et r_+ ces deux repères, ordonnés de sorte que l'on passe de r_- à r_+ en suivant l'axe de γ_1 dans le sens positif. Le groupe Z_{γ_1} opère simplement transitivement sur le sous-ensemble constitué des repères en un point de l'axe de γ_1. On écrit $r_- = A_- \cdot (p_0, \vec{u}_0, \vec{n}_0, \vec{u}_0 \wedge \vec{n}_0)$ et $r_+ = A_+ \cdot (p_0, \vec{u}_0, \vec{n}_0, \vec{u}_0 \wedge \vec{n}_0)$ avec A_- et A_+ dans Z_{γ_1}. Il découle de la remarque 2.2 que $A_+ = A_{\sigma_1} A_-$; dans la suite on identifie les tores euclidiens $\mathbf{T}_g$ et $\langle A_{\sigma_1} \rangle \backslash Z_{\gamma_1}$. On prendra cependant garde au fait que l'action $(\zeta, B) \mapsto A_\zeta B$ de $\mathbf{C}$ sur $\langle A_{\sigma_1} \rangle \backslash Z_{\gamma_1}$ dépend d'un choix d'orientation de g.

DÉFINITION 2.8. — *On appelle* pied *du futal marqué* $(\mathbf{\Pi}, g^*)$ *l'image commune* $p(\mathbf{\Pi}, g^*)$ *de* A_- *et* A_+ *dans le tore* $\mathbf{T}_g$. *On note* $p : \mathscr{P} \to \mathbf{T}_M$ *l'application qui à un futal marqué* $(\mathbf{\Pi}, g^*)$ *associe son pied* $p(\mathbf{\Pi}, g^*) \in \mathbf{T}_g \subset \mathbf{T}_M$.

Considérons maintenant un étiquetage légal $E : \mathscr{E} \to \mathscr{P}$ et une involution admissible $\tau : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$. Soit $e \in \mathscr{E}$. On a $\sigma_{\tau(e)} = \sigma_e$ mais en général $p(\mathbf{\Pi}_e, g_e^*) \neq p(\mathbf{\Pi}_{\tau(e)}, g_{\tau(e)}^*)$.

DÉFINITION 2.9. — *On appelle* paramètre de décalage *associé à la géodésique marquée* g_e^* *l'élément* $t_e \in \mathbf{C}/(\sigma_e \mathbf{Z} + 2i\pi\mathbf{Z})$ *tel que*

$$A_{t_e + i\pi} p(\mathbf{\Pi}_e, g_e^*) = p(\mathbf{\Pi}_{\tau(e)}, g_{\tau(e)}^*).$$

Remarque 2.10. — L'action $(\zeta, B) \mapsto A_\zeta B$ de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{T}_{g_e}$ dépend du choix d'orientation g_e^*, le changer revient à changer l'action en $(\zeta, B) \mapsto A_\zeta^{-1} B$. On en déduit que $t_e = t_{\tau(e)}$ et donc que, comme la demi-longueur σ_e, le paramètre de décalage t_e ne dépend que de la composante de bord marquée et pas du futal.

Les demi-longueurs complexes $(\sigma_e)_{e \in \mathscr{E}}$ déterminent une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur chaque pantalon Π_e. Si tous les paramètres $(\sigma_e, t_e)_{e \in \mathscr{E}}$ sont *réels* la représentation $\rho_{E,\tau}$ est injective et conjuguée à une représentation dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Elle est déterminée, à conjugaison près, par les paramètres (de Fenchel-Nielsen) $(\sigma_e, t_e/\sigma_e)_{e \in \mathscr{E}} \in (\mathbf{R}_+^\times)^{\mathscr{E}} \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{\mathscr{E}}$. Cette dernière assertion reste vraie lorsque les paramètres sont complexes : la représentation $\rho_{E,\tau} : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est encore déterminée, à conjugaison près, par les paramètres $(\sigma_e, t_e)_{e \in \mathscr{E}}$ qui sont les paramètres de Fenchel-Nielsen complexes introduits par Kourouniotis **[26]** et Tan **[36]**.

2.4. Surfaces presque plates

DÉFINITION 2.11. — *Soient R et ε deux réels strictement positifs. Un futal $\mathbf{\Pi} = [\rho]$ dans M est* (R,ε)-plat *si, pour $n = 1, 2, 3$, on a :*

$$\left|\sigma_n(\rho) - \frac{R}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Dans la partie suivante, nous déduirons le théorème 1.1 des deux théorèmes qui suivent. Le premier — qui découlera du fait que le flot des repères sur M est exponentiellement mélangeant — affirme que si l'on fixe ε et laisse tendre R vers l'infini, il existe « beaucoup » de futals (R,ε)-plats dans M et que les pieds de ces futals sont « bien distribués ». On dispose donc d'une grande flexibilité pour construire des surfaces à partir de ces futals presque plats. Le second théorème fournit une recette d'assemblage de futals presque plats de sorte que la représentation de monodromie de la structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface obtenue à l'issue de l'assemblage soit injective.

Étant donné un espace métrique (X,d), on note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes finies positives à support compact dans X. Par analogie avec la métrique de Levy-Prokhorov, voir [7], on pose :

DÉFINITION 2.12. — *Deux mesures μ, $\nu \in \mathcal{M}(X)$ sont dites* δ-proches, *pour un certain réel strictement positif δ, si*

(1) $\mu(X) = \nu(X)$, *et*

(2) *pour tout borélien A de X, on a $\mu(A) \leq \nu(V_\delta(A))$, où $V_\delta(A)$ désigne le δ-voisinage de A dans X.*

Noter qu'être δ-proche est une relation symétrique.[4]

Par abus de notation, on note $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ l'espace des mesures boréliennes positives μ à support fini sur $\mathcal{P}$ qui sont préservées à la fois par l'involution $\mathcal{R}$ et le tricycle rot. L'application p qui à un futal marqué $(\mathbf{\Pi}, g^*)$ associe son pied dans $\mathbf{T}_g$ permet de pousser une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ sur une mesure $p_*\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{T}_M)$.

DÉFINITION 2.13. — *Soient δ un réel strictement positif et ν une mesure dans $\mathcal{M}(\mathbf{T}_M)$. On note Λ_ν la moyenne de ν sous l'action de $\mathbf{C}$, de sorte que :*

$$\Lambda_{\nu|\mathbf{T}_g} = \left[\frac{\nu(\mathbf{T}_g)}{\Lambda(\mathbf{T}_g)}\right]\Lambda,$$

où Λ est une mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}_g$. On dit que ν est δ-équidistribuée *si ν est δ-proche de Λ_ν. On écrira alors $\nu \in \mathcal{M}_\delta(\mathbf{T}_M)$.*

[4] En effet : $\nu(A) \leq \nu(X) - \nu(V_\delta(X \setminus V_\delta(A))) \leq \mu(X) - \mu(X \setminus V_\delta(A)) = \mu(V_\delta(A))$.

THÉORÈME 2.14. — *Il existe des constantes strictement positives q et D telles que pour tout réel $\varepsilon \in]0,1]$, il existe un réel R_ε tel que pour tout $R \geq R_\varepsilon$, il existe une mesure non nulle $\mu = \mu_{\varepsilon,R} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ telle que*

(1) *μ est supportée sur les futals (R,ε)-plats, et*

(2) *$p_*\mu$ est DRe^{-qR}-équidistribuée.*

DÉFINITION 2.15. — *Soient $E : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ un étiquetage légal, $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une involution admissible et ε et R deux réels strictement positifs. On dit que la représentation $\rho_{E,\tau}$ est* (R,ε)-plate *si pour tout $e \in \mathcal{E}$,*

(1) *le futal $\mathbf{\Pi}_e$ est (R,ε)-plat, ou encore $|\sigma_e - R/2| \leq \varepsilon$, et*

(2) *le paramètre de décalage t_e est $\frac{\varepsilon}{R}$-proche de 1 : $|t_e - 1| \leq \varepsilon/R$.*

Si R est fixé alors, pour ε suffisamment petit, une représentation (R,ε)-plate est la monodromie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface qui est arbitrairement proche d'être fuchsienne ; en particulier elle est injective. L'intérêt du résultat qui suit est de montrer que puisque l'on a imposé aux paramètres de décalage d'être proches de 1, on peut en fait choisir ε uniforme par rapport à R.

THÉORÈME 2.16. — *Il existe des réels strictement positifs ε_0 et R_0 tels que pour tout étiquetage légal $E : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ et toute involution admissible $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et quel que soit $R \geq R_0$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, si la représentation $\rho_{E,\tau}$ est (R,ε)-plate alors $\rho_{E,\tau}$ est injective.*

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

Dans cette partie, on admet les théorèmes 2.14 et 2.16 et on en déduit le théorème 1.1. Soient q, D et ε_0 les constantes fournies par les théorèmes 2.14 et 2.16. On fixe $\varepsilon \in]0,\min(\varepsilon_0,1)]$. Soit R_ε le nombre réel strictement positif qui lui est associé par le théorème 2.14. La proposition qui suit garantit l'existence d'une représentation (R,ε)-plate avec $R \geq R_0$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Le théorème 2.16 implique alors que cette représentation est injective, ce qui démontre le théorème 1.1.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $R > R_\varepsilon$. Il existe un étiquetage légal $E : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ et une involution admissible $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tels que pour tout $e \in \mathcal{E}$, on a :*

(1) *$|\sigma_e - R/2| \leq \varepsilon$, et*

(2) *$|t_e - 1| \leq 2DRe^{-qR}$.*

On explique maintenant comment déduire la proposition 3.1 du théorème 2.14. Il s'agit de passer des mesures aux étiquetages. On fixe $R > R_\varepsilon$.

3.1. Une conséquence métrique du théorème des mariages de Hall

Une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ est presque un étiquetage, la difficulté est de construire l'involution admissible τ. L'outil technique est la proposition générale suivante.

PROPOSITION 3.2. — *Soient (X,d) un espace métrique, A et B deux ensembles finis de même cardinal, $f : A \to X$ et $g : B \to X$ deux applications et δ un réel strictement positif. On note $\#_A$, resp. $\#_B$, la mesure de comptage sur A, resp. B. Et on suppose que les mesures $f_*\#_A$ et $g_*\#_B$ sont δ-proches. Alors, il existe une bijection $h : A \to B$ telle que pour tout $a \in A$, on ait $d(g(h(a)), f(a)) \leq \delta$.*

Démonstration. — On définit :

$$M = \{(a,b) \in A \times B \ : \ d(f(a), g(b)) \leq \delta\}$$

comme ensemble des mariages possibles. Il s'agit de construire une bijection $h : A \to B$ telle que pour tout $a \in A$, on ait $(a, h(a)) \in M$. Le théorème des mariages de Philip Hall **[19]** fournit un critère pour l'existence d'une telle *application de mariage* :

LEMME 3.3. — *Pour qu'il existe une application de mariage, il suffit que pour tout sous-ensemble C de A il y ait au moins $|C|$ éléments de B qui puissent être mariés à un élément de C.*

Il s'agit donc de montrer que si C est un sous-ensemble de A, le sous-ensemble $M_C = \{b \in B \ : \ \exists\, a \in C,\ (a,b) \in M\}$ de B contient au moins $|C|$ éléments. Cela résulte du calcul suivant, reposant sur l'hypothèse que les mesures $f_*\#_A$ et $g_*\#_B$ sont δ-proches :

$$|M_C| = (g_*\#_B)(V_\delta(f(C))) \geq (f_*\#_A)(f(C)) \geq |C|. \qquad \square$$

3.2. Démonstration de la proposition 3.1

Le théorème 2.14 fournit une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ telle que $p_*\mu$ soit DRe^{-qR}-proche de sa moyenne sous l'action de $\mathbf{C}$. En particulier, on a :

$$p_*\mu \text{ et } (A_{1+i\pi} \circ p)_*\mu \text{ sont } 2DRe^{-qR}\text{-proches.} \tag{4}$$

On commence par montrer qu'il existe une mesure *rationnelle* vérifiant (4).

LEMME 3.4. — *Il existe une mesure non nulle $\mu^{\mathrm{rat}} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ supportée par des futals (R,ε)-plats, vérifiant* (4) *et telle que pour tout $(\mathbf{\Pi}, g^*) \in \mathcal{P}$, on ait $\mu^{\mathrm{rat}}(\mathbf{\Pi}, g^*) \in \mathbf{Q}$.*

Démonstration. — Les mesures $p_*\mu$ et $(A_{1+i\pi} \circ p)_*\mu$ sont atomiques à support fini. Notons a_i et b_j leurs atomes respectifs. La relation (4) est alors équivalente à un système linéaire fini S d'inégalités entre les valeurs $x_i = p_*\mu(a_i)$ et $y_j = (A_{1+i\pi} \circ p)_*\mu(b_j)$ dont les coefficients sont entiers (et même dans $\{0,1\}$). Puisque le système S a une solution réelle, on peut trouver des solutions rationnelles x_i^{rat}, y_j^{rat} arbitrairement

proches. On peut alors remplacer μ par une mesure μ^{rat} avec les mêmes atomes mais rationnelle et telle que $x_i^{\mathrm{rat}} = p_*\mu^{\mathrm{rat}}(a_i)$ et $y_j^{\mathrm{rat}} = (A_{1+i\pi}\circ p)_*\mu^{\mathrm{rat}}(b_j)$. La mesure μ^{rat} vérifie les conclusions du lemme. □

Nous supposons dorénavant que $\mu = \mu^{\mathrm{rat}}$. Quitte à multiplier μ par un entier suffisamment grand, on peut même supposer que chaque $\mu(\mathbf{\Pi}, g^*)$ est entier. On peut alors écrire μ comme une somme formelle $\mathcal{R}$-symétrique de futals (non marqués)[5] :

$$\mu = n_1(\mathbf{\Pi}_1 + \mathcal{R}(\mathbf{\Pi}_1)) + n_2(\mathbf{\Pi}_2 + \mathcal{R}(\mathbf{\Pi}_2)) + \cdots + n_m(\mathbf{\Pi}_m + \mathcal{R}(\mathbf{\Pi}_m)), \quad (n_i \in \mathbf{N}^*).$$

Pour chaque $s = 1, \ldots, m$, on fixe un marquage $(\mathbf{\Pi}_s, g_s^*)$. Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{E} = \{(j,k) \ : \ j = 1, 2, \ldots, 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m),\ k \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\}$. On associe à μ l'étiquetage $E : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ défini par

$$E(j,k) = \begin{cases} \mathrm{rot}^k(\mathbf{\Pi}_s, g_s^*) & \text{si } j \text{ est impair et } 2(n_1 + \cdots + n_{s-1}) < j \leq 2(n_1 + \cdots + n_s) \\ \mathcal{R} \circ \mathrm{rot}^k(\mathbf{\Pi}_s, g_s^*) & \text{si } j \text{ est pair et } 2(n_1 + \cdots + n_{s-1}) < j \leq 2(n_1 + \cdots + n_s). \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est naturellement muni d'une involution $\mathcal{R}_E : (j,k) \mapsto (j + (-1)^{j+1}, k)$ et d'un tricycle $\mathrm{rot}_E : (j,k) \mapsto (j, k+1)$ qui font de l'application E un étiquetage légal. Noter que, puisque μ est supportée par des futals (R,ε)-plats, pour tout $e \in \mathcal{E}$, on a $|\sigma_e - R/2| \leq \varepsilon$.

Il nous reste à construire une involution admissible $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que, pour tout $e \in \mathcal{E}$, on ait $d(A_{1+i\pi}p(\mathbf{\Pi}_e, g_e^*), p(\Pi_{\tau(e)}, g_{\tau(e)}^*)) \leq 2DRe^{-qR}$. Pour cela, on décompose $\mathcal{E}$ en la réunion disjointe des sous-ensembles

$$\mathcal{E}(g^*)^{\pm} = \{(j,k) \ : \ E(j,k) = (\cdot, g^*),\ \pm = (-1)^{j+1}\},$$

où g^* parcourt l'ensemble des géodésiques fermées orientées de M.

LEMME 3.5. — *Soit g^* une géodésique fermée orientée de M. Il existe une bijection $h = h_{g^*} : \mathcal{E}(g^*)^+ \to \mathcal{E}(-g^*)^-$ telle que pour tout $e \in \mathcal{E}(g^*)^+$,*

$$d\left((A_{1+i\pi} \circ p \circ E)(h(e)), (p \circ E)(e)\right) \leq 2DRe^{-qR}.$$

Démonstration. — Posons $\alpha^+ = (p\circ E)_*\#_{\mathcal{E}(g^*)^+}$ et $\alpha^- = (p\circ E)_*\#_{\mathcal{E}(-g^*)^-}$. Il découle de la $\mathcal{R}$-symétrie de μ (ou de l'étiquetage E) que les mesures α^+ et α^- coïncident. On a alors $p_*\mu_{|\mathbf{T}_g} = 4\alpha^- = 4\alpha^+$ et l'équation (4) implique que les mesures α^+ et $(A_{1+i\pi})_*\alpha^-$ sont $2DRe^{-qR}$-proches. Le lemme découle donc de la proposition 3.2. □

On définit alors l'involution $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par

$$\tau(e) = \begin{cases} h_{g^*}(e) & \text{si } e \in \mathcal{E}(g^*)^+ \\ h_{-g^*}^{-1}(e) & \text{si } e \in \mathcal{E}(g^*)^-. \end{cases}$$

[5] La mesure μ, étant rot-invariante, attribue le même poids à deux futals marqués qui ne diffèrent que par le marquage.

La proposition 3.1 est démontrée et donc aussi le théorème 1.1.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.14

On note K le stabilisateur de p_0 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et a_t la matrice $\left(\begin{smallmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{smallmatrix}\right)$, où $t \in \mathbf{R}$.

4.1. Le flot des repères

La courbe $t \mapsto p_t = (0, e^t) = a_t \cdot p_0$ est la géodésique dans $\mathbf{H}_3$ de conditions initiales $(p_0, \vec{u}_0)$. Le repère $(p_t, \vec{u}_t, \vec{n}_t, \vec{u}_t \wedge \vec{n}_t)$ associé à la matrice a_t est obtenu par transport parallèle de $(p_0, \vec{u}_0, \vec{n}_0, \vec{u}_0 \wedge \vec{n}_0)$ pendant un temps t le long de la géodésique $(p_t)_{t\in\mathbf{R}}$. Et pour tout $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, la géodésique $(g \cdot p_t)_{t\in\mathbf{R}}$ a pour condition initiale $g \cdot (p_0, \vec{u}_0)$. L'action du flot géodésique sur le fibré des repères par transport parallèle pendant un temps t correspond donc — dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ — à la multiplication à droite par la matrice a_t. Cette action induit une action — appelée *flot des repères* — sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. La mesure de Haar sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ induit une mesure finie — invariante sous l'action du flot des repères — sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$; on note ν la mesure de probabilité correspondante. Le théorème suivant — dû à Calvin Moore [**31**] — affirme que le flot des repères est exponentiellement mélangeant relativement à la mesure de Haar ; on donne les grandes idées de sa démonstration en appendice.

THÉORÈME 4.1. — *Il existe une constante $q = q(M) > 0$ telle que si f et g sont deux fonctions de classe C^∞ de $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{R}$, alors il existe une constante C, fonction continue des normes de Sobolev de f et de g, telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$,*

$$\Big| \int_{\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} g(xa_t) f(x) d\nu(x) - \Big(\int_{\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} f d\nu \Big) \Big(\int_{\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} g d\nu \Big) \Big| \leq C e^{-q|t|}.$$

4.2. Une application du mélange

On munit le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ d'une métrique riemannienne d invariante à gauche sous l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, invariante à droite sous l'action de K et qui relève la métrique hyperbolique sur $\mathbf{H}_3$. Soit ε un réel strictement positif. On fixe une fonction χ_ε positive, de classe C^∞ sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, supportée dans la boule de rayon $\varepsilon/2$ centrée en l'identité et vérifiant :

(1) $\chi_\varepsilon(\mathrm{Id}) > 0$, et

(2) $\int_{\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} \chi_\varepsilon(x) d\nu(x) = 1$.

On associe à la fonction χ_ε le noyau $k_\varepsilon(x, y) = \chi_\varepsilon(x^{-1}y)$ sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.

DÉFINITION 4.2. — *Soit r un réel strictement positif. On pose :*

$$\forall\, x, y \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}), \quad a_{\varepsilon,r}(x,y) = \int_{\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} k_\varepsilon(x, ga_r) k_\varepsilon(y,g) d\nu(g)$$

et

$$\forall\, x, y \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}), \quad A_{\varepsilon,r}(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_{\varepsilon,r}(x, \gamma y).$$

Le noyau $a_{\varepsilon,r}$ est un noyau *invariant* sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$: $a_{\varepsilon,r}(gx, gy) = a_{\varepsilon,r}(x,y)$, pour tous $x, y, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Le noyau $A_{\varepsilon,r}$ définit lui un noyau C^∞ sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$; il mesure si deux repères dans M sont proches d'être envoyés l'un sur l'autre par l'action du flot des repères pendant un temps r.

PROPOSITION 4.3. — *Il existe une constante $C = C(\varepsilon, M)$ telle que pour tous $x, y \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, on a :*

$$|A_{\varepsilon,r}(x,y) - 1| \leq Ce^{-qr}.$$

Démonstration. — Soient $x, y \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et $D \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ un domaine fondamental pour l'action de Γ. On a :

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon,r}(x,y) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} k_\varepsilon(x, ga_r) k_\varepsilon(y, \gamma^{-1} g) d\nu(g) \\ &= \sum_{\gamma,\gamma'\in\Gamma} \int_D k_\varepsilon(x, \gamma' g a_r) k_\varepsilon(y, \gamma^{-1}\gamma' g) d\nu(g) \\ &= \int_{\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} K_\varepsilon(x, ga_r) K_\varepsilon(y,g) d\nu(g), \end{aligned}$$

où $K_\varepsilon(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k_\varepsilon(x, \gamma y)$ définit une fonction de classe C^∞ sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Le théorème 4.1[6] appliqué aux fonctions $f = K_\varepsilon(y, \cdot)$ et $g = K_\varepsilon(x, \cdot)$, fournit alors une constante $c(x,y)$ telle que $|A_{\varepsilon,r}(x,y) - 1| \leq c(x,y)e^{-qr}$. Enfin, par compacité de M, on peut choisir C majorant uniformément $c(x,y)$. □

Remarque 4.4. — Il découle de la proposition 4.3 que pour r suffisamment grand, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $a_{\varepsilon,r}(x, \gamma x)$ soit strictement positif. Il existe alors $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tel que $d(g\gamma^{-1} g, a_r) \leq \varepsilon$. Et la géodésique fermée orientée dans M associée à γ a donc pour longueur (complexe) un nombre ℓ tel que $|\ell - r| < \varepsilon$. Ce résultat – ainsi que le principe de sa démonstration – est dû à Gregori Margulis **[29]**.

[6] Noter que l'on a : $\int_{\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} K_\varepsilon(x,g) d\nu(g) = \int_{\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})} k_\varepsilon(x,g) d\nu(g) = 1$.

4.3. Des repères aux futals

Soit $x \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$; on note $(p, \vec{u}, \vec{n}, \vec{u} \wedge \vec{n}) = x \cdot (p_0, \vec{u}_0, \vec{n}_0, \vec{u}_0 \wedge \vec{n}_0)$. Étant donné un réel r, on associe à x les éléments

$$x_{(k,r)} = x R_{\frac{2ik\pi}{3}} a_{r/4} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2,$$

où $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{smallmatrix}\right)$ est l'élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ d'extension de Poincaré la rotation d'angle θ dans le sens direct autour de la géodésique passant par p_0 et dirigée par le vecteur $\vec{n}_0$.[7] Soit $\omega^k(\vec{u})$ le vecteur obtenu par rotation directe d'angle $\frac{2k\pi}{3}$ de $\vec{u}$ autour du vecteur $\vec{n}$. Le repère $x_{(k,r)} \cdot (p_0, \vec{u}_0, \vec{n}_0, \vec{u}_0 \wedge \vec{n}_0)$ est l'image de $(p, \omega^k(\vec{u}), \vec{n}, \omega^k(\vec{u}) \wedge \vec{n})$ par le flot des repères pendant un temps $r/4$.

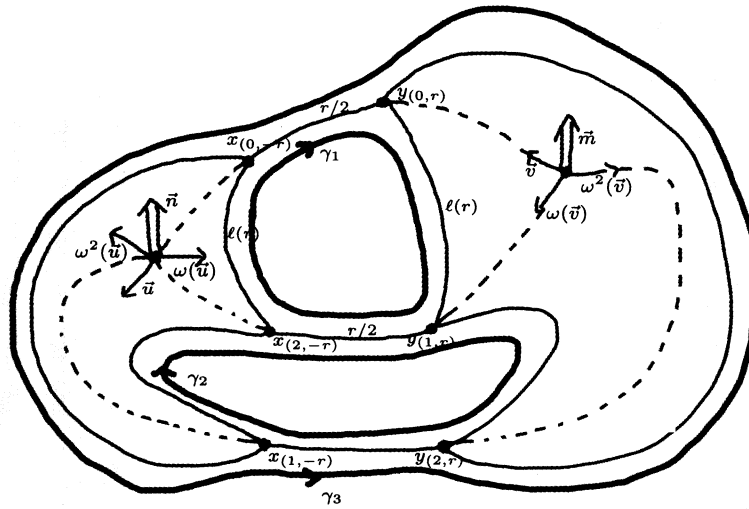

FIGURE 1. Des repères aux futals

Soit $g_r = a_{-r/4} R_{\frac{2i\pi}{3}} a_{r/4}$; on a $x_{(k+1,r)} = x_{(k,r)} g_r$ pour $k = 0, 1, 2$. On écrit la décomposition de Cartan $g_r = R_{\theta_1(r)+\pi} a_{\ell(r)} R_{\theta_2(r)}$ avec $r \mapsto \ell(r)$ impaire. Un calcul simple montre alors qu'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que pour tout $r > 0$, les trois nombres

$$|\ell(r) - \frac{r}{2} + \log\frac{4}{3}|, \ |\theta_1(r)| \text{ et } |\theta_2(r)| \text{ sont inférieurs à } Ce^{-\frac{r}{4}}. \tag{5}$$

[7] On prendra garde au fait que R_θ et a_t n'ont pas le même axe et ne commutent donc pas en général.

DÉFINITION 4.5. — *À tout triplet* $A = (A_k)_{k=0,1,2} \in \Gamma^3$ *on associe la représentation* $\rho_A : \pi_1(\Pi) \to \Gamma$ *donnée par les formules :*

$$\rho_A(c_n) = A_{n-1}A_n^{-1} \quad \textit{pour } n = 1, 2, 3.$$

L'image de $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\rho_A(c_1), \rho_A(c_2), \rho_A(c_3))$ dans $\widehat{\mathscr{P}}$ est uniquement déterminée par la classe de A dans le quotient $\Gamma\backslash\Gamma^3$.

DÉFINITION 4.6. — *Soit dn la mesure de comptage sur* Γ^3. *On note* $\widehat{\beta}_{\varepsilon,r}$ *la mesure sur* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \Gamma^3$ *définie par*

$$\prod_{k\in\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} a_{\varepsilon,r/2}(x_{(-k,-r)}, A_k y_{(k,r)})\, d\nu(x) \otimes d\nu(y) \otimes dn(A).$$

La mesure $\widehat{\beta}_{\varepsilon,r}$ est Γ-invariante à gauche (pour l'action diagonale) et non triviale d'après la proposition 4.3. Elle induit donc une mesure non nulle $\beta_{\varepsilon,r}$ sur le quotient $\Gamma\backslash(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \Gamma^3)$. On note

$$\Phi : \Gamma\backslash(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \Gamma^3) \to \widehat{\mathscr{P}}$$

l'application qui à la classe de (x, y, A) associe $[\rho_A]$.

PROPOSITION 4.7. — *Il existe une constante* $D > 0$ *telle que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un réel* r_ε *tel que pour tout* $r \geq r_\varepsilon$ *la mesure* $\Phi_*\beta_{\varepsilon,r}$ *sur* $\widehat{\mathscr{P}}$ *est supportée dans l'ensemble des futals* $(2r - 2\log\frac{4}{3}, D\varepsilon)$*-plats.*

Démonstration. — Soit (x, y, A) dans le support de $\widehat{\beta}_{\varepsilon,r}$. Il s'agit de calculer les demi-longueurs complexes des éléments $\gamma_n = \rho_A(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$. Considérons le cas $n = 1$. Puisque $a_{\varepsilon,r/2}(x_{(0,-r)}, A_0 y_{(0,r)})$ est non nul, il existe $g_0 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tel que $d(x_{(0,-r)}, g_0 a_{r/2})$ et $d(A_0 y_{(0,r)}, g_0)$ soient inférieurs à $\varepsilon/2$. Il existe donc des éléments $g_\varepsilon^{(1)}$ et $g_\varepsilon^{(2)}$ dans la boule de rayon $\varepsilon/2$ autour de l'identité dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tels que $x_{(0,-r)}g_\varepsilon^{(1)} = g_0 a_{r/2}$ et $g_0 g_\varepsilon^{(2)} = A_0 y_{(0,r)}$; on a alors :

$$x_{(0,-r)}g_\varepsilon^{(1)}a_{-r/2}g_\varepsilon^{(2)} = A_0 y_{(0,r)}. \tag{6}$$

De la même manière, puisque $a_{\varepsilon,r/2}(x_{(2,-r)}, A_1 y_{(1,r)})$ est non nul, il existe des éléments $g_\varepsilon^{(3)}$ et $g_\varepsilon^{(4)}$ dans la boule de rayon $\varepsilon/2$ autour de l'identité dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tels que

$$A_1 y_{(1,r)}g_\varepsilon^{(3)}a_{r/2}g_\varepsilon^{(4)} = x_{(2,-r)}. \tag{7}$$

En utilisant tour à tour que $x_{(0,-r)} = x_{(2,-r)}R_{\theta_1(-r)}R_\pi a_{-\ell(r)}R_{\theta_2(-r)}$ et que $y_{(1,r)} = y_{(0,r)}R_{\theta_1(r)}R_\pi a_{\ell(r)}R_{\theta_2(r)}$, on déduit de (6) et (7) que

$$A_0A_1^{-1}g_0 = g_0(g_\varepsilon^{(2)}R_{\theta_1(r)}R_\pi a_{\ell(r)}R_{\theta_2(r)}g_\varepsilon^{(3)}a_{r/2}g_\varepsilon^{(4)}R_{\theta_1(-r)}R_\pi a_{-\ell(r)}R_{\theta_2(-r)}g_\varepsilon^{(1)}a_{-r/2}).$$

Puisque $R_\pi a_t = a_{-t}R_\pi$, comme la distance d est K-invariante à gauche et à droite et puisque pour r grand les $R_{\theta_i(r)}$ sont proches de l'identité, on obtient qu'il existe

un réel strictement positif r_ε tel que pour tout $r \geq r_\varepsilon$ il existe des éléments $h_\varepsilon^{(i)}$ pour $i = 1, \ldots, 4$, dans la boule de rayon ε autour de l'identité dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, tels que

$$\gamma_1 g_0 = g_0(h_\varepsilon^{(1)} a_{-\ell(r)} h_\varepsilon^{(2)} a_{-r/2} h_\varepsilon^{(3)} a_{-\ell(r)} h_\varepsilon^{(4)} a_{-r/2}).$$

Mais un calcul élémentaire, utilisant (5), implique que, quitte à augmenter r_ε, on peut supposer que pour $r \geq r_\varepsilon$, la matrice

$$h_\varepsilon^{(1)} a_{-\ell(r)} h_\varepsilon^{(2)} a_{-r/2} h_\varepsilon^{(3)} a_{-\ell(r)} h_\varepsilon^{(4)} a_{-r/2}$$

est de la forme

$$\begin{pmatrix} e^{-2r+2\log(4/3)} + O(\varepsilon) & e^{2r-2\log(4/3)} O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & e^{2r-2\log(4/3)}(1 + O(\varepsilon)) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

La trace de γ_1 est donc égale à $e^{2r-2\log(4/3)}(1 + O(\varepsilon))$. En raisonnant de la même manière avec γ_2 et γ_3 (et en augmentant au besoin r_ε), on conclut qu'il existe une constante universelle D telle que pour $r \geq r_\varepsilon$ les longueurs complexes de la représentation ρ_A vérifient, pour tout $n = 1, 2, 3$,

$$\left|\ell_n(\rho_A) - 2r + 2\log\frac{4}{3}\right| \leq D\varepsilon.$$

En particulier les éléments $\rho_A(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$ sont loxodromiques. Enfin, puisque la matrice $a_{-2r+2\log(4/3)}$ est réelle, un argument de continuité en ε montre que $\sigma_n(\rho_A) = \frac{1}{2}\ell_n(\rho_A)$ pour $n = 1, 2, 3$. La classe de conjugaison de la représentation ρ_A représente donc un futal $(2r - 2\log\frac{4}{3}, D\varepsilon)$-plat. □

Remarque 4.8. — 1. Il découle des propositions 4.3 et 4.7 que pour R suffisamment grand il existe bien des futals (R, ε)-plats. Ce point crucial est dû à Lewis Bowen [8] qui était lui aussi motivé par la conjecture des sous-groupes de surfaces.

2. La démonstration montre plus[8] : un calcul simple implique en effet que, pour r suffisamment grand, les points fixes $z_\pm \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ de la matrice (8) vérifient $|z_-| = O(\varepsilon)$ et $|z_+| \geq \frac{1}{O(\varepsilon)}$. Cela montre que — quitte à augmenter les constantes D et r_ε — on peut supposer que pour tout $r \geq r_\varepsilon$ l'axe de la matrice (8) reste à distance au plus $D\varepsilon$ du point base p_0 et donc que l'axe de $\gamma_1 \in \Gamma$ est à distance $\leq D\varepsilon$ de $g_0(p_0)$. Par symétrie on en déduit que l'on peut supposer que l'axe de γ_1 est à distance $\leq D\varepsilon$ des points $x_{(0,-r)} \cdot p_0$, $A_0 y_{(0,r)} \cdot p_0$, $x_{(2,-r)} \cdot p_0$ et $A_1 y_{(1,r)} \cdot p_0$ de $\mathbf{H}_3$.

DÉFINITION 4.9. — *Étant donnés un réel $\varepsilon > 0$ et un réel $R > 0$, on pose*

$$\mu_{\varepsilon,R} = \Phi_* \beta_{D^{-1}\varepsilon,\, R/2+\log\frac{4}{3}}.$$

Et on note $R_\varepsilon = 2r_\varepsilon - 2\log\frac{4}{3}$.

[8] C'est d'ailleurs uniquement pour cette raison que l'on a commencé par transporter parallèlement les repères associés à x et y pendant un temps $r/4$, voir la proposition 4.13.

Il découle de la proposition 4.7 que pour $R \geq R_\varepsilon$, la mesure $\mu_{\varepsilon,R} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ — qui est non nulle d'après la proposition 4.3 — est supportée sur les futals (R,ε)-plats. Pour démontrer le théorème 2.14, il reste à démontrer la proposition suivante ; c'est l'objet des paragraphes qui suivent.

PROPOSITION 4.10. — *Il existe une constante strictement positive D' telle que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, la mesure $p_*\mu_{\varepsilon,R}$ sur $\mathbf{T}_M$ est $D'Re^{-qR}$-équidistribuée.*

4.4. L'application ϖ

Soient ε et r deux réels strictement positifs.

Soient $\gamma \in \Gamma$ et $Z = Z_\gamma$ son centralisateur dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Un couple $(x,y) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})^2$ détermine une géodésique orientée dans $\mathbf{H}_3$ allant de $yR_{\frac{4i\pi}{3}}(\infty) \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ à $xR_{\frac{2i\pi}{3}}(0) \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.[9] Si l'axe de translation de γ n'intersecte pas cette géodésique la perpendiculaire commune détermine un élément du fibré unitaire normal à l'axe de γ et donc, comme au §2.3, un repère de $\mathbf{H}_3$ au-dessus de l'axe de γ. On écrit $\varpi_\gamma(x,y)\cdot(p_0,\vec{u}_0,\vec{n}_0,\vec{u}_0\wedge\vec{n}_0)$, avec $\varpi_\gamma(x,y) \in Z$, ce repère. En tant que groupe, Z opère sur lui-même et diagonalement (à gauche) sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})^2$. Si $z \in Z$, on a $\varpi_\gamma(zx,xy) = z\varpi_\gamma(x,y)$. L'application ϖ_γ passe donc au quotient par le groupe $\langle\gamma\rangle$ (dont l'action commute à celle de Z) en une application Z-équivariante, définie presque partout,

$$\varpi_\gamma : \langle\gamma\rangle\backslash(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})) \to \widehat{\mathbf{T}}_\gamma = \langle\gamma\rangle\backslash Z.$$

Noter que si $h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, la conjugaison par h identifie $\widehat{\mathbf{T}}_\gamma$ et $\widehat{\mathbf{T}}_{h\gamma h^{-1}}$ et on a :

$$\varpi_{h\gamma h^{-1}}(hx,hy) = h\varpi_\gamma(x,y)h^{-1}. \tag{9}$$

DÉFINITION 4.11. — *On note $\alpha_\gamma = \alpha_{\varepsilon,r,\gamma}$ la mesure sur $\langle\gamma\rangle\backslash(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$ induite par la mesure γ-invariante (à gauche)*

$$a_{\varepsilon,r/2}(x_{(0,-r)},y_{(0,r)})a_{\varepsilon,r/2}(\gamma x_{(2,-r)},y_{(1,r)})d\nu(x)\otimes d\nu(y).$$

Noter que la mesure α_γ est Z-invariante de sorte que

$$(\varpi_\gamma)_*\alpha_\gamma = \Lambda_{(\varpi_\gamma)_*\alpha_\gamma} = \left[\frac{(\varpi_\gamma)_*\alpha_\gamma(\widehat{\mathbf{T}}_\gamma)}{\Lambda(\widehat{\mathbf{T}}_\gamma)}\right]\Lambda, \tag{10}$$

où Λ est la mesure de Lebesgue sur le tore $\widehat{\mathbf{T}}_\gamma$.

[9] Noter que $yR_{\frac{4i\pi}{3}}(\infty) = \lim_{r\to+\infty} y_{(2,r)}$ et $xR_{\frac{2i\pi}{3}}(0) = \lim_{r\to+\infty} x_{(1,-r)}$.

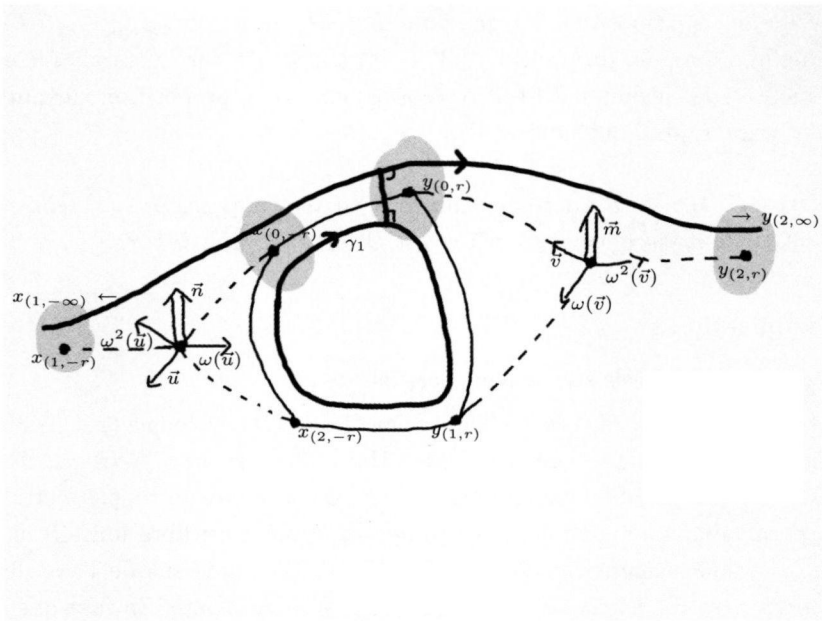

FIGURE 2. Pied abstrait

DÉFINITION 4.12. — *Soit*

$$\varpi : \Gamma\backslash(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \Gamma^3) \to \mathbf{T}_M$$

l'application qui à la classe de (x, y, A) associe l'image de $\varpi_{\gamma_1}(x, A_0 y)$ dans le tore abstrait $\mathbf{T}_g$ où g est la géodésique fermée de M associée à $\gamma_1 = A_0 A_1^{-1}$; voir figure 2.

Noter que l'application ϖ est bien définie : changer (x, y, A) en $\gamma \cdot (x, y, A)$ revient à changer $\varpi_{\gamma_1}(x, A_0 y)$ en $\varpi_{\gamma\gamma_1\gamma^{-1}}(\gamma x, \gamma A_0 y)$ qui — en vertu de (9) — a la même image dans le tore euclidien $\mathbf{T}_g$.

L'application qui à un futal marqué associe son pied induit également une application

$$p \circ \Phi : \Gamma\backslash(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \Gamma^3) \to \mathbf{T}_M.$$

PROPOSITION 4.13. — *Il existe des constantes $c, K > 0$ telles que pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, il existe un réel r'_ε tel que pour tout $r \geq r'_\varepsilon$ et pour tout élément $[x, y, A]$ dans le support de $\beta_{\varepsilon,r}$, on a :*

$$d(p \circ \Phi(x, y, A), \varpi(x, y, A)) \leq K e^{-cr}.$$

Démonstration. — La proposition résulte du fait général que dans un espace hyperbolique, pour tout $M > 0$, il existe des constantes $c, K > 0$ telles que deux géodésiques qui restent à distance $\leq M$ pendant un temps r sont Ke^{-cr}-proches au temps $r/2$;

voir figure 2. On renvoie à [**22**, Lem. 4.2] pour plus de détails et des constantes explicites. □

COROLLAIRE 4.14. — *Les mesures* $(p\circ\Phi)_*\beta_{\varepsilon,r}$ *et* $\varpi_*\beta_{\varepsilon,r}$ *sont* Ke^{-cr}*-proches.*

4.5. Démonstration de la proposition 4.10

Soit $\gamma\in\Gamma$. On note C_γ le sous-ensemble de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\times\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\times\Gamma^3$ constitué des triplets (x,y,A) tels que $A_0A_1^{-1}=\gamma$. Soit $\chi : C_\gamma\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\times\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ l'application $(x,y,A)\mapsto(x,A_0^{-1}y)$. Le lemme suivant découle de la définition de $A_{\varepsilon,r/2}$.

LEMME 4.15. — *On a :*

$$\chi_*(\widehat{\beta}_{\varepsilon,r}|_{C_\gamma})$$
$$= A_{\varepsilon,r/2}(x_{(1,-r)},y_{(2,r)})a_{\varepsilon,r/2}(x_{(0,-r)},y_{(0,r)})a_{\varepsilon,r/2}(\gamma x_{(2,-r)},y_{(1,r)})d\nu(x)\otimes d\nu(y).$$

La mesure $\chi_*(\widehat{\beta}_{\varepsilon,r}|_{C_\gamma})$ sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})^2$ est γ-invariante ; on note β_γ la mesure induite sur le quotient $\langle\gamma\rangle\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})^2$. On peut maintenant pousser — à l'aide de l'application ϖ_γ — les mesures α_γ et β_γ en des mesures sur le tore $\widehat{\mathbf{T}}_\gamma$. D'après la définition de α_γ, le lemme 4.15 et la proposition 4.3, on a :

$$(1-Ce^{-qr})(\varpi_\gamma)_*\alpha_\gamma\le(\varpi_\gamma)_*\beta_\gamma\le(1+Ce^{-qr})(\varpi_\gamma)_*\alpha_\gamma.$$

Mais, poussée sur le tore abstrait $\mathbf{T}_g$, où g est la géodésique fermée de M associée à γ, les mesures $(\varpi_\gamma)_*\beta_\gamma$ et $[\varpi_*\beta_{\varepsilon,r}]\,|_{\mathbf{T}_g}$ coïncident. Il découle alors de (10) que l'on a :

$$(1-Ce^{-qr})\Lambda_{(\varpi_\gamma)_*\alpha_\gamma}\le[\varpi_*\beta_{\varepsilon,r}]\,|_{\mathbf{T}_g}\le(1+Ce^{-qr})\Lambda_{(\varpi_\gamma)_*\alpha_\gamma}. \tag{11}$$

Le lemme suivant est élémentaire ; voir [**22**, Lem. 3.1].

LEMME 4.16. — *Soient* $a,b\in\mathbf{C}$ *tels que* $\mathbf{T}=\mathbf{C}/(a\mathbf{Z}+ib\mathbf{Z})$ *soit un tore. Soient* f *une fonction continue et positive sur* $\mathbf{T}$ *et* $\delta\in\left]0,\frac{1}{3}\right[$ *tels que*

$$(1-\delta)\Lambda_{f\Lambda}\le f\Lambda\le(1+\delta)\Lambda_{f\Lambda}.$$

Alors, la mesure $f\Lambda$ *est* $4\delta(|a|+|b|)$*-équidistribuée.*

D'après la proposition 4.7, un tore $\mathbf{T}_g=(\mathbf{R}_+^*+i\mathbf{R})/(\sigma\mathbf{Z}+2i\pi\mathbf{Z})$ qui intersecte non trivialement le support de $\varpi_*\beta_{\varepsilon,r}$ vérifie $|\sigma|\le 2r$. Il découle donc du lemme 4.16 et de l'équation (11) que la mesure $\varpi_*\beta_{\varepsilon,r}$ est $8rCe^{-qr}$-équidistribuée. Le corollaire 4.14 implique alors que pour r sufisamment grand (et en supposant $q\le c$) les mesures $(p\circ\Phi)_*\beta_{\varepsilon,r}$ et $\Lambda_{(p\circ\Phi)_*\beta_{\varepsilon,r}}$ sont $9rCe^{-qr}$-proches. Puisque — compte tenu de la définition 4.9 — on a $p_*\mu_{\varepsilon,R}=(p\circ\Phi)_*\beta_{D^{-1}\varepsilon,R/2+\log\frac{4}{3}}$, cela suffit à démontrer la proposition 4.10.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.16

Si ε est suffisamment petit, une représentation (R,ε)-plate est la monodromie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface. Si $\varepsilon = 0$ cette structure est en fait une structure hyperbolique réelle ; nous dirons alors que c'est une *surface de type* R.

5.1. Géométrie des surfaces de type R

Une surface S de type R est munie d'une décomposition en pantalons. On appelle *revers* de cette décomposition les courbes simples fermées géodésiques qui découpent S en pantalons. Chaque revers est de longueur R et chaque paramètre de décalage est égal à 1.

Dans un pantalon hyperbolique dont toutes les composantes de bord sont de longueur R, la distance entre deux composantes de bord est égale à $2e^{-R/4}+O(e^{-3R/4})$, lorsque R tend vers l'infini. Il découle donc de la *formule du pentagone* [**10**, Thm. 2.3.4] que, pour R suffisamment grand, une courbe de longueur $\leq R/5$ joignant deux composantes de bord est homotope, relativement au bord, à une géodésique minimisante entre ces deux composantes de bord.

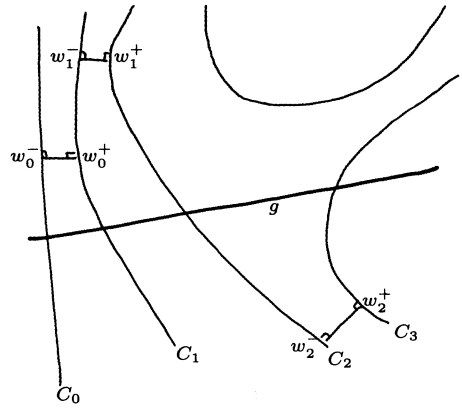

FIGURE 3. Le segment g et les C_i

Soient g un segment géodésique de $\mathbf{H}^2$ et $C_0,\dots,C_k$ l'ensemble ordonné des géodésiques (bi-infinies) de $\mathbf{H}^2$ qui se projettent sur les revers de S et qui intersectent g, voir la figure 3. Alors deux géodésiques adjacentes C_i et C_{i+1} sont soit *proches*, à distance $\approx 2e^{-R/4}$, soit *éloignées*, à distance $> R/5$. Pour $i=0,\dots,k$ on note z_i le point d'intersection de g et C_i et w_i^+ le pied dans C_{i+1} de la perpendiculaire commune à C_i et C_{i+1}.

Dans le plan hyperbolique, les géodésiques s'éloignent à vitesse linéaire (voir [**10**, Thm. 2.3.1]) : pour $i = 0, \dots, k-1$, on a

$$d(C_i, C_{i+1}) e^{d(w_i^+, z_{i+1})} \leq e^{d(z_{i+1}, C_i)}.$$

Le fait que le paramètre de décalage le long de chaque revers soit égal à 1 implique donc que pour R suffisamment grand si, pour $i = 1, \dots, k$, les géodésiques C_{i-1} et C_i sont proches et $d(z_{i-1}, z_i) \leq 1$ alors $k \leq R$. En distinguant les sous-segments de g qui correspondent à une suite $(z_i)_{i=0,\dots k}$ telle que $d(z_{i-1}, z_i) \leq 1$ et les « sauts » correspondants aux sous-segments complémentaires, on obtient la proposition suivante, voir [**22**, Lem. 2.3].

PROPOSITION 5.1. — *Il existe un réel R_0 et une constante C tels que pour tout $R \geq R_0$, tout segment géodésique de longueur ℓ sur une surface S de type R coupe au plus $CR\ell$ fois les revers.*

5.2. Démonstration du théorème 2.16

Une représentation (R, ε)-plate ρ est la monodromie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur une surface S munie d'une décomposition en pantalons. On munit S de la structure hyperbolique de type R associée à cette décomposition. La surface S est alors uniformisée par le plan hyperbolique $\mathbf{H}_2$ et on note $F : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_3$ l'application développante de la structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur S associée à ρ. Puisque F est ρ-équivariante, pour démontrer le théorème 2.16, il suffit de montrer qu'il existe des réels strictement positifs ε_0 et R_0 tels que si $R \geq R_0$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ alors F envoie toute géodésique de $\mathbf{H}_2$ sur une courbe bi-infinie dans $\mathbf{H}_3$.

Mais l'application F envoie les géodésiques C_i de $\mathbf{H}_2$ au-dessus des revers de la surface S (de type R) sur des géodésiques de $\mathbf{H}_3$. Il suffit donc de montrer que si g est une géodésique de $\mathbf{H}_2$ transversale aux C_i alors $F(g)$ est une courbe bi-infinie de $\mathbf{H}_3$. Comme dans la démonstration de la proposition 5.1, on découpe g en deux types de sous-segments : ceux qui rencontrent une suite de C_i proches et les « sauts ». L'image d'un saut est un long segment quasi-géodésique, dont la constante de quasi-géodésie ne dépend que de ε et pas de R. La difficulté consiste donc à contrôler les segments géodésiques de C qui correspondent à une suite de C_i proches. Mais d'après la proposition 5.1, une telle suite contient au plus R éléments alors que le long des revers l'angle de décalage est $\leq \varepsilon/R$. L'image d'un tel segment est donc là encore un segment quasi-géodésique, dont la constante de quasi-géodésie ne dépend que de ε et pas de R. Grâce à l'hyperbolicité de $\mathbf{H}_3$, on conclut que la courbe $F(g)$ est quasi-géodésique ; elle est en particulier bi-infinie.

Remarque 5.2. — Les détails de cette « démonstration » sont un peu laborieux à écrire. Noter néanmoins que le mélange exponentiel permet en fait de construire des

surfaces (R, e^{-dR})-plates pour une constante $d = d(M) > 0$. Il est alors plus facile de faire fonctionner l'approche décrite ci-dessus ; Dragomir Sarik **[38]** réalise d'ailleurs toute surface $(R, \varepsilon/R)$-plate comme surface plissée.

Dans **[22]**, Kahn et Markovic démontrent le théorème 2.16 à l'aide d'une formule, due à Caroline Series **[35]**, de variation de la distance $d(C_0, C_k)$ le long d'une déformation quasi-fuchsienne $t \mapsto \rho_t$. Ils montrent que le long d'une déformation (R, ε)-plate la dérivée $d(C_0, C_k)'$ est un $O(\varepsilon)$. Cela leur permet de montrer que, quitte à diminuer ε_0, on peut supposer que l'image du bord $\partial\mathbf{H}_2$, par l'application induite $\partial F : \partial\mathbf{H}_2 \to \partial\mathbf{H}_3$, est arbitrairement proche d'un vrai cercle dans $\partial\mathbf{H}_3$. Enfin puisque l'on peut démarrer la construction à partir de deux repères appartenant à un plan arbitraire de $\mathbf{H}_3$, la démonstration du théorème 2.14 implique en fait le théorème suivant.

THÉORÈME 5.3. — *Soit $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}_3$ une variété hyperbolique uniformisée de dimension 3. Pour tout cercle C dans $\partial\mathbf{H}_3$, il existe une suite de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surfaces $(F_n : \widetilde{S}_n \to \mathbf{H}_3)_{n\geq 0}$ dans M telle que $(\partial F_n(\widetilde{S}_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers C, pour la distance de Hausdorff dans $\partial\mathbf{H}_3$.*

6. APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATIONS

6.1. Du théorème 1.1 à la conjecture VH

Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. D'après le théorème 1.1, il existe une surface S de genre $g \geq 2$ et une immersion π_1-injective $f : S \to M$.

Peter Scott **[34]** donne un critère algébrique d'existence d'un revêtement fini de M auquel f se relève en un plongement.

DÉFINITION 6.1. — *Soit G un groupe de type fini. Un sous-ensemble S de G est* séparable *si S est fermé dans la topologie profinie de G, c'est-à-dire si S est une intersection de classes à gauche de sous-groupes d'indice fini de G.*

PROPOSITION 6.2. — *Supposons $f_*(\pi_1 S)$ séparable dans $\pi_1 M$. Alors f se relève à un revêtement fini de M en un plongement, ou en une application isotope à un plongement.*

Si de plus $f_*(\pi_1 S)$ est quasi-convexe dans $\pi_1 M$, alors il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M qui contient deux élévations plongées et disjointes de $f(S)$ dont la réunion est non séparante, voir par exemple **[5**, Théorème 2**]**. En particulier le groupe $\pi_1(\widehat{M})$ se surjecte sur un groupe libre de rang 2. En plus des conjectures mentionnées en

introduction, il convient donc d'ajouter l'énoncé suivant[10] qui fait le lien entre la conjecture des sous-groupes de surfaces et la conjecture VH.

(7) Tout sous-groupe de type fini dans $\pi_1 M$ est séparable.

Scott [**34**] puis Ian Agol, Darren Long et Alan Reid [**3**] montrent qu'un sous-groupe quasi-convexe d'un groupe de réflexions dans un polyèdre hyperbolique à angles droits est séparable. Ce résultat est étendu au cas des sous-groupes quasi-convexes d'un groupe de Coxeter — ou d'un groupe d'Artin — à angles droits abstrait par Haglund [**17**]. Depuis une quinzaine d'années, Dani Wise met en œuvre un vaste programme visant à démontrer la conjecture (7) et plus généralement à démontrer la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes dans certains groupes G hyperboliques (au sens de Gromov), à l'aide de la méthode de Scott. Un groupe de Coxeter — ou d'Artin — à angles droits abstrait possède une réalisation géométrique qui est un complexe cubique à courbure négative. La première étape du programme de Wise passe alors par la « cubulation » du groupe G. On renvoie à [**9**] pour une introduction aux complexes cubiques et à la notion de courbure négative dans ce contexte.

6.2. Cubulation des variétés hyperboliques ; groupes spéciaux

Dans [**6**] avec Wise, et indépendamment Guillaume Dufour dans sa thèse [**15**], on déduit du théorème 5.3 et des travaux de Michah Sageev [**33**] le résultat suivant.

THÉORÈME 6.3. — *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. Alors $\pi_1 M$ opère librement, proprement avec quotient compact sur un complexe cubique $CAT(0)$ localement fini.*

DÉFINITION 6.4. — *Un complexe cubique C connexe de courbure négative est* spécial *s'il existe une isométrie locale de C dans le complexe cubique associé à un groupe d'Artin à angles droits. On dit alors que $\pi_1 C$ opère* spécialement *sur tout revêtement universel de C.*

La notion de complexe cubique spécial est due à Frédéric Haglund et Dani Wise, voir [**18**] où elle est définie en termes de configurations interdites pour les hyperplans immergés. Haglund et Wise démontrent notamment que si C est un complexe cubique spécial compact et si $\pi_1 C$ est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, alors tout sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1 C$ est séparable.

Ian Agol [**1**] montre par ailleurs que si M est une variété de dimension 3 dont le groupe fondamental est isomorphe au groupe fondamental d'un complexe cubique spécial alors M possède un revêtement fini qui fibre sur le cercle.

[10] Énoncé également conjecturé dans [**37**].

Dans [18] puis [39] Haglund et Wise démontrent des critères puissants pour qu'un complexe cubique CAT(0) possède un revêtement fini spécial. Tout récemment, en se reposant sur ces travaux, Agol [2] a annoncé la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 6.5. — *Soit G un groupe hyperbolique au sens de Gromov qui opère librement, proprement avec quotient compact sur un complexe cubique CAT(0) localement fini C. Alors G contient un sous-groupe d'indice fini qui opère spécialement sur C.*

COROLLAIRE 6.6. — *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. Alors M vérifie les conjectures* (2)–(7).

6.3. Dénombrement des surfaces incompressibles

Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. De même que l'argument ergodique de Margulis lui a permis de retrouver (et d'étendre en courbure variable) le « théorème des géodésiques premières » sur le comptage des géodésiques dans une surface hyperbolique, Kahn et Markovic [23] développent leurs méthodes ainsi que des résultats antérieurs de Joseph Masters [30] pour compter le nombre $c(M,g)$ de classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1 M$ isomorphes au groupe fondamental d'une surface de genre g.

THÉORÈME 6.7. — *On a :*

$$\lim_{g\to+\infty} \frac{\log c(M,g)}{2g\log g} = 1.$$

6.4. Généralisation à tous les espaces symétriques et conjecture d'Ehrenpreis

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre trivial et sans facteur compact, K un sous-groupe compact maximal de G et $X = G/K$ l'espace symétrique associé.

CONJECTURE 6.8. — *Soit Γ un réseau uniforme dans G. Alors Γ contient un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins* 2.

Il est tentant de chercher à étendre la méthode de Kahn et Markovic à ce cadre et plus généralement, partant d'un plongement $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \subset G$ correspondant à un plongement totalement géodésique de $\mathbf{H}_2$ dans X, de chercher à construire des surfaces immergées $S \to \Gamma\backslash X$ dont un relevé $\widetilde{S} \to X$ soit arbitrairement proche de l'image de $\mathbf{H}_2$. Si X est de rang réel égal à 1, la démonstration du théorème 2.16 s'étend naturellement. Le rang supérieur semble plus difficile. En ce qui concerne le théorème 2.14, notons qu'un aspect crucial de sa démonstration est le fait que le centralisateur d'une isométrie hyperbolique possède un sous-groupe compact *connexe* qui contient

la rotation d'angle π autour de l'axe de translation ; cela permet en effet de s'assurer que les futals (R, ε)-plats sont équidistribués autour d'une géodésique donnée.

Dans **[24]**, Kahn et Markovic considèrent cependant le cas où $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ est plongé diagonalement dans $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ et Γ est un produit de deux groupes fuchsiens. Ils démontrent le théorème suivant initialement conjecturé par Leon Ehrenpreis **[16]**.

THÉORÈME 6.9. — *Soient S et T deux surfaces de Riemann compactes connexes de genre au moins 2. Pour tout $K > 1$, il existe des revêtements finis $\widehat{S}$ de S et $\widehat{T}$ de T, et un homéomorphisme $f : \widehat{S} \to \widehat{T}$ tel que f soit K-quasi-conforme, c'est-à-dire que pour tout $x \in \widehat{S}$, on a :*

$$H_f(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\sup\{d(f(z), f(x)) \ : \ d(x,z) = r\}}{\inf\{d(f(z), f(x)) \ : \ d(x,z) = r\}} \leq K.$$

Ils montrent plus précisément qu'étant donnés une surface hyperbolique S et un réel strictement positif ε, pour tout réel R suffisamment grand, il existe une surface hyperbolique (réelle) (R, ε)-plate immergée dans S. La démonstration est dans un premier temps identique à celle du théorème 2.14 mais cette fois le fibré normal à une géodésique fermée dans S n'est pas connexe. Il se peut donc qu'il y ait plus de futals immergés d'un côté de la géodésique que de l'autre. Il s'agit alors de corriger ce défaut par un poids dont l'existence est le cœur des arguments de **[24]**, voir également **[25]** pour un premier résultat sur cette question.

APPENDICE : MÉLANGE EXPONENTIEL DU FLOT DES REPÈRES

Dans cet appendice, G est un groupe de Lie simple réel, connexe, non compact et de centre trivial dont on fixe une décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ et une décomposition de Cartan compatible $G = KA^+K$. On note $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N.

DÉFINITION 6.10. — (1) *Une* représentation unitaire *π de G dans un espace de Hilbert (séparable) $\mathcal{H}_\pi$ est un morphisme $G \to U(\mathcal{H}_\pi)$ tel que pour tout $v \in \mathcal{H}_\pi$ l'application $G \to \mathcal{H}_\pi$; $g \mapsto \pi(g)v$ soit continue. Si cette application est lisse on dit que v est un* vecteur C^∞ *de π ; on note $\mathcal{H}_\pi^\infty$ l'ensemble des vecteurs C^∞ de π.*

(2) *Étant donnés deux vecteurs $v, w \in \mathcal{H}_\pi$, on appelle* coefficient *de π la fonction continue $c_{v,w} : G \to \mathbf{C}$ définie par $c_{v,w} : g \mapsto \langle \pi(g)v, w \rangle$. On dit que le coefficient $c_{v,w}$ est K-*fini *si les espaces vectoriels engendrés par respectivement $\pi(K) \cdot v$ et $\pi(K) \cdot w$ sont de dimension finie.*

(3) *On note $p(\pi)$ la borne inférieure de tous les $p \geq 2$ tels que les coefficients K-finis de π soient dans $L^p(G)$.*

(4) *Une représentation unitaire σ est* faiblement contenue *dans π si tout coefficient de σ est limite uniforme sur tout compact de coefficients de π. On dit que π a un* trou spectral *si elle ne contient pas faiblement la représentation triviale de G.*

Le théorème de Howe-Moore affirme que si π est une représentation unitaire de G sans vecteurs invariants alors les coefficients $g \mapsto c_{v,w}(g)$ de π tendent vers 0 lorsque g tend vers l'infini dans G. Michael Cowling **[13]** montre en fait que si G a la propriété (T) il existe un entier $p = p(G) < +\infty$ tel que si π est une représentation unitaire de G sans vecteurs invariants alors $p(\pi) \leq p$, voir aussi **[32**, §7]. Si G est localement isomorphe à $\mathrm{SO}(n,1)$ ou $\mathrm{SU}(n,1)$, ce n'est plus vrai mais la classification des représentations irréductibles unitaires de ces groupes **[21, 27]** implique que si π est une représentation unitaire de G qui a un trou spectral, alors $p(\pi) < +\infty$.[(11)] Le fait suivant est bien connu ; on peut en trouver une démonstration dans **[4**, Lemma 3].

PROPOSITION 6.11. — *Soit Γ un réseau dans G. La représentation régulière droite ρ_Γ^0 de G dans le sous-espace $L_0^2(\Gamma\backslash G)$ de $L^2(\Gamma\backslash G)$ orthogonal aux fonctions constantes a un trou spectral.*

Étant donné un élément $g = nak \in G$, on pose $H(g) = a$. On appelle *fonction d'Harish-Chandra* la fonction $\Xi = \Xi_G : G \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Xi(g) = \int_K \rho(H(kg^{-1}))^{-1/2} dk \quad \text{où } \rho(a) = \det{}_{\mathfrak{n}}(\mathrm{Ad}(a^{-1})).$$

La fonction Ξ décroît exponentiellement vite le long de A^+ : modulo un facteur logarithmique, on a $\Xi(a) \asymp \rho(a)^{-1/2}$. Puisque la mesure de Haar dg est égale à $\rho(a)dndadk$, on en déduit en particulier que $\Xi \in L^{2+\varepsilon}(G)$ pour tout réel $\varepsilon > 0$.

Exemple 6.12. — Si $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, on a, pour les choix usuels de groupes K, A, N,

$$\begin{aligned}\Xi(a_r) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (e^{-r}\cos^2\theta + e^r \sin^2\theta)^{-1} \sin(2\theta) d\theta \\ &= \frac{r}{\pi \sinh r}.\end{aligned}$$

Notons d la dimension de K et fixons une base $\mathcal{B}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K. Étant donnés une représentation unitaire π et un vecteur $v \in \mathcal{H}_\pi^\infty$, on pose

$$S(v) = \sum_{\mathrm{ord}(D) \leq d+1} ||\pi(D)v||,$$

où D parcourt l'ensemble des monômes en les éléments de $\mathcal{B}$ de degré $\leq d+1$ et, si $X_1, \ldots, X_r$ sont des éléments de $\mathcal{B}$, on a $\pi(X_1 \cdots X_r) = \pi(X_1) \cdots \pi(X_r)$ et chaque $\pi(X_i)$ opère par dérivation.

(11) Toute la puissance de la classification des représentations irréductibles unitaires n'est pas utile ici. Il suffit de considérer la partie de π formée des représentations sphériques.

La proposition suivante — qui est essentiellement due à Michael Cowling, Uffe Haagerup et Roger Howe [14] — appliquée à la représentation ρ_Γ^0 implique finalement le théorème 4.1.

PROPOSITION 6.13. — *Soit π une représentation unitaire de G telle que $p(\pi) \leq 2k$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. Il existe une constante $C = C(G,k)$ telle que pour tous $v, w \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et pour tout $g \in G$, on a :*

$$|\langle \pi(g)v, w\rangle| \leq CS(v)S(w)\Xi^{1/k}(g). \tag{12}$$

Démonstration. — Quitte à remplacer π par le produit tensoriel $\pi^{\otimes k}$ on peut supposer que $k = 1$; voir [14, p. 108]. Il découle alors de [14, Thm. 1] que π est faiblement contenue dans la représentation régulière (droite) $L^2(G)$. On se ramène alors facilement à démontrer la proposition dans le seul cas où π est la représentation régulière de G (et $k = 1$) ; voir la démonstration de [14, Thm. 2] pour plus de détails sur cette dernière réduction.

Soient v et w dans $L^2(G) \cap C^\infty(G)$. Les fonctions $\varphi : x \mapsto \sup_{k\in K} |v(xk)|$ et $\psi : x \mapsto \sup_{k\in K} |w(xk)|$ sont positives, K-invariantes et $|\langle \pi(g)v, w\rangle| \leq \int_G \varphi(xg)\psi(x)dx$. Mais il découle du lemme de Sobolev qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \in G$,

$$\varphi(x)^2 \leq C \sum_{\mathrm{ord}(D)\leq d+1} ||(\pi(D)v)(x\cdot)||^2_{L^2(K)}.$$

En particulier $||\varphi|| \leq \sqrt{C}S(v)$ et de même pour ψ. Il nous reste donc à vérifier que si $\varphi, \psi \in L^2(G)$ sont des fonctions positives, K-invariantes et de norme 1, alors $|\langle \pi(g)\varphi, \psi\rangle| \leq \Xi(g)$. C'est le calcul détaillé p. 106–107 de [14] que nous reprenons ici :

$$\begin{aligned}
|\langle \pi(g)\varphi, \psi\rangle| &= \int_K \left(\int_{NA} \varphi(na)\psi(nakg^{-1})\rho(a)dnda \right) dk \\
&\leq ||\varphi|| \int_K \left(\int_{NA} \psi(naH(kg^{-1}))^2 \rho(a)dnda \right)^{1/2} dk \\
&= ||\varphi|| \cdot ||\psi|| \int_K \rho(H(kg^{-1}))^{-1/2} dk,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(NA)$ et la K-invariance de φ et ψ. □

Remerciements

Un grand merci à Laurent Clozel, Gilles Courtois, Ruben Dashyan, Bertrand Deroin, Olivier Guichard, Antonin Guilloux, Frédéric Haglund, Hélène Eynard-Bontemps, Elisha Falbel, François Labourie, Frédéric Paulin et Maxime Wolff pour leur aide dans l'élaboration de ce texte.

RÉFÉRENCES

[1] I. AGOL – Criteria for virtual fibering, *J. Topol.* **1** (2008), n° 2, p. 269–284.

[2] I. AGOL, D. GROVES & J. MANNING – The virtual Haken conjecture, prépublication arXiv:1204.2810.

[3] I. AGOL, D. D. LONG & A. W. REID – The Bianchi groups are separable on geometrically finite subgroups, *Ann. of Math.* **153** (2001), n° 3, p. 599–621.

[4] M. B. BEKKA – On uniqueness of invariant means, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), n° 2, p. 507–514.

[5] N. BERGERON – Premier nombre de Betti et spectre du laplacien de certaines variétés hyperboliques, *Enseign. Math.* **46** (2000), n^{os} 1-2, p. 109–137.

[6] N. BERGERON & D. T. WISE – A boundary criterion for cubulation, *Amer. J. Math.* **134** (2012), n° 3, p. 843–859.

[7] P. BILLINGSLEY – *Convergence of probability measures*, second éd., Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics, John Wiley & Sons Inc., 1999.

[8] L. BOWEN – Weak forms of the Ehrenpreis conjecture and the surface subgroup conjecture, prépublication arXiv:math/0411662.

[9] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grund. Math. Wiss., vol. 319, Springer, 1999.

[10] P. BUSER – *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, 2010.

[11] D. CALEGARI – Surface subgroups from homology, *Geom. Topol.* **12** (2008), n° 4, p. 1995–2007.

[12] D. COOPER, D. D. LONG & A. W. REID – Essential closed surfaces in bounded 3-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), n° 3, p. 553–563.

[13] M. COWLING – Sur les coefficients des représentations unitaires des groupes de Lie simples, in *Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg 1976–1978), II*, Lecture Notes in Math., vol. 739, Springer, 1979, p. 132–178.

[14] M. COWLING, U. HAAGERUP & R. HOWE – Almost L^2 matrix coefficients, *J. reine angew. Math.* **387** (1988), p. 97–110.

[15] G. DUFOUR – Cubulations de variétés hyperboliques compactes, thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2012.

[16] L. EHRENPREIS – Cohomology with bounds, in *Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69)*, Academic Press, 1970, p. 389–395.

[17] F. HAGLUND – Finite index subgroups of graph products, *Geom. Dedicata* **135** (2008), p. 167–209.

[18] F. HAGLUND & D. T. WISE – Special cube complexes, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), n° 5, p. 1551–1620.

[19] P. HALL – On representatives of subsets, *J. London Math. Soc.* **1** (1935), p. 26–30.

[20] J. HEMPEL – *3-manifolds*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2004.

[21] T. HIRAI – On irreducible representations of the Lorentz group of n – th order, *Proc. Japan Acad.* **38** (1962), p. 258–262.

[22] J. KAHN & V. MARKOVIC – Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold, *Ann. of Math.* **175** (2012), n° 3, p. 1127–1190.

[23] ———, Counting essential surfaces in a closed hyperbolic 3-manifold, prépublication arXiv:1012.2828.

[24] ———, The good pants homology and a proof of the Ehrenpreis conjecture, prépublication arXiv:1101.1330.

[25] ———, Random ideal triangulations and the Weil-Petersson distance between finite degree covers of punctured Riemann surfaces, prépublication arXiv:0806.2304.

[26] C. KOUROUNIOTIS – Complex length coordinates for quasi-Fuchsian groups, *Mathematika* **41** (1994), n° 1, p. 173–188.

[27] H. KRALJEVIĆ – Representations of the universal convering group of the group SU(n, 1), *Glasnik Mat. Ser. III* **8(28)** (1973), p. 23–72.

[28] M. LACKENBY – Surface subgroups of Kleinian groups with torsion, *Invent. Math.* **179** (2010), n° 1, p. 175–190.

[29] G. A. MARGULIS – Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, *Funkcional. Anal. i Prilož.* **3** (1969), n° 4, p. 89–90.

[30] J. D. MASTERS – Thick surfaces in hyperbolic 3-manifolds, *Geom. Dedicata* **119** (2006), p. 17–33.

[31] C. C. MOORE – Exponential decay of correlation coefficients for geodesic flows, in *Group representations, ergodic theory, operator algebras, and mathematical physics (Berkeley, Calif., 1984)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 6, Springer, 1987, p. 163–181.

[32] H. OH – Uniform pointwise bounds for matrix coefficients of unitary representations and applications to Kazhdan constants, *Duke Math. J.* **113** (2002), n° 1, p. 133–192.

[33] M. SAGEEV – Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes, *Proc. London Math. Soc.* **71** (1995), n° 3, p. 585–617.

[34] P. SCOTT – Subgroups of surface groups are almost geometric, *J. London Math. Soc.* **17** (1978), n° 3, p. 555–565.

[35] C. SERIES – An extension of Wolpert's derivative formula, *Pacific J. Math.* **197** (2001), n° 1, p. 223–239.

[36] S. P. TAN – Complex Fenchel-Nielsen coordinates for quasi-Fuchsian structures, *Internat. J. Math.* **5** (1994), n° 2, p. 239–251.

[37] W. P. THURSTON – Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), n° 3, p. 357–381.

[38] D. ŠARIĆ – Complex Fenchel-Nielsen coordinates with small imaginary parts, prépublication arXiv:1204.5778.

[39] D. T. WISE – The structure of groups with a quasiconvex hierarchy, prépublication disponible sur `http://www.math.mcgill.ca/wise/papers.html`, 2012.

Nicolas BERGERON

Université Pierre et Marie Curie et
Institut Universitaire de France
Département de Mathématiques
4 place Jussieu
F-75005 PARIS
E-mail : `bergeron@math.jussieu.fr`