Astérisque

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p-adiques [d'après S. Saito, K. Sato et al]

Astérisque, tome 339 (2011), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1012, p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2011__339__1_0>

© Société mathématique de France, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 2009
62e année, 2009-2010, n° 1012, p. 1 à 30

GROUPE DE CHOW DES ZÉRO-CYCLES SUR LES VARIÉTÉS p-ADIQUES
[d'après S. Saito, K. Sato *et al.*]

par **Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE**

INTRODUCTION

Soient k un corps et X une k-variété algébrique projective, lisse et géométriquement irréductible (cette dernière hypothèse sera souvent tacitement faite). On note $Z_0(X)$ le groupe des zéro-cycles sur X, c'est-à-dire le groupe abélien libre sur les points fermés de X (points x du schéma X dont le corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie de k). On dispose d'une application degré

$$\deg : Z_0(X) \to \mathbf{Z}$$

définie par linéarité à partir de l'application envoyant un point fermé x sur le degré $[\kappa(x) : k]$.

À tout couple formé d'une courbe fermée intègre $C \subset X$ et d'une fonction rationnelle non nulle $f \in k(C)^\times$, on associe un zéro-cycle, le diviseur de f. Celui-ci est ainsi défini : on considère la normalisation $\tilde{C} \to C$ de la courbe C, et le morphisme composé $\pi : \tilde{C} \to C \to X$. On définit alors $\mathrm{div}(f) = \pi_*(\mathrm{div}_{\tilde{C}}(f))$. Le groupe de Chow des zéro-cycles sur X est par définition le quotient de $Z_0(X)$ par le sous-groupe engendré par tous les $\mathrm{div}(f)$ pour tous les couples (C, f).

Comme la k-variété X est projective, l'application degré induit un homomorphisme $\deg : CH_0(X) \to \mathbf{Z}$. On note $A_0(X)$ le noyau de cette application. On dispose donc d'une suite exacte

$$0 \to A_0(X) \to CH_0(X) \to \mathbf{Z}.$$

L'image de la flèche degré est un sous-groupe $\mathbf{Z}.I_X \subset \mathbf{Z}$ d'indice fini. La suite est scindée si X possède un zéro-cycle z_0 de degré 1, *ce qu'on suppose désormais dans cette introduction.*

À la k-variété X on associe sa variété de Picard $\mathrm{Pic}^0_{X/k,red}$, qui est une variété abélienne. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}(k) \to \mathrm{Pic}X \to \mathrm{NS}(X) \to 0$$

où $\mathrm{NS}(X)$ est un groupe abélien de type fini.

La variété abélienne duale de $\mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}$ est la variété d'Albanese $\mathrm{Alb}_{X/k}$ de X. À la donnée de z_0 est associé un k-morphisme

$$\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}_{X/k}$$

induisant un isomorphisme sur les variétés de Picard de ces deux variétés. Ce morphisme induit un homomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{alb}_X : A_0(X) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(k)$$

qui ne dépend pas du choix de z_0.

Lorsque $\dim(X) = 1$, c'est-à-dire lorsque X est une courbe (projective, lisse), on a un isomorphisme $\mathrm{Pic}X \xrightarrow{\simeq} CH_0(X)$ qui induit un isomorphisme $\mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}(k) \xrightarrow{\simeq} A_0(X)$. La flèche $\mathrm{alb}_X : A_0(X) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(k)$ est un isomorphisme.

Les propriétés des groupes de points rationnels de variétés abéliennes donnent alors des théorèmes sur la structure des groupes $CH_0(X)$ et $A_0(X)$. En particulier, pour X/k une courbe de genre g avec ou sans zéro-cycle de degré 1, on a les propriétés suivantes :

(1) Si k est un corps de type fini sur le corps premier, le groupe $CH_0(X)$ est un groupe abélien de type fini (Mordell-Weil).

(2) Si k est un corps fini, le groupe $A_0(X)$ est fini.

(3) Si k est un corps p-adique (ce qui dans cet exposé signifie extension finie du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$), le groupe $A_0(X)$ est extension d'un groupe fini par un sous-groupe isomorphe à une somme directe de g exemplaires de l'anneau des entiers de k (Lutz, Mattuck).

En conséquence,

(3.1) Le groupe $A_0(X)$ est somme directe d'un groupe fini (d'ordre premier à p) et d'un groupe p'-divisible (c'est-à-dire divisible par tout entier premier à p).

(3.2) Pour tout entier $n > 0$, le quotient $CH_0(X)/n$ est fini.

(3.3) Pour presque tout premier l, on a $A_0(X)/l = 0$.

(3.4) Le sous-groupe de torsion de $CH_0(X)$ est fini.

On peut en outre détecter les classes dans $CH_0(X)$ au moyen de la cohomologie étale sur X (voir le paragraphe 1 ci-après).

Il est naturel de se demander si certaines parmi ces propriétés du groupe $CH_0(X)$ valent encore pour une k-variété projective lisse X de dimension quelconque.

Dans la situation (1), même pour k le corps des rationnels, en dehors des cas qui se réduisent formellement au théorème de Mordell-Weil, on n'a aucun résultat non

trivial sur la finitude de $CH_0(X)/n$ pour $n > 1$ ou sur la finitude de la dimension du $\mathbf{Q}$-vectoriel $CH_0(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Dans la situation (2), qui porte sur le cas des corps finis, la finitude de $A_0(X)$ est un théorème de K. Kato et S. Saito [**27**]. On en sait beaucoup plus : voir à ce sujet l'exposé récent de T. Szamuely [**42**] sur le corps de classes de dimension supérieure.

Le présent exposé porte sur le cas des corps p-adiques.

Depuis les années 1980, une méthode de K-théorie algébrique inventée par S. Bloch et reposant sur un théorème de Merkur'ev et Suslin a permis d'obtenir un certain nombre de résultats, en particulier pour les surfaces. On évoquera ces résultats au paragraphe 2.

En 2006, S. Saito et K. Sato [**35**] réalisèrent que pour obtenir des énoncés généraux il vaut mieux considérer non le groupe de Chow des zéro-cycles sur une variété projective et lisse X sur un corps p-adique k, mais le groupe de Chow des 1-cycles sur un modèle régulier et projectif de X au-dessus de l'anneau des entiers de k (lorsqu'un tel modèle existe).

On décrira en détail leur travail au paragraphe 3. Le théorème principal est le théorème 3.17. En voici deux applications (Théorèmes 3.21 et 3.25).

THÉORÈME 0.1. — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps p-adique k. Si X a bonne réduction Y sur le corps résiduel fini F, alors la flèche de spécialisation $A_0(X) \to A_0(Y)$, qui est une surjection sur le groupe fini $A_0(Y)$, a un noyau p'-divisible, c'est-à-dire divisible par tout entier premier à p.*

THÉORÈME 0.2. — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps p-adique k.*

(i) *Pour presque tout premier l, le quotient $A_0(X)/l$ est nul.*

(ii) *Pour tout premier $l \neq p$, le quotient $A_0(X)/l$ est fini* [(1)].

Les résultats de Saito et Sato [**35**] furent ensuite combinés par Asakura et Saito [**2**] à des techniques de théorie de Hodge pour établir l'existence de surfaces X de degré au moins 5 dans $\mathbf{P}^3_k$ dont les sous-groupes de torsion l-primaire ($l \neq p$) sont infinis (voir le paragraphe 4 ci-après).

Je remercie Tamás Szamuely pour de nombreuses discussions sur le théorème de Saito et Sato et pour ses commentaires critiques sur une première version du présent texte.

(1) Dans [**35**], l'énoncé (ii) est établi pour les k-variétés qui admettent un modèle quasi-semistable sur l'anneau des entiers ; comme on verra, le cas général s'y ramène grâce à un théorème récent de Gabber.

Notations

Soit A un groupe abélien. Pour $n > 0$ un entier, on note $A[n] \subset A$ le sous-groupe formé des éléments annulés par n. Pour l un nombre premier, on note $A\{l\} \subset A$ le sous-groupe de torsion l-primaire.

1. COURBES SUR LES CORPS p-ADIQUES : RÉSULTATS CLASSIQUES

Comme mentionné dans l'introduction, pour une courbe projective et lisse X sur un corps p-adique, on peut détecter les classes dans $CH_0(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ au moyen de la cohomologie étale. Expliquons plus précisément ce que nous entendons par là.

THÉORÈME 1.1 (Tate (1958) [**43**]). — *Soient k un corps p-adique, A une variété abélienne sur k et $\hat{A}$ la variété abélienne duale. Il y a une dualité parfaite*

$$A(k) \times H^1(k, \hat{A}) \to \mathrm{Br}k = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

entre le groupe abélien compact $A(k)$ des points rationnels de A et le groupe discret défini par le premier groupe de cohomologie galoisienne de k à valeurs dans le groupe des points de $\hat{A}$.

En s'appuyant sur ce théorème, on montre :

THÉORÈME 1.2 (Roquette (1966), Lichtenbaum (1969) [**29**])

Soient k un corps p-adique et X une k-courbe projective, lisse, géométriquement connexe.

a) *Il y a un accouplement naturel*

$$\mathrm{Pic}X \times \mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}k = \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

et cet accouplement est non dégénéré des deux côtés.

b) *Le noyau de la flèche $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \mathrm{Br}k \to \mathrm{Br}X$ induite par le morphisme structural est $\mathbf{Z}/I$, où I est l'index de X, c'est-à-dire le pgcd des degrés, sur k, des points fermés sur X.*

Ainsi, pour X une courbe projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k p-adique, possédant un k-point, le groupe $A_0(X)$ est isomorphe au groupe de Lie p-adique $J_X(k)$, et l'accouplement

$$CH_0(X) \times \mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}k = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est non dégénéré à gauche et à droite.

THÉORÈME 1.3 (Artin (1966) [**17**], §3). — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel F. Soit X un R-schéma fidèlement plat, projectif, intègre, régulier, de dimension relative 1. Soit X_s/F sa fibre spéciale.*

(a) *La flèche de restriction* $\mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}X_s$ *est un isomorphisme (de groupes de torsion).*

(b) *Si F est un corps sépablement clos ou un corps fini,* $\mathrm{Br}X \simeq \mathrm{Br}X_s = 0$.

(c) *Sous les mêmes hypothèses qu'en* (b), *pour tout entier $n > 0$, l'injection naturelle*

$$\mathrm{Pic}X/n \hookrightarrow H^2_{fppf}(X, \mu_n)$$

est un isomorphisme.

L'énoncé (c) provient de (b) et de la suite de Kummer

$$1 \to \mu_n \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbf{G}_m \to 1$$

sur X, considérée comme suite de faisceaux pour la topologie étale sur X si n est inversible, et comme suite de faisceaux pour la topologie fppf en général. La partie première à $p = \mathrm{car}(F)$ des énoncés est plus facile à établir, elle ne nécessite pas l'hypothèse d'excellence.

Le théorème principal de Saito et Sato (théorème 3.17 ci-dessous) généralise l'énoncé (c) du théorème 1.3 pour n premier à p.

2. SURFACES SUR LES CORPS p-ADIQUES : QUELQUES APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE BLOCH

Soit X un schéma noethérien de dimension finie. Pour tout entier $i \geq 0$, le groupe $Z_i(X)$ des cycles de dimension i est le groupe abélien libre sur les points (schématiques) de X de dimension i (ou si l'on préfère les sous-schémas fermés intègres de dimension i)

$$Z_i(X) = \oplus_{x \in X_i} \mathbf{Z}.$$

Notons $\kappa(x)$ le corps résiduel en un point x. On sait définir une application « diviseur »

$$\mathrm{div} : \oplus_{x \in X_{i+1}} \kappa(x)^\times \to \oplus_{x \in X_i} \mathbf{Z}$$

qui généralise la notion de diviseur d'une fonction rationnelle (voir [**16**]). Par définition, le groupe de Chow $CH_i(X)$ est le conoyau de cette application.

Supposons X intègre et équidimensionnel de dimension d. On note alors $CH^r(X) = CH_{d-r}(X)$. Pour $i = d$, $CH_0(X) = \mathbf{Z}$. Pour $i = d-1$, $CH_{d-1}(X) = CH^1(X)$. On a une flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}X \to CH^1(X)$$

qui est un isomorphisme si X est régulier.

On note $\mathcal{K}_i$ le faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau qui à un ouvert affine U associe le groupe de K-théorie $K_i(U)$ défini par Quillen. En combinant les théorèmes sur la conjecture de Gersten, tant en K-théorie (Quillen) qu'en cohomologie étale (Bloch et Ogus [**6**], 1974) et le théorème de Merkur'ev et Suslin ([**30**], 1982) sur le symbole de restes normique, Spencer Bloch a établi le résultat suivant ([**3, 4, 5**], voir aussi [**7**]).

THÉORÈME 2.1 (Bloch). — *Soient k un corps, X une k-variété lisse intègre, $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles, et n un entier non nul dans k. On a une suite exacte naturelle de groupes abéliens*

$$0 \to H^1_{Zar}(X, \mathcal{K}_2)/n \to NH^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \to CH^2(X)[n] \to 0,$$

où $NH^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est le noyau de la flèche de restriction de groupes de cohomologie étale $H^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3_{\text{ét}}(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$.

Dans la littérature récente, le groupe $H^1_{Zar}(X, \mathcal{K}_2)$ a été identifié avec d'autres groupes : le groupe de Chow supérieur $CH^2(X, 1)$ de Bloch d'une part, le groupe d'hypercohomologie $\mathbf{H}^3_{Zar}(X, \mathbf{Z}(2))$ du complexe motivique $\mathbf{Z}(2)$ d'autre part.

Il existe des analogues de cette suite exacte pour les schémas lisses au-dessus d'un anneau de valuation discrète.

Cette suite exacte a eu de nombreuses applications, qu'on ne saurait décrire ici de façon exhaustive.

On l'a utilisée, conjointement avec le théorème de Deligne établissant les conjectures de Weil, pour donner des démonstrations alternatives du théorème de Kato et Saito sur le corps de classes non ramifié pour les variétés projectives et lisses sur un corps fini mentionné dans l'introduction ([**13, 42**]).

Sur les corps p-adiques et sur les corps de nombres, on l'a utilisée pour obtenir des résultats de finitude pour la torsion du groupe de Chow de codimension 2, et aussi du groupe de Chow des zéro-cycles, pour certaines classes de variétés. Pour des résultats sur les corps de nombres, je renvoie le lecteur à [**11, 34, 38, 31, 36**] et aux rapports [**7, 8**].

THÉORÈME 2.2 ([**13**]). — *Soit k un corps p-adique. Soit X une k-variété lisse.*

(i) *Pour tout entier $n > 0$, le groupe $CH^2(X)[n]$ est un groupe fini.*

(ii) *Pour tout l premier, le groupe de torsion l-primaire $CH^2(X)\{l\}$ est un groupe de cotype fini (somme d'un groupe fini l-primaire et d'un groupe $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N$).*

Démonstration. — D'après le théorème 2.1, le groupe $CH^2(X)[n]$ est un sous-quotient du groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$. La finitude de ce groupe pour un corps local est bien connue. Elle implique que le groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est un groupe de cotype fini, et donc aussi tout sous-quotient. □

THÉORÈME 2.3. — *Soient k un corps p-adique et X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre.*

(i) *Pour tout l premier, $l \neq p$, et tout entier $n > 0$, l'application naturelle $A_0(X)\{l\}/l^n \to A_0(X)/l^n$ est un isomorphisme.*

(ii) *Supposons que X/k a bonne réduction $Y/\mathbf{F}$. Alors pour tout premier $l \neq p$, l'application de réduction induit une surjection $A_0(X)\{l\} \to A_0(Y)\{l\}$.*

Démonstration. — (i) Que l'application $A_0(X)\{l\}/l^n \to A_0(X)/l^n$ soit une injection est clair. Pour établir que c'est une surjection, on se ramène par le théorème de Bertini au cas où X est une courbe projective lisse géométriquement intègre, et l'assertion résulte alors de la structure du groupe des points d'une variété abélienne sur un corps p-adique.

(ii) On dispose d'une application de spécialisation $A_0(X) \to A_0(Y)$ qui est surjective (lemme de Hensel). Soit $m > 0$. D'après (i) l'application $A_0(X)\{l\}/l^m \to A_0(X)/l^m$ est surjective. L'application composée

$$A_0(X)\{l\}/l^m \to A_0(X)/l^m \to A_0(Y)/l^m$$

est donc surjective. Le groupe $A_0(Y)$ est fini (théorème de Kato et Saito [**27**]). Prenant alors m tel que l^m annule la partie l-primaire de $A_0(Y)$, on obtient l'énoncé. □

THÉORÈME 2.4. — *Soient k un corps p-adique et X une k-surface projective, lisse et géométriquement intègre.*

(i) *Pour tout entier positif n, le groupe $A_0(X)[n]$ est un groupe fini.*

(ii) *Pour tout l premier, le groupe de torsion l-primaire $A_0(X)\{l\}$ est un groupe de cotype fini (somme d'un groupe fini l-primaire et d'un groupe $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N$).*

(iii) (Saito et Sujatha) *Pour l premier, $l \neq p$, le groupe $A_0(X)$ est somme de son sous-groupe l-divisible maximal et d'un groupe fini l-primaire.*

(iv) (Saito et Sujatha) *Pour $n > 0$ premier à p, le groupe $A_0(X)/n$ est fini.*

Démonstration (voir [**8**]*).* — Pour X une surface projective lisse géométriquement connexe, on a l'égalité $CH_0(X) = CH^2(X)$. Les énoncés (i) et (ii) sont des cas particuliers du théorème 2.2. D'après (ii) on peut écrire $A_0(X)\{l\} = (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N \oplus F_l$ avec F_l un groupe abélien fini annulé par une puissance l^t de l, et $N \geq 0$. En utilisant la proposition 2.3(i) on voit alors que l'application composée $F_l \to A_0(X) \to A_0(X)/l^t$ est un isomorphisme. On en déduit que dans la suite exacte

$$0 \to D_l \to A_0(X) \to A_0(X)/l^t \to 0$$

définissant D_l, la projection $A_0(X) \to A_0(X)/l^t$ est scindée, d'où $A_0(X) \simeq D_l \oplus F_l$, avec $D_l/l = 0$. Le groupe D_l est donc le sous-groupe l-divisible maximal de $A_0(X)$. Ceci établit (iii), et l'énoncé (iv) suit. □

Remarque 2.5. — On verra au paragraphe 3 que pour presque tout premier l le groupe fini F_l est nul, en d'autres termes le groupe $A_0(X)$ est l-divisible. La méthode ci-dessus ne permet pas d'obtenir ce résultat.

Le théorème suivant, détaillé dans **[9]**, regroupe des travaux des années 1985 à 1991, dus à Raskind et au rédacteur **[10, 11]**, à Salberger **[38]** et à S. Saito **[34]**.

THÉORÈME 2.6. — *Soient k un corps p-adique et X une k-surface projective et lisse, géométriquement intègre. Supposons $H^2(X, O_X) = 0$. Alors*

(i) *Le groupe $A_0(X)_{\mathrm{tors}}$ est fini.*

(ii) *Si la flèche naturelle $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})$ (sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de k) est un isomorphisme (ce qui résulterait de $H^2(X, O_X) = 0$ suivant une conjecture de S. Bloch, connue pour les surfaces qui ne sont pas de type général), alors le groupe $A_0(X)$ est extension d'un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Alb}_X(k)$ par un groupe fini. En particulier, le groupe $A_0(X)$ est somme directe d'un groupe fini d'ordre premier à p et d'un groupe p'-divisible.*

(iii) *Si la variété d'Albanese de X a bonne réduction, alors l'accouplement*

$$A_0(X)_{\mathrm{tors}} \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est non dégénéré à gauche.

(iv) *Si la flèche naturelle $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})$ est un isomorphisme et si la variété d'Albanese de X a bonne réduction, alors l'accouplement*

$$A_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est non dégénéré à gauche.

L'énoncé (iii) peut être établi sous des hypothèses un peu plus larges ([**38**], [**34**], [**39**], [**36**]), mais on ne peut totalement ignorer les hypothèses dans (iii) et (iv). Parimala et Suresh **[31]** construisent une surface X fibrée en coniques lisses au-dessus d'une courbe C (la surface satisfait donc $H^2(X, O_X) = 0$), la conique ayant mauvaise réduction sur un corps p-adique k de caractéristique résiduelle impaire, surface pour laquelle :

(a) le noyau à gauche de l'accouplement $A_0(X)\{2\} \times \mathrm{Br}X \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ n'est pas nul ;

(b) l'application cycle $CH^2(X)/2 \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/2)$ n'est pas injective ;

(c) le noyau de l'application $A_0(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ n'est pas le sous-groupe divisible maximal de $A_0(X)$.

La plupart des théorèmes précédents furent obtenus en étudiant l'action du groupe de Galois absolu de k sur divers groupes ($\mathcal{K}$-cohomologie, cohomologie étale) attachés aux variétés (après passage à une clôture algébrique du corps k).

Une autre méthode consiste à considérer des modèles des k-variétés au-dessus d'un ouvert de l'anneau des entiers de k. Limitons-nous ici au cas de bonne réduction. Soit R l'anneau des entiers d'un corps p-adique k, de corps résiduel $\mathbf{F}$. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma intègre, projectif et lisse, de fibre générique X/k géométriquement intègre, et soit $Y/\mathbf{F}$ la fibre spéciale. Pour un tel $\mathcal{X}$, on a la suite exacte de localisation

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Y) \to CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X) \to 0.$$

Notons $\delta : H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Y)$. Le groupe $\mathrm{Pic}(Y)$ est un groupe de type fini (théorème de Néron-Severi et finitude du groupe des points rationnels d'une variété abélienne sur un corps fini). L'énoncé suivant, détaillé dans **[9]**, regroupe des résultats de Raskind **[33]**, Raskind et l'auteur **[11]**, Spieß **[41]**.

THÉORÈME 2.7. — *Avec les notations ci-dessus, supposons* $\dim(X) = 2$, *et supposons*

(H) *L'application* $H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q} \to \mathrm{Pic}(Y) \otimes \mathbf{Q}$ *est surjective.*

Alors

(i) *L'application de spécialisation* $CH_0(X) \to CH_0(Y)$ *induit un isomorphisme sur les sous-groupes de torsion première à* p.

(ii) *Le groupe* $A_0(X)$ *est la somme directe d'un groupe fini d'ordre premier à* p *et d'un groupe uniquement divisible par tout entier* n *premier à* p. *Pour tout* l *premier distinct de* p, *le groupe* D_l *ci-dessus est uniquement* l*-divisible.*

(iii) *Pour* $n > 0$ *premier à* p, *l'application cycle*

$$CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

est injective.

(iv) *L'accouplement*

$$A_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

a son noyau à gauche formé d'éléments divisibles par tout entier $n > 0$ *premier à* p.

Voici des cas où l'hypothèse (H) a été établie.

a) Le cas où $H^2(Y, O_Y) = 0$ (et donc aussi $H^2(X, O_X) = 0$). C'est le cas le plus simple. Dans ce cas le conoyau de la flèche composée $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^\times \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Y)$ est nul, car la flèche de restriction $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}(Y)$ est surjective. Ce cas fut considéré par Raskind **[33]**, Coombes, CT-Raskind (**[11]**).

b) Le cas où le rang du groupe de Néron-Severi géométrique ne grandit pas par spécialisation (Raskind **[33]**).

c) Le cas où $\mathcal{X}$ est le produit fibré de deux courbes elliptiques avec bonne réduction (Spieß [**41**]).

Dans le cas c) il faut, pour établir (H), trouver des éléments « indécomposables » dans $H^1(X, \mathcal{K}_2)$, i.e. d'autres éléments que ceux provenant de $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^\times$. Spieß utilise certaines correspondances entre courbes elliptiques provenant de travaux de Frey et Kani.

Dans les années 1990 à 2000, il y eut dans cette direction (recherche d'éléments indécomposables) une série de travaux (Flach, Mildenhall, S. Saito, Langer, Raskind, Otsubo) reposant souvent sur une arithmétique très fine des variétés considérées (par exemple des produits de courbes modulaires). Je renvoie ici le lecteur à l'article récent [**36**] de S. Saito et K. Sato, tant pour la liste de références que pour le lien entre la finitude du groupe $CH^2(X)_{\mathrm{tors}}$ et le comportement d'applications « régulateurs » de source le groupe $H^1(X, \mathcal{K}_2)$, applications déjà considérées par Salberger [**38**].

Le récent théorème de Asakura et Saito (Théorème 4.1 ci-dessous) montre que l'hypothèse (H) ne vaut pas toujours : elle est en défaut pour des surfaces lisses dans $\mathbf{P}^3_k$ de degré au moins 5, suffisamment génériques. Asakura et Sato ont posé la question de sa validité lorsque la surface sur le corps p-adique provient d'une surface définie sur un corps de nombres.

3. LE THÉORÈME DE S. SAITO ET K. SATO [35]

Dans tout ce paragraphe, on adopte les notations suivantes.

On note R un anneau de valuation discrète, F son corps résiduel et k son corps des fractions. On note $B = \mathrm{Spec}\ R$, $s = \mathrm{Spec}\ F$, $\eta = \mathrm{Spec}\ k$.

On note Sch_B^{qp} la catégorie des schémas quasi-projectifs sur B. Pour $X \in \mathrm{Sch}_B^{qp}$, on note $\delta(X) \in \mathbf{N}$ la dimension de Krull d'une compactification de X au-dessus de B.

Pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch}_B^{qp})$, on note X_s/F sa fibre spéciale et X_η/k sa fibre générique. Si X est intègre et X_η est vide, donc $X = X_s$, alors $\delta(X)$ est égal au degré de transcendance sur F du corps des fonctions $F(X_s)$. Si X est intègre et X_η est non vide, alors $\delta(X) - 1$ est égal au degré de transcendance du corps des fonctions $k(X_\eta)$ sur k.

On note $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de Sch_B^{qp} dont les objets satisfont $X_s \neq \varnothing$. Pour X irréductible dans $\mathcal{C}$, on a $\delta(X) = \dim(X)$.

Un objet $X \in \mathcal{C}$ est appelé quasi-semistable s'il satisfait les conditions :

(QS1) X est régulier, équidimensionnel, plat et de type fini sur B.

(QS2) Le diviseur réduit $X_{s,\mathrm{red}}$ sur X est à croisements normaux stricts.

On note $\mathcal{QS} \subset \mathcal{C}$, resp. $\mathcal{QSP} \subset \mathcal{C}$, la sous-catégorie pleine dont les objets sont les objets quasi-semistables, resp. les objets quasi-semistables et projectifs sur B.

Une $\mathcal{QS}$-paire est un couple (X, Y) de schémas dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{QS})$ pour lequel Y est un diviseur sur X et le diviseur $X_{s,\mathrm{red}} \cup Y$ sur X est à croisements normaux stricts. Posant $U := X \setminus Y$, on note indifféremment $(X, Y) = (X, Y; U)$.

Une $\mathcal{QSP}$-paire est une $\mathcal{QS}$-paire (X, Y) pour laquelle X et Y sont projectifs sur B.

Une $\mathcal{QSP}$-paire ample est une $\mathcal{QSP}$-paire $(X, Y; U)$ pour laquelle U est affine.

3.1. Groupes de Chow, homologie étale, suite spectrale de niveau, complexe de Bloch-Ogus et Kato, application cycle

Pour les variétés algébriques sur un corps, les résultats exposés au paragraphe 2 utilisent diverses propriétés de la cohomologie et de l'homologie étale, la dualité de Poincaré, les filtrations par le niveau et par le coniveau et les suites spectrales associées. Ces théories sont développées dans **[17]** III, §10.1, **[28]**, **[6]**.

Il a fallu étendre ces théories aux schémas de type fini au-dessus d'un anneau de valuation discrète.

Sauf mention du contraire, la cohomologie employée est la cohomologie étale.

Pour X dans $\mathcal{C}$, et $q \geq 0$ entier, on note X_q l'ensemble des points $x \in X$ dont l'adhérence $\overline{\{x\}} \subset X$ satisfait $\delta(\overline{\{x\}}) = q$. Pour $q \geq 0$, et $X \in \mathcal{C}$, on définit le groupe de Chow de dimension q par la formule usuelle :

$$CH_q(X) = \mathrm{Coker}\,[\mathrm{div} : \oplus_{x \in X_{q+1}} \kappa(x)^* \to \oplus_{x \in X_q} \mathbf{Z}].$$

On fixe un premier $l \neq \mathrm{car}\ F$. On note μ_{l^n} le faisceau pour la topologie étale associé au B-schéma en groupes des racines l^n-ièmes de l'unité. Pour $m \in \mathbf{N}$, on a le faisceau $\mathbf{Z}/l^n(m) = \mu_{l^n}^{\otimes m}$. Pour $-m \in \mathbf{N}$ on note $\mathbf{Z}/l^n(m)$ le faisceau $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/l^n(-m), \mathbf{Z}/l^n)$. Pour $m \in \mathbf{Z}$ on note $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(m) = \varinjlim_n \mathbf{Z}/l(m)$. Lorsque l'on voudra considérer simultanément le cas $\mathbf{Z}/l^n$ et le cas $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$, on utilisera la notation Λ.

Pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch}_B^{qp})$ de morphisme structural $f : X \to B$ et pour $q \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{Z}$, suivant Grothendieck, Artin, Verdier, Deligne, on définit

$$H_q(X, \Lambda(m)) := \mathbb{H}^{2-q}(X, Rf^!\Lambda(m))$$

où $Rf^!$ est le foncteur image inverse extraordinaire ([**1**, XVIII, Thm. 3.1.4]).

Ceci définit une théorie homologique sur la catégorie Sch_B^{qp} ayant toutes les propriétés voulues : fonctorialité covariante par morphisme propre, fonctorialité contravariante par morphisme étale, existence pour toute immersion fermée $Y \hookrightarrow X$ de complémentaire $U \hookrightarrow X$ d'une longue suite exacte

$$\cdots \to H_q(Y, \Lambda) \to H_q(X, \Lambda) \to H_q(U, \Lambda) \to H_{q-1}(Y, \Lambda) \to \cdots,$$

fonctorialité de cette suite exacte. Le lecteur se reportera à **[28, 20, 23]**.

Cette théorie homologique à la Borel-Moore se relie à la cohomologie étale grâce à un théorème de « dualité de Poincaré » :

PROPOSITION 3.1. — *Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch}_B^{qp})$ un schéma régulier intègre. Posons $d = \delta(X) - 1$. Pour tout sous-schéma fermé $Y \subset X$, et tout $q \in \mathbf{Z}$, il existe un isomorphisme canonique*

$$H_Y^{2d-q+2}(X, \Lambda(d)) \xrightarrow{\cong} H_q(Y, \Lambda).$$

(Par convention $H^r = 0$ pour $r < 0$.)

Cet isomorphisme satisfait une série de propriétés fonctorielles (cf. **[35]**).

Pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch}_B^{qp})$, x un point de X, et $q \in \mathbf{Z}$ on note

$$H_q(x, \Lambda) := \varinjlim_{U \subset \overline{\{x\}}} H_q(U, \Lambda),$$

où $\overline{\{x\}}$ est l'adhérence de x dans X et U parcourt les ouverts non vides de $\overline{\{x\}}$.

La longue suite exacte de localisation donnée ci-dessus et la filtration par le niveau donnent naissance à une suite spectrale de type homologique

$$E^1_{a,b}(X, \Lambda) = \oplus_{x \in X_a} H_{a+b}(x, \Lambda) \Longrightarrow H_{a+b}(X, \Lambda)$$

dont les différentielles de niveau r sont de degré $(-r, r-1)$.

Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{Z}$, notons $H^n(x, \Lambda(m))$ le groupe de cohomologie galoisienne $H^n(\kappa(x), \Lambda(m))$, groupe qui par définition est nul pour $n < 0$. Par passage à la limite dans les isomorphismes dans la proposition 3.1 (pour $Y = X = U$) on obtient la

PROPOSITION 3.2 (Suite spectrale de niveau). — *Pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch}_B^{qp})$, il y a une suite spectrale homologique*

$$E^1_{a,b}(X, \Lambda) = \oplus_{x \in X_a} H^{a-b}(x, \Lambda(a-1)) \Longrightarrow H_{a+b}(X, \Lambda).$$

Cette suite exacte est fonctorielle covariante par rapport aux morphismes propres et contravariante par rapport aux morphismes étales.

La ligne $b = 0$ de la suite spectrale est un complexe

$$0 \leftarrow \bigoplus_{x \in X_0} H^0(x, \Lambda(-1)) \leftarrow \bigoplus_{x \in X_1} H^1(x, \Lambda) \leftarrow \cdots \bigoplus_{x \in X_a} H^a(x, \Lambda(a-1)) \leftarrow \cdots$$

(la somme sur les points de dimension a étant placée en degré a). Pour $X \in \mathcal{C}$ intègre, de corps des fonctions $\kappa(X)$, avec $d = \delta(X) - 1 = \dim(X) - 1$, le complexe commence (à droite) par

$$\cdots \leftarrow H^{d+1}(\kappa(X), \Lambda(d)) \leftarrow 0.$$

On note ce complexe $KC(X, \Lambda)$. On note $KH_a(X, \Lambda)$ le groupe d'homologie en degré a. D'après Jannsen, Saito et Sato **[23]**, les flèches dans ce complexe sont les opposées des flèches de bord en cohomologie galoisienne utilisées par Kato **[26]**.

Remarque 3.3. — Lorsque l'on étudie ([**26**], [**19**], [**22**]) le corps de classes de dimension supérieure sur le corps des fonctions d'une variété intègre X de dimension $d+1$ sur un corps fini $\mathbf{F}$, le principal complexe considéré va de $H^{d+2}(\kappa(X), \Lambda(d+1))$ à $\bigoplus_{x\in X_0} H^1(x, \Lambda)$.

Dans la suite spectrale de niveau, on a clairement $E^1_{a,b}(X, \Lambda) = 0$ pour $a \notin [0, \delta(X)]$ et pour $a - b < 0$.

On a en particulier des applications

$$E^1_{1,1} \to E^2_{1,1} \to E^\infty_{1,1} \hookrightarrow H_2(X, \Lambda).$$

Le groupe $E^2_{1,1}$ est le conoyau de la flèche $d^1_{2,1} : E^1_{2,1} \to E^1_{1,1}$, donc (en utilisant la suite de Kummer)

$$E^2_{1,1}(X, \Lambda) = \mathrm{Coker}\,[d^1_{2,1} : \oplus_{x\in X_2} \kappa(x)^\times \otimes \Lambda \to \oplus_{x\in X_1} \Lambda].$$

Les auteurs identifient cette application avec l'opposée de l'application div $\otimes \Lambda$. Pour $X \in \mathcal{C}$, le conoyau s'identifie donc avec le groupe $CH_1(X) \otimes \Lambda$. L'application composée $E^2_{1,1} \to E^\infty_{1,1} \hookrightarrow H_2(X, \Lambda)$ définit un homomorphisme

$$\rho_X : CH_1(X) \otimes \Lambda \to H_2(X, \Lambda)$$

dont on vérifie qu'il coïncide avec l'application cycle (sur les 1-cycles de X). Cette application jouit des propriétés fonctorielles attendues : elle est covariante par morphismes propres dans $\mathcal{C}$, et contravariante par morphismes étales dans $\mathcal{C}$.

La fonctorialité suivante est particulièrement importante. Pour une immersion fermée $Y \subset X$ dans $\mathcal{C}$ dont le complémentaire $U \hookrightarrow X$ est dans $\mathcal{C}$, on a un diagramme commutatif de suites de localisation

$$\begin{array}{ccccccc} CH_1(Y) \otimes \Lambda & \longrightarrow & CH_1(X) \otimes \Lambda & \longrightarrow & CH_1(U) \otimes \Lambda & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_U} & & \\ H_2(Y, \Lambda) & \longrightarrow & H_2(X, \Lambda) & \longrightarrow & H_2(U, \Lambda) & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

PROPOSITION 3.4. — *Soit* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(1) *Si* $\delta(X) = 1$, *la flèche* $\rho_X : CH_1(X) \otimes \Lambda \to H_2(X, \Lambda)$ *est un isomorphisme.*

(2) *Si* $\delta(X) = 2$, *on a une suite exacte*

$$0 \to CH_1(X) \otimes \Lambda \to H_2(X, \Lambda) \to KH_2(X, \Lambda) \to 0.$$

(3) *Si* $\delta(X) = 3$, *on a une suite exacte*

$$H_3(X, \Lambda) \to KH_3(X, \Lambda) \to CH_1(X) \otimes \Lambda \to H_2(X, \Lambda).$$

(4) *Si* $\delta(X) \leq 3$, *on a* $KH_3(X, \mathbf{Z}/l^n) = KH_3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)[l^n]$.

Démonstration. — Les énoncés (1) à (3) résultent immédiatement de la forme de la suite spectrale de niveau. L'énoncé (4) résulte de la fonctorialité en les coefficients de la suite spectrale, du théorème 90 de Hilbert, et du théorème de Merkur'ev-Suslin **[30]**. □

THÉORÈME 3.5. — *Supposons R hensélien et F fini ou séparablement clos. Soit X un R-schéma régulier, projectif et plat sur R, de dimension 2. Soit $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$ ou $\Lambda = \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$.*

Alors

(a) *L'application cycle $\rho_X : CH_1(X) \otimes \Lambda \to H_2(X, \Lambda)$ est bijective.*

(b) *Le groupe d'homologie $KH_2(X, \Lambda) = 0$.*

Démonstration. — On peut supposer X intègre et $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$. Pour $\dim(X) = 2$, la suite exacte

$$0 \to CH_1(X)/l^n \to H_2(X, \mathbf{Z}/l^n) \to KH_2(X, \mathbf{Z}/l^n) \to 0$$

de la proposition 3.4 s'identifie à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X)/l^n \to H^2(X, \mu_{l^n}) \to \mathrm{Br}(X)[l^n] \to 0$$

déduite de la suite de Kummer en cohomologie étale. L'énoncé est alors le théorème d'Artin (Théorème 1.3). □

3.2. Deux conjectures

Soient $X \to B$ dans $\mathcal{C}$ et $x \in X_a$. Si $p(x) = s$, alors $cd_l(\kappa(x)) = cd_l(F) + a$. Si $p(x) = \eta$, alors $cd_l(\kappa(x)) = cd_l(k) + a - 1$, ce qui si R est hensélien implique $cd_l(\kappa(x)) = cd_l(F) + a$.

Ceci implique immédiatement les énoncés (i) et (ii) dans la proposition suivante. Cette proposition n'est pas utilisée dans la démonstration du théorème principal 3.17, elle ne sert que dans la démonstration du théorème 3.29, qui établit les conjectures 3.7 et 3.8 en bas degré.

PROPOSITION 3.6. — *Supposons R hensélien. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*

(i) *Si F est séparablement clos, alors $E^1_{a,b}(X, \mathbf{Z}/l^n) = 0$ pour $b < 0$ et a quelconque.*

(ii) *Si F est un corps fini, alors $E^1_{a,b}(X, \mathbf{Z}/l^n) = 0$ pour $b < -1$ et a quelconque.*

(iii) *Si F est un corps fini, alors $E^1_{a,-1}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$ pour tout a.*

L'énoncé (iii), qui est un cas particulier d'un énoncé d'annulation pour la cohomologie galoisienne à coefficients $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(m)$ pour certaines torsions m, est moins classique. Un tel énoncé avait été obtenu par B. Kahn **[25]**. Dans les situations de (i) et (iii), les termes non nuls de la suite spectrale sont tous dans le premier quadrant. Dans le cas (ii), il y a une ligne supplémentaire en dessous du premier quadrant.

Supposons R hensélien excellent et F séparablement clos. Pour $X \in \mathcal{C}$, régulier, projectif, le complexe $KC(X, \mathbf{Z}/l^n)$ est exact en degré $a = 0, 1$. Ceci résulte de la forme de la suite spectrale, de l'isomorphisme $H^n(X, \mathbf{Z}/l^n) \simeq H^n(X_s, \mathbf{Z}/l^n)$ (théorème de changement de base) et de la nullité de $H^n(X_s, \mathbf{Z}/l^n)$ pour $n > 2d = 2\dim(X_s)$.

Inspirés par des conjectures de Kato **[26]** sur les variétés sur les corps finis, Saito et Sato **[35]** suggèrent :

CONJECTURE 3.7. — *Supposons R hensélien excellent et F séparablement clos. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{QSP})$ le complexe $KC(X, \mathbf{Z}/l^n)$ est exact.*

CONJECTURE 3.8. — *Supposons R hensélien excellent et F fini. Notons $I(X_s)$ l'ensemble des composantes irréductibles de $X_{s,\mathrm{red}}$. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{QSP})$ le complexe $KC(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$ est exact sauf en degré $a = 1$, où l'homologie $KH_1(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$ s'identifie naturellement à $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l^{I(X_s)}$.*

La forme de la suite spectrale et des résultats classiques de cohomologie étale **[1]** montrent ici encore que cette conjecture vaut en degré $a = 0, 1$.

3.3. Théorème de Lefschetz affine affiné

THÉORÈME 3.9. — *Soit $(X, Y; U)$ une $\mathcal{QSP}$-paire ample avec $\dim(X) = d + 1 \geq 2$. Supposons R hensélien.*

(i) *Si F est séparablement clos, alors $H_q(U, \mathbf{Z}/l^n) = 0$ pour $q \leq d + 1$.*

(ii) *Si F est fini, alors $H_q(U, \mathbf{Z}/l^n) = 0$ pour $q \leq d$.*

(iii) *Si F est fini et $\dim(X) \geq 3$, alors $H_{d+1}(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$.*

Démonstration (esquisse). — Le schéma U est régulier, plat et de dimension relative d sur B. D'après la proposition 3.1, pour tout entier q, on a un isomorphisme

$$H_q(U, \Lambda) \simeq H^{2d+2-q}(U, \Lambda(d)).$$

Le schéma U est affine et R est hensélien. Les théorèmes de Lefschetz affines de Artin et Gabber (voir Fujiwara **[15]**) donnent la nullité de ces groupes pour $q \leq d$ si F est séparablement clos et pour $q \leq d - 1$ si F est fini. C'est un de moins que ce qui est affirmé dans (i) et (ii). Pour aller plus loin, il faut utiliser le fait que $(X, Y; U)$ est une $\mathcal{QSP}$-paire, en particulier que $X_{s,\mathrm{red}} \cup Y$ est un diviseur à croisements normaux stricts.

En utilisant le théorème de pureté cohomologique absolu de Gabber, on étend le théorème de changement de base de Rapoport et Zink **[32]** aux $\mathcal{QSP}$-paires, et l'on montre :

PROPOSITION 3.10. — *Soit $(X, Y; U)$ une $\mathcal{QSP}$-paire sur B. Soit $V := U_{s,\mathrm{red}}$. Si R est hensélien, pour tous entiers q et j, la flèche image réciproque*

$$H^q(U, \mathbf{Z}/l^n(j)) \to H^q(V, \mathbf{Z}/l^n(j))$$

est un isomorphisme.

Combinant cette proposition et l'isomorphisme ci-dessus, pour établir le théorème on est ramené à établir l'annulation des groupes $H^{2d+2-q}(V, \Lambda(d))$ pour q comme dans le théorème. Les énoncés (i) et (ii) sont des conséquences du théorème de Lefschetz affine ([**1**, XIV, Cor. 3.2]). Pour l'énoncé (iii), on montre $H^{d+1}(V, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d)) = 0$ pour F fini et $d \geq 2$. En tenant compte de l'énoncé (ii) pour V, on est ramené à montrer $H^{d+1}(V, \mathbf{Q}_l(d)) = 0$ puis à voir que l'opérateur de Frobenius sur $H^{d+1}(V \times_F \overline{F}, \mathbf{Q}_l(d))$ n'a pas la valeur propre 1. Ceci résulte des hypothèses et des théorèmes de Deligne sur la cohomologie des variétés sur les corps finis.

3.4. Théorèmes de Bertini relatifs (Jannsen et Saito)

La littérature contient diverses versions du théorème de Bertini sur les sections hyperplanes d'une variété X projective et lisse sur un corps k.

Dans un premier temps, on affirme l'existence de sections hyperplanes $X \cap H$ lisses sur k. Une référence sur le sujet est un livre de J.-P. Jouanolou. Ceci vaut si le corps k est infini. Si le corps est un corps fini $\mathbf{F}$, l'énoncé vaut encore si l'on remplace le plongement projectif donné par un plongement de Veronese convenable. B. Poonen et O. Gabber ont donné des énoncés précis dans cette direction. Pour les problèmes ici considérés, on peut aussi garder le plongement donné et remplacer le corps fini $\mathbf{F}$ donné par deux extensions finies de $\mathbf{F}$ suffisamment grandes et de degrés premiers entre eux.

Dans un second temps, on se donne une sous-k-variété fermée $Z \subset X$ et l'on demande s'il existe une section hyperplane lisse de X qui contient Z. Il faut bien sûr imposer des conditions à Z, par exemple Z lisse et $2\dim(Z) < \dim(X)$. A. Altman et S. Kleiman ont consacré un article à cette question. Sur un corps fini, Poonen a obtenu les énoncés adéquats.

Quand on étudie les schémas arithmétiques, pour faire des démonstrations par récurrence sur la dimension, on a besoin d'adapter ces théorèmes au-dessus d'un anneau de valuation discrète (ou mieux d'un schéma de Dedekind).

L'énoncé suivant (Jannsen et Saito [**21**]) correspond à la première situation.

THÉORÈME 3.11 (Théorème de Bertini relatif, version 1). — *Soit R un anneau de valuation discrète. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{QSP})$ de dimension $\dim(X) \geq 2$. Il existe un*

R-plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}^n_R$ *et un* R*-hyperplan* $H = \mathbf{P}^{n-1}_R \subset \mathbf{P}^n_R$ *tels que l'intersection schématique* $X \cap H$ *soit dans* $\mathrm{Ob}(\mathcal{QSP})$ *et que le couple* $(X, X \cap H)$ *soit une* $\mathcal{QSP}$*-paire (ample).*

La seconde situation mène à un énoncé plus technique, dû aussi à Jannsen et Saito ([**35**], Thm. 4.2). On impose en particulier des conditions de transversalité entre le sous-schéma régulier $Z \subset X$ considéré et les composantes de la fibre spéciale réduite. Je ne reproduis pas cet énoncé ici. Dans ce rapport, je me contente de l'appeler « *Théorème de Bertini relatif, version 2* ».

3.5. Lemme de déplacement ; homologie d'un éclatement

La démonstration du lemme de déplacement suivant ne pose pas de difficulté particulière.

PROPOSITION 3.12. — *Soit* X *un schéma régulier intègre dans* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. *Soit* $Y \subset X$ *un sous-schéma fermé propre. Soit* $U : X \setminus Y$. *Pour tout entier* $q \geq 0$, *l'application* $\oplus_{x \in X_q \cap U} \mathbf{Z} \to CH_q(X)$ *est surjective.*

La proposition suivante n'est pas non plus trop surprenante. Elle décrit le comportement du groupe $H_2(\bullet, \Lambda)$ dans un éclatement.

PROPOSITION 3.13. — *Soit* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *régulier de dimension* $d + 1$. *Soient* $\pi : \tilde{X} \to X$ *l'éclaté de* X *en un point fermé* $x \in X_s$, *et* $E \hookrightarrow \tilde{X}$ *le diviseur exceptionnel. Supposons* $cd_l(F) \leq 1$. *Soit* $W \subset E \simeq \mathbf{P}^d_{\kappa(x)}$ *un sous-schéma fermé intègre de dimension 1. Si* $\Lambda = \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$, *ou si* $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$ *et le degré sur* $\kappa(x)$ *de* $W \hookrightarrow \mathbf{P}^d_{\kappa(x)}$ *est premier à* l, *alors*

$$\mathrm{Ker}\,[\pi_* : H_2(\tilde{X}, \Lambda) \to H_2(X, \Lambda)] = \Lambda(W).$$

Pour $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$, le groupe $\Lambda(W)$ est par définition le sous-groupe de $H_2(\tilde{X}, \mathbf{Z}/l^n)$ engendré par $\rho_X([W])$. Pour $\Lambda = \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$, c'est par définition la limite inductive de ces groupes pour n tendant vers l'infini.

Pour établir la proposition, on utilise les isomorphismes

$$H_2(E, \mathbf{Z}/l^n) \simeq H^{2d-2}(E, \mathbf{Z}/l^n(d-1)) \simeq \mathbf{Z}/l^n,$$

où le second résulte de l'hypothèse $cd_l(F) \leq 1$ et du calcul bien connu de la cohomologie d'un espace projectif.

3.6. Démonstration du théorème principal

THÉORÈME 3.14. — *Supposons R hensélien et F fini ou séparablement clos. Soit X un R-schéma dans $Q\mathcal{J}\mathcal{P}$. Pour $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$ ou $\Lambda = \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$, l'application cycle*

$$\rho_X : CH_1(X) \otimes \Lambda \to H_2(X, \Lambda)$$

est surjective.

Démonstration. — On peut supposer X intègre et $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$. Pour $\dim(X) = 1$, resp. $\dim(X) = 2$, la proposition 3.4, resp. 3.5, montre que l'application cycle est un isomorphisme. Supposons $\dim(X) \geq 3$. Pour établir l'énoncé, on procède par récurrence sur la dimension. Par le théorème de Bertini relatif, version 1, il existe un diviseur ample $Y \subset X$ qui définit une $Q\mathcal{J}\mathcal{P}$-paire ample. Soit $U := X \setminus Y$. Par la fonctorialité de l'homologie et de l'application cycle, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} CH_1(Y)/l^n & \longrightarrow & CH_1(X)/l^n & & \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X} & & \\ H_2(Y, \mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & H_2(X, \mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & H_2(U, \mathbf{Z}/l^n) \end{array}$$

où la suite inférieure est exacte. Par hypothèse de récurrence, ρ_Y est surjective. Par le théorème 3.9 (Lefschetz affine affiné) pour la $Q\mathcal{J}\mathcal{P}$-paire ample sur l'anneau de valuation discrète hensélien R, comme la dimension de X est au moins 3, on a $H_2(U, \mathbf{Z}/l^n) = 0$. Ainsi ρ_X est surjectif. □

THÉORÈME 3.15. — *Supposons R hensélien excellent et F fini ou séparablement clos. Soit X un R-schéma dans $Q\mathcal{J}\mathcal{P}$ de dimension 3. L'application cycle*

$$\rho_X : CH_1(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to H_2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$$

est bijective.

Démonstration. — On a déjà établi la surjectivité. Soit α dans le noyau de ρ_X. Par le lemme de déplacement 3.12, on peut représenter α sous la forme $\sum_{1 \leq j \leq m} [C_j] \otimes \lambda_j$ avec $\lambda_j \in \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ et des courbes fermées intègres $C_j \subset X$ non contenues dans la fibre spéciale X_s. Par une version de la résolution plongée des singularités des courbes due à U. Jannsen (appendice de [**35**], qui utilise l'hypothèse que X est excellent), on peut trouver un composé de N éclatements $\pi : \tilde{X} \to X$ en des points fermés de la fibre spéciale de façon que les transformés propres $\tilde{C}_j$ des C_j soient des courbes régulières sans point commun deux à deux et satisfassent des conditions de transversalité convenables par rapport aux composantes réduites de la fibre spéciale $\tilde{X}_s$.

Notons $\tilde{E}_i \subset \tilde{X}$, $i = 1, \ldots, N$ les transformés propres dans $\tilde{X}$ des divers diviseurs exceptionnels.

Par le théorème de Bertini relatif, version 2, il existe une $\mathcal{QSP}$-paire ample $(\tilde{X}, Y)$ telle que le diviseur ample $\iota : Y \subset \tilde{X}$ contienne tous les $\tilde{C}_j$. On a $\alpha = \pi_*\iota_*\beta$, avec $\beta = \sum_j [\tilde{C}_j] \otimes \lambda_j \in CH_1(Y) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. Comme Y est ample, pour chaque i, le sous-schéma $W_i := \tilde{E}_i \cap Y$ du schéma $\tilde{X}$ (de dimension 3) est un fermé non vide, intègre et de dimension 1, et W_i n'est inclus dans aucun $\tilde{E}_{i'}$ pour $i' \neq i$. Par une version itérée de la proposition 3.13 (homologie d'un éclatement), on a

$$\mathrm{Ker}\,[\pi_* : H_2(\tilde{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \to H_2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(W_i).$$

Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & CH_1(Y) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \xrightarrow{\iota_*} & CH_1(\tilde{X}) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\tilde{X}}} \\ H_3(\tilde{X} \setminus Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) & \longrightarrow & H_2(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) & \xrightarrow{\iota_*} & H_2(\tilde{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \end{array}$$

la ligne médiane est la suite exacte de localisation, et le carré est commutatif. Le théorème 3.9 (théorème de Lefschetz affine affiné) assure la nullité du terme H_3. Comme Y est dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et de dimension 2, on sait que la flèche ρ_Y est injective.

Combinant ces résultats avec le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH_1(\tilde{X}) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \xrightarrow{\rho_{\tilde{X}}} & H_2(\tilde{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ CH_1(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \xrightarrow{\rho_X} & H_2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \end{array}$$

on voit que β est dans le groupe engendré par les W_i dans $CH_1(Y) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. Comme l'image par $\pi : \tilde{X} \to X$ de chaque W_i est un point fermé, on conclut

$$\alpha = \pi_*\iota_*(\beta) = 0 \in CH_1(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l. \qquad \square$$

THÉORÈME 3.16. — *Supposons R hensélien excellent et F fini ou séparablement clos. Soit X un R-schéma dans $\mathcal{QSP}$ de dimension 3.*

(a) *L'application cycle*

$$\rho_X : CH_1(X) \otimes \mathbf{Z}/l^n \to H_2(X, \mathbf{Z}/l^n)$$

est bijective.

(b) *Pour tout $n > 0$ on a $KH_3(X, \mathbf{Z}/l^n) = KH_3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)[l^n] = 0$.*

Démonstration. — La surjectivité dans (a) a été établie au théorème 3.14. Il reste à établir l'injectivité. D'après la proposition 3.4 (dont la preuve utilise le théorème de Merkur'ev et Suslin), pour établir (a) et (b) il suffit de montrer $KH_3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$. On fixe un diviseur $Y \subset X$ tel que $(X, Y; U)$ soit une $\mathcal{QSP}$-paire ample. Comme

X est de dimension 3, la restriction $KH_3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \to KH_3(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$ est injective (c'est purement formel, ceci vaut pour tout ouvert U dense dans X). Il suffit donc de montrer $KH_3(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$. On a le diagramme commutatif de suites de localisation

$$\begin{array}{ccccccc} CH_1(Y) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & CH_1(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & CH_1(U) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \rho_Y & & \downarrow \rho_X & & \downarrow \rho_U & & \\ H_2(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) & \longrightarrow & H_2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) & \longrightarrow & H_2(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l). & & \end{array}$$

Nous avons déjà établi que ρ_Y et ρ_X sont bijectives. Ainsi ρ_U est injective. Mais $H_2(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$ (Thm. 3.9, Lefschetz affine affiné). Donc $CH_1(U) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l = 0$. Par ailleurs $H_3(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$ (Thm. 3.9, Lefschetz affine affiné). En appliquant la proposition 3.4(3) à U, on conclut $KH_3(U, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$. □

Le théorème principal en dimension quelconque s'énonce :

THÉORÈME 3.17. — *Supposons R hensélien excellent et F fini ou séparablement clos. Soit X un R-schéma dans $Q\mathcal{SP}$. L'application cycle*

$$\rho_X : CH_1(X) \otimes \mathbf{Z}/l^n \to H_2(X, \mathbf{Z}/l^n)$$

est un isomorphisme de groupes finis.

Démonstration. — La surjectivité a été établie (Thm. 3.14). Pour établir l'injectivité, on fait une récurrence sur la dimension, dans le même esprit que celle du théorème 3.15, avec $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$, en utilisant le théorème de Bertini relatif, version 2. Je renvoie ici le lecteur à [**35**]. Des isomorphismes $H_2(X, \mathbf{Z}/l^n) \simeq H^{2d}(X, \mathbf{Z}/l^n(d))$ (Proposition 3.1) et $H^{2d}(X, \mathbf{Z}/l^n(d)) \simeq H^{2d}(X_s, \mathbf{Z}/l^n(d))$ (changement de base propre, R est hensélien) on déduit que pour F séparablement clos ou fini les groupes $H_2(X, \mathbf{Z}/l^n)$ sont finis. □

Remarque 3.18. — K. Sato [**40**] a défini des applications cycle ρ_{X,p^r} sur les quotients $CH_1(X)/p^r$, à valeurs dans la cohomologie étale de certains complexes de $\mathbf{Z}/p^r$-faisceaux étales. Lorsque X/R est propre, régulier et semistable, Saito et Sato montrent dans [**37**] que ces applications sont surjectives.

3.7. Applications aux groupes de Chow

Le théorème suivant est une sorte de théorème de Lefschetz pour le groupe de Chow des 1-cycles modulo un entier.

THÉORÈME 3.19. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel F. Soit X un R-schéma dans $Q\mathcal{SP}$. Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $i : Y \hookrightarrow X$ un diviseur tel que (X, Y) soit une $Q\mathcal{SP}$-paire ample. Soit $U = X \setminus Y$.*

(a) *Supposons F séparablement clos et* $\dim(X) = d+1 \geq 2$. *Alors* $CH_1(U)/l^n = 0$ *et l'application* $i_* = CH_1(Y)/l^n \to CH_1(X)/l^n$ *est surjective. Si* $d \geq 2$, *elle est bijective.*

(b) *Supposons F fini et* $\dim(X) = d+1 \geq 3$. *Alors* $CH_1(U)/l^n = 0$ *et l'application* $i_* = CH_1(Y)/l^n \to CH_1(X)/l^n$ *est surjective. Si* $d \geq 3$, *elle est bijective.*

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & CH_1(Y)/l^n & \xrightarrow{i_*} & CH_1(X)/l^n & \longrightarrow & CH_1(U)/l^n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_U} \\ H_3(U,\mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & H_2(Y,\mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & H_2(X,\mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & H_2(U,\mathbf{Z}/l^n). \end{array}$$

D'après le théorème 3.17, ρ_Y et ρ_X sont des isomorphismes. Le théorème résulte alors du théorème de Lefschetz affine affiné (Théorème 3.9). □

THÉORÈME 3.20. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel F séparablement clos. Soit X un objet de $\mathcal{QSP}$, et soient $Y_1, \ldots, Y_N$ les composantes de $X_{s,red}$. Alors pour tout entier $n > 0$ premier à $car(F)$, l'intersection avec les composantes induit un isomorphisme*

$$CH_1(X)/n \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Démonstration. — Soit $d = \dim(X) - 1$. On a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} H_2(X,\mathbf{Z}/l^n) &\simeq H^{2d}(X,\mathbf{Z}/l^n(d)) \\ &\simeq H^{2d}(X_s,\mathbf{Z}/l^n(d)) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{N} H^{2d}(Y_j,\mathbf{Z}/l^n(d)) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbf{Z}/l^n, \end{aligned}$$

et d'après le théorème principal 3.17 on a un isomorphisme $CH_1(X)/l^n \simeq H_2(X,\mathbf{Z}/l^n)$. On vérifie que pour chaque composante Y_i la flèche associée $CH_1(X)/l^n \to \mathbf{Z}/l^n$ associe à un 1-cycle la classe modulo l^n de son nombre d'intersection avec le diviseur vertical $Y_i \subset X$. □

THÉORÈME 3.21. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent, de corps des fractions k, de corps résiduel F fini ou séparablement clos. Soit p l'exposant caractéristique de F. Soit X un R-schéma projectif et lisse à fibres géométriquement connexes. Soit $i : X_s \hookrightarrow X$ la fibre spéciale, et $j : V = X_\eta \hookrightarrow X$ la fibre générique.*

(1) *Pour tout entier $n > 0$ premier à $p = \mathrm{car}(F)$, on a des isomorphismes de groupes abéliens finis*

$$CH_0(X_s)/n \xleftarrow{\simeq} CH_1(X)/n \xrightarrow{\simeq} CH_0(V)/n,$$

où $CH_0(V)$ désigne le groupe de Chow de dimension zéro usuel de la k-variété V, la flèche de gauche est i^* et la flèche de droite j^*.

(2) *Supposons F séparablement clos. Le groupe $A_0(V)$ est divisible par tout entier n premier à p.*

(3) *Supposons F fini.*

(a) *Le groupe $A_0(V)$ est extension du groupe fini $A_0(X_s)$ par un groupe p'-divisible.*

(b) *Pour tout entier n premier à p, l'application cycle $CH_0(V)/n \to H^{2d}(V, \mu_n^{\otimes d})$ est injective.*

(c) *Soit* $\mathrm{Br}'(V)$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Br}\ V$ *de torsion première à p. Le noyau à gauche de l'accouplement*

$$A_0(V) \times \mathrm{Br}'\ V \to \mathrm{Br}'k \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est divisible par tout entier n premier à p.

Démonstration. — Soit d la dimension de V. Soit n un entier premier à p. Les applications cycle sur X et sur X_s s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH_1(X)/n & \xrightarrow{cl_X} & H^{2d}(X, \mathbf{Z}/n(d)) \\ \downarrow{\scriptstyle i^*} & & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ CH_0(X_s)/n & \xrightarrow{cl_{X_s}} & H^{2d}(X_s, \mathbf{Z}/n(d)). \end{array}$$

La flèche verticale de droite est un isomorphisme (changement de base propre). D'après le théorème principal 3.17, la flèche cl_X est un isomorphisme. Comme X est lisse sur R et R hensélien, la flèche de restriction $i^* : CH_1(X) \to CH_0(X_s)$ est surjective. Ceci suffit à assurer que toutes les flèches dans le diagramme ci-dessus sont des isomorphismes. Il en est donc ainsi de $i^* : CH_1(X)/n \to CH_0(X_s)/n$.

[Lorsque F est un corps fini, on reconnaît dans l'isomorphisme obtenu $CH_0(X_s)/n \simeq H^{2d}(X_s, \mathbf{Z}/n(d))$ un cas particulier du théorème du corps de classes non ramifié pour les variétés projectives et lisses sur un corps fini, voir **[42]**.]

Une suite de localisation élémentaire fournit la suite exacte

$$CH_1(X_s)/n \xrightarrow{i_*} CH_1(X)/n \xrightarrow{j^*} CH_0(X_\eta)/n \to 0.$$

Comme X_s est un diviseur principal sur X, l'application composée

$$CH_1(X_s)/n \xrightarrow{i_*} CH_1(X)/n \xrightarrow{i^*} CH_0(X_s)/n$$

est nulle. Comme on a établi que i^* est un isomorphisme, ceci implique que i_* est nul. Ainsi j^* est un isomorphisme. Ceci établit le point (1).

Le point (2) en résulte, puisque le groupe $A_0(X_s)$ est divisible.

Supposons F fini. Le théorème de Kato et Saito **[27]** assure que le groupe $A_0(X_s)$ est fini. L'application de réduction $A_0(X_\eta) \to A_0(X_s)$ est surjective (lemme de Hensel). En utilisant (1) (voir aussi le théorème 2.3) on obtient (3)(a). Comme X/R est lisse, une version connue de la conjecture de Gersten assure que l'application de restriction $H^{2d}(X, \mu_n^{\otimes d}) \to H^{2d}(V, \mu_n^{\otimes d})$ est injective. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH_1(X)/n & \xrightarrow{j_*} & CH_0(V)/n \\ \downarrow{\scriptstyle cl_X} & & \downarrow{\scriptstyle cl_V} \\ H^{2d}(X, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^{2d}(V, \mathbf{Z}/n), \end{array}$$

où la flèche supérieure est surjective, on déduit (3)(b). L'énoncé (3)(c) résulte alors du fait connu que l'accouplement naturel

$$H^{2d}(V, \mu_n^{\otimes d}) \times H^2(V, \mu_n^{\otimes d}) \to H^{2d+2}(V, \mu_n^{\otimes d+1}) \simeq \mathbf{Z}/n$$

est une dualité parfaite de groupes finis, et que cet accouplement induit un accouplement

$$CH_0(V)/n \times \mathrm{Br}(V)[n] \to \mathbf{Z}/n. \qquad \square$$

LEMME 3.22. — *Soit A un groupe abélien.*

(i) *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) *Le groupe A est la somme directe d'un groupe fini d'ordre premier à p et d'un groupe p'-divisible.*

(b) *Pour presque tout premier $l \neq p$, le quotient A/l est nul, et pour tout premier $l \neq p$, il existe un entier $n_l > 0$ tel que la projection $A/l^{n+1} \to A/l^n$ soit un isomorphisme de groupes finis pour tout $n \geq n_l$.*

(ii) *Si un groupe A possède ces propriétés, il en est de même de tout quotient de A.*

THÉORÈME 3.23. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent, de corps des fractions k, de corps résiduel F fini ou séparablement clos. Soit p l'exposant caractéristique de F. Soit V une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur k. Soit X un R-schéma dans $\mathcal{QSP}$ et soit V la k-variété X_η, supposée géométriquement intègre. Le groupe $A_0(V)$ est isomorphe à la somme directe d'un groupe fini d'ordre premier à p et d'un groupe p'-divisible. En particulier $A_0(V)/l = 0$ pour presque tout premier l, et $A_0(V)/n$ est fini pour tout $n > 0$ premier à p.*

Démonstration. — D'après le théorème 3.19 il existe une R-courbe $Y \hookrightarrow X$ qui est dans $\mathcal{QSP}$ et pour laquelle pour tout l premier, $l \neq p$, et pour tout $n > 0$ l'application $CH_1(Y)/l^n \to CH_1(X)/l^n$ est surjective. Les restrictions à la fibre générique $CH_1(X) \to CH_0(X_\eta)$ et $CH_1(Y) \to CH_0(Y_\eta)$ sont clairement surjectives, et elles sont compatibles. Ainsi les applications naturelles $CH_0(Y_\eta)/l^n \to CH_0(X_\eta)/l^n$ sont

surjectives. Cela implique le même énoncé pour $A_0(Y_\eta)/l^n \to A_0(X_\eta)/l^n$. Pour la courbe projective et lisse Y_η, on montre que le groupe $A_0(Y_\eta)$ est la somme directe d'un groupe fini d'ordre premier à p et d'un groupe p'-divisible. Le lemme 3.22 donne alors l'énoncé sur $A_0(X_\eta)$. □

Remarque 3.24. — La finitude de $A_0(V)/n$ et de $CH_0(V)/n$ résulte directement de la finitude de $CH_1(X)/n \simeq H_2(X, \mathbf{Z}/l^n)$.

THÉORÈME 3.25. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent, de corps des fractions k, de corps résiduel F fini ou séparablement clos. Soit p l'exposant caractéristique de F. Soit V une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur k. Le groupe $A_0(V)$ est isomorphe à la somme directe d'un groupe fini d'ordre premier à p et d'un groupe p'-divisible. En particulier $A_0(V)/l = 0$ pour presque tout premier l, et $A_0(V)/n$ est fini pour tout $n > 0$ premier à p.*

Démonstration. — Le théorème d'uniformisation de de Jong **[24]**, dans la version raffinée de Gabber, théorème décrit par Illusie dans **[18]**, implique que, pour tout premier $l \neq p$, il existe un k-morphisme propre $f : V' \to V$, génériquement fini de degré d *premier à* l, et une extension finie d'anneaux de valuation discrète R'/R tels que la variété V' soit lisse et géométriquement intègre sur le corps des fractions de R' et admette un modèle X'/R' qui soit $\mathcal{QSP}$. Les propriétés usuelles des groupes de Chow des variétés lisses impliquent que le composé

$$A_0(V) \xrightarrow{f^*} A_0(V') \xrightarrow{f_*} A_0(V)$$

est la multiplication par d. Le théorème résulte alors du théorème 3.23. □

Remarque 3.26. — Le théorème originel de de Jong **[24]** combiné avec le théorème 3.23 suffit à établir la trivialité de $A_0(V)/l$ pour presque tout premier l. C'est cet énoncé que l'on trouve dans **[35]**.

COROLLAIRE 3.27. — *Soient R, p et k comme dans le théorème ci-dessus. Soit V une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur k. Si pour tout corps algébriquement clos Ω contenant k on a $A_0(V \times_k \Omega) = 0$, alors le groupe $A_0(V)$ est la somme directe d'un groupe fini et d'un groupe d'exposant une puissance de p.*

Démonstration. — Sur un corps quelconque, on montre en effet que le groupe $A_0(V)$ de toute telle variété V est annulé par un entier positif. L'énoncé du corollaire résulte alors du théorème. □

Le résultat s'applique en particulier aux k-variétés géométriquement rationnellement connexes (au sens de Kollár, Miyaoka, Mori). Ainsi le groupe $A_0(V)$ d'une variété rationnellement connexe sur le corps $k = \mathbf{C}((t))$ est un groupe fini. C'est une question ouverte de savoir si dans ce cas le groupe $A_0(V)$ est nul.

3.8. Applications aux conjectures 3.7 et 3.8

THÉORÈME 3.28. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel F. Soit X un R-schéma dans $Q\mathcal{SP}$. Soit $n \geq 1$ un entier.*

(a) *Si F est un corps séparablement clos, alors $KH_2(X, \mathbf{Z}/l^n)=0$ et $KH_2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)=0$.*

(b) *Si F est un corps fini, on a $KH_2(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$.*

Démonstration. — Dans chacun des cas considérés, la proposition 3.6 assure que la suite spectrale de niveau est concentrée dans le premier quadrant. La forme de cette suite spectrale donne alors des suites exactes

$$CH_1(X) \otimes \Lambda \to H_2(X, \Lambda) \to KH_2(X, \Lambda) \to 0.$$

Du théorème 3.14 on déduit $KH_2(X, \Lambda) = 0$. □

THÉORÈME 3.29. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel F. Soit X un R-schéma dans $Q\mathcal{SP}$. Soit $n \geq 1$ un entier.*

(a) *Si F est un corps séparablement clos, alors $KH_3(X, \mathbf{Z}/l^n)=0$ et $KH_3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)=0$.*

(b) *Si F est un corps fini et $\dim(X) \leq 4$, alors $KH_3(X, \mathbf{Z}/l^n) = 0$.*

(c) *Si F est un corps fini, on a $KH_3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$.*

Démonstration. — L'énoncé est trivial pour $\dim(X) \leq 2$, et il a été démontré pour $\dim(X) = 3$ (Thm. 3.16). Supposons donc $\dim(X) \geq 4$ et établissons le résultat par récurrence sur la dimension. Soit $(X, Y; U)$ une $Q\mathcal{SP}$-paire ample. Pour $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$ si F est séparablement clos et $\Lambda = \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ si F est fini, pour tout $X \in \mathcal{C}$, la proposition 3.6 assure que la suite spectrale de niveau est concentrée dans le premier quadrant (c'est ici qu'on se limite à $\Lambda = \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ lorsque F est un corps fini). Appliquant ceci à U, on trouve une suite exacte

$$H_3(U, \Lambda) \to KH_3(U, \Lambda) \to CH_1(U) \otimes \Lambda.$$

Lorsque $\dim(U) = 4$, la forme de la suite spectrale assure que l'on a encore cette suite exacte pour F fini et $\Lambda = \mathbf{Z}/l^n$.

D'après le théorème 3.19, on a $CH_1(U) \otimes \Lambda = 0$. D'après le théorème de Lefschetz affine affiné 3.9, comme on a $\dim(U) \geq 4$, on a $H_3(U, \Lambda) = 0$. On conclut donc $KH_3(U, \Lambda) = 0$ dans chacun des trois cas (a), (b), (c).

Par ailleurs on a une longue suite exacte

$$\cdots \to KH_3(Y, \Lambda) \to KH_3(X, \Lambda) \to KH_3(U, \Lambda) \to \cdots$$

Par hypothèse de récurrence, $KH_3(Y, \Lambda) = 0$. Ainsi $KH_3(X, \Lambda) = 0$. □

Remarque 3.30. — Dans [**35**], les auteurs demandent si l'énoncé (b) vaut en toute dimension. En établissant le théorème 3.16, ils montrent que c'est le cas pour $\dim(X) = 3$. Dans l'argument ci-dessus, ils commencent la récurrence en dimension 3, et n'observent pas le résultat pour $\dim(X) = 4$.

4. RÉSULTATS RÉCENTS ET QUESTIONS OUVERTES

Le théorème de Saito et Sato joue un rôle important dans la démonstration du théorème suivant, dont la démonstration, qui utilise la théorie de Hodge et est très élaborée, ne peut être évoquée ici.

THÉORÈME 4.1 (M. Asakura et S. Saito [**2**]). — *Soient k un corps p-adique, R son anneau d'entiers et F son corps résiduel. Soit $X \subset \mathbf{P}^3_R$ une R-hypersurface lisse de degré au moins 5. Supposons la fibre générique X_k très générale. Soit r le rang du groupe de Picard de la fibre spéciale X_F. Alors le sous-groupe de torsion l-primaire de $A_0(X)$ est somme d'un groupe fini et de $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{r-1}$.*

Il est facile de donner des exemples de telles surfaces avec $r > 1$.

Le théorème suivant généralise une partie du théorème 1.2, qui porte sur les courbes, pour lesquelles $\mathrm{Br}X = 0$ (Théorème 1.3).

THÉORÈME 4.2 (S. Saito et K. Sato [**37**]). — *Soient k un corps p-adique, R son anneau d'entiers, X un R-schéma propre, connexe et régulier. Le sous-groupe $\mathrm{Br}X \subset \mathrm{Br}X_k$ est dans le noyau à droite de l'accouplement*

$$CH_0(X_k) \times \mathrm{Br}X_k \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Si le théorème de pureté vaut pour le groupe de Brauer de X, alors $\mathrm{Br}X \subset \mathrm{Br}X_k$ est le noyau à droite de cet accouplement.

La partie première à p de ce théorème est déjà dans [**12**]. La partie p-primaire est beaucoup plus délicate.

Le théorème de pureté vaut pour le groupe de Brauer si la dimension de X est au plus 3 (Gabber), il vaut pour la torsion non p-primaire du groupe de Brauer (Gabber [**15**]), il vaut aussi pour la torsion p-primaire dans un certain nombre de cas (voir [**37**]).

Quelques questions

Soient k un corps p-adique et V une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe.

(1) Pour V de dimension au moins 3 et $n > 0$ entier, le groupe $A_0(V)[n]$ est-il fini ?

(2) Le quotient $A_0(V)/p$ est-il fini ?

(3) Les noyaux des applications $\mathrm{alb}_X : A_0(V) \to \mathrm{Alb}_V(k)$ et $A_0(V) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont-ils chacun extension d'un groupe fini par un groupe divisible ?

(4) Supposons que V/k est la fibre générique de X/R projectif quasisemistable sur l'anneau des entiers R de k. Pour n entier premier à p, le théorème principal 3.17 donne une formule pour le quotient $CH_1(X)/n$. Peut-on en déduire une formule pour $CH_0(V)/n$? Un cas particulier est étudié dans **[14]**.

(5) Peut-on comprendre de façon « invariante » l'exemple de Parimala et Suresh **[31]** ?

RÉFÉRENCES

[1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.-L. VERDIER (éds.) – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Math., vol. 305, Springer, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).

[2] M. ASAKURA & S. SAITO – Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, *Algebra & Number Theory* **1** (2007), p. 163–181.

[3] S. BLOCH – Torsion algebraic cycles, K_2, and Brauer groups of function fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), p. 941–945.

[4] ———, *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series, vol. IV, 1980, Second edition, New mathematical monographs vol. 16, Cambridge University Press (2010).

[5] ———, Torsion algebraic cycles, K_2, and Brauer groups of function fields, in *The Brauer group*, Lecture Notes in Math., vol. 844, Springer, 1981, p. 75–102.

[6] S. BLOCH & A. OGUS – Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **7** (1974), p. 181–201.

[7] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, in *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, Lecture Notes in Math., vol. 1553, Springer, 1993, p. 1–49.

[8] ———, L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **7** (1995), p. 51–73.

[9] ———, Zéro-cycles sur les surfaces sur un corps p-adique : quelques résultats obtenus au moyen de la K-théorie algébrique. Notes distribuées à l'école d'été de Sestri Levante, juillet 2004. Disponible sur la page `http://www.math.u-psud.fr/~colliot/liste-cours-exposes.html`.

[10] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & W. RASKIND – $\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), p. 165–199.

[11] ———, Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion, *Invent. math.* **105** (1991), p. 221–245.

[12] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & S. SAITO – Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer, *Int. Math. Res. Not.* **1996** (1996), p. 151–160.

[13] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC & C. SOULÉ – Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50** (1983), p. 763–801.

[14] C. S. DALAWAT – Le groupe de Chow d'une surface rationnelle sur un corps local, *Compos. Math.* **141** (2005), p. 344–358.

[15] K. FUJIWARA – A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber), in *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, 2002, p. 153–183.

[16] W. FULTON – *Intersection theory*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 2, Springer, 1984.

[17] A. GROTHENDIECK – Le groupe de Brauer, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 3, Masson et North-Holland, 1968.

[18] L. ILLUSIE – On Gabber's refined uniformization, exposés à l'Université de Tokyo, `http://www.math.u-psud.fr/~illusie/`, 2008.

[19] U. JANNSEN – Hasse principles for higher-dimensional fields, prépublication `http://arxiv.org/abs/0910.2803`.

[20] U. JANNSEN & S. SAITO – Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields, *Doc. Math.*, extra vol. (2003), p. 479–538.

[21] ———, Bertini and Lefschetz theorems for schemes over discrete valuation rings, with applications to higher class field theory, prépublication, `http://arxiv.org/abs/0911.1470`.

[22] ———, Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields, prépublication, `http://arxiv.org/abs/0910.2815`.

[23] U. JANNSEN, S. SAITO & K. SATO – Étale duality for constructible sheaves on arithmetic schemes, prépublication, `http://arxiv.org/abs/0910.3759`.

[24] A. J. DE JONG – Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), p. 51–93.

[25] B. KAHN – Résultats de "pureté" pour les variétés lisses sur un corps fini, in *Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 407, Kluwer Acad. Publ., 1993, p. 57–62.

[26] K. KATO – A Hasse principle for two-dimensional global fields, *J. reine angew. Math.* **366** (1986), p. 142–183.

[27] K. KATO & S. SAITO – Unramified class field theory of arithmetical surfaces, *Ann. of Math.* **118** (1983), p. 241–275.

[28] G. LAUMON – Homologie étale, in *Séminaire de géométrie analytique (École Norm. Sup., Paris, 1974-75)*, Astérisque, vol. 36–37, Soc. Math. France, 1976, p. 163–188.

[29] S. LICHTENBAUM – Duality theorems for curves over p-adic fields, *Invent. math.* **7** (1969), p. 120–136.

[30] A. S. MERKUR'EV & A. A. SUSLIN – K-cohomologie des variétés de Severi-Bauer et homomorphisme de norme résiduelle (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), p. 1011–1046, 1135–1136.

[31] R. PARIMALA & V. SURESH – Zero-cycles on quadric fibrations : finiteness theorems and the cycle map, *Invent. math.* **122** (1995), p. 83–117.

[32] M. RAPOPORT & T. ZINK – Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik, *Invent. math.* **68** (1982), p. 21–101.

[33] W. RASKIND – Torsion algebraic cycles on varieties over local fields, in *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 279, Kluwer Acad. Publ., 1989, p. 343–388.

[34] S. SAITO – On the cycle map for torsion algebraic cycles of codimension two, *Invent. math.* **106** (1991), p. 443–460.

[35] S. SAITO & K. SATO – A finiteness theorem for zero-cycles over p-adic fields. With an appendix by Uwe Jannsen, *Ann. of Math.* **172** (2010), p. 1593–1639.

[36] ———, A p-adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes, *Documenta Mathematica* (2010), p. 525–594, extra volume : Andrei A. Suslin's sixtieth birthday.

[37] ———, Zero-cycles on varieties over p-adic fields and Brauer groups, prépublication `http://arxiv.org/abs/0906.2273`.

[38] P. SALBERGER – Torsion cycles of codimension 2 and l-adic realizations of motivic cohomology, in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92*, Progr. Math., vol. 116, Birkhäuser, 1993, p. 247–277.

[39] K. SATO – Injectivity of the torsion cycle map of codimension two of varieties over p-adic fields with semi-stable reduction, *J. reine angew. Math.* **501** (1998), p. 221–235.

[40] ———, p-adic étale Tate twists and arithmetic duality, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), p. 519–588.

[41] M. SPIESS – On indecomposable elements of K_1 of a product of elliptic curves, *K-Theory* **17** (1999), p. 363–383.

[42] T. SZAMUELY – Corps de classes des schémas arithmétiques, *Astérisque* **332** (2010), p. 257–286, Séminaire Bourbaki, volume 2008/2009, exposé n° 1006.

[43] J. TATE – WC-groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, Secrétariat mathématique, Soc. Math. France, 1958, Séminaire Bourbaki, volume 1957/1958, exposé n° 156. Reproduit dans Séminaire Bourbaki, Vol. 4, Exp. No. 156, 265–277, Soc. Math. France, Paris, 1995.

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

CNRS
Université Paris XI
UMR 8628 du CNRS
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F–91405 ORSAY Cédex
E-mail : jlct@math.u-psud.fr