ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PHILIPPE CORNU

Variétés localement réductives et variétés $\overline{G}, \overline{H}$-structurées

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 10, n° 2 (1983), p. 181-196

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_2_181_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Variétés localement réductives et variétés $(\bar{G}, \bar{H})$-structurées.

PHILIPPE CORNU

0. – Introduction.

Quand on considère une variété V localement réductive, c'est-à-dire munie d'une connexion réductive *globale* (caractérisée par $\nabla T = 0$ et $\nabla R = 0$) on sait lui associer un espace homogène réductif $\bar{G}/\bar{H}$ (Théorème de Nomizu) — ce qui donne lieu à une équivalence locale entre deux $\bar{H}$-structures, l'une sur V, $E(V, \bar{H})$, l'autre sur $\bar{G}/\bar{H}$, $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$.

Inversement, on a la situation suivante — partant de l'équivalence locale évoquée ci-dessus, on n'obtient pour E que des connexions réductives *locales*: le problème se posant naturellement alors est de caractériser des obstructions pour le passage du local au global.

Pour l'étude des variétés munies d'une $\bar{H}$-structure localement équivalente à $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$ avec $\bar{G}/\bar{H}$ réductif, on introduit la notion de variété $(\bar{G}, \bar{H})$-structurée. Il s'agit de variétés munies d'une structure de fibré en systèmes triples de Lie généraux sur le fibré tangent, systèmes dont les lois sont localement réalisables par des champs de vecteurs. On remarquera que les variétés différentiables et les variétés f-plates (cf. [1]) sont des cas particuliers de variétés $(\bar{G}, \bar{H})$-structurées, en ce sens qu'au lieu d'avoir comme modèle un espace homogène réductif, on prend un espace euclidien ou un groupe de Lie.

Ensuite, on fait une construction « à la Chern-Weil » d'un morphisme caractéristique pour les fibrés principaux, dont la base est modelée sur un espace homogène réductif. Construction qui donne les obstructions pour le passage du local au global évoqué tout à l'heure. On achève avec un autre exemple d'utilisation de l'outil cohomologique que l'on a élaboré.

Pervenuto alla Redazione l'11 Maggio 1982.

I. – Espaces homogènes réductifs et variétés localement réductives.

1) D'abord quelques rappels afin de fixer les notations. On considère dans la suite des espaces homogènes G/H où G est un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G. On notera $p: G \to G/H$ la surjection canonique, e l'élément neutre de G et o désignera $p(e)$.

L'espace homogène G/H est réductif si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admet la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus M$ telle que $\mathrm{adj}(H)M \subset M$ ($\mathfrak{h}$ désigne l'algèbre de Lie de H et M s'identifie à $T_o(G/H)$.) Si $[\ ,\ ]$ désigne le crochet de $\mathfrak{g}$, on notera $[\ ,\ ]_{\mathfrak{h}}$ (resp. $[\ ,\ ]_M$) la composante selon $\mathfrak{h}$ (resp. selon M) de la valeur du crochet calculée dans $\mathfrak{g}$.

Enfin, si T et R désignent les tenseurs de torsion et de courbure de la connexion canonique associée à la structure réductive ([6], § 31) on a alors (cf. [5], Théorème X.2.6)

i) $T(X, Y)_o = -[X, Y]_M$, $X, Y \in M$;

ii) $(R(X, Y)Z)_o = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]$, $X, Y, Z \in M$;

iii) $\begin{cases} \nabla T = 0 \\ \nabla R = 0 \,. \end{cases}$

2) Soit V une variété différentiable munie d'une connexion linéaire. Une transformation $\varphi: V \to V$ est dite affine pour la connexion linéaire si elle la laisse invariante.

On définit de manière analogue les notions d'application affine entre deux variétés de dimension n, munies de connexion linéaire, et l'on sait les conditions que doivent remplir ces connexions pour qu'il existe des isomorphismes affines locaux ([5], Théorème VI.7.4).

Soit V une variété munie d'une connexion linéaire, cette connexion est dite *invariante par parallèlisme* si elle vérifie

$$\begin{cases} \nabla T = 0 \\ \nabla R = 0 \end{cases} \quad \text{(cf. [5], corollaire VI.7.6)} \,.$$

Une variété munie d'une connexion linéaire invariante par parallèlisme est dite *variété localement réductive.*

Si V et V' sont deux variétés localement réductives, elles sont dites *localement représentables l'une sur l'autre* si $\forall x_0 \in V, \forall y_0 \in V'$, il existe un isomorphisme affine local d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0, envoyant x_0 sur y_0.

Si G/H est un espace homogène réductif pour la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus M$, $\bar{H}$ sera le groupe des automorphismes de M laissant les tenseurs de torsion et courbure invariants.

Le théorème suivant résume les faits dont nous aurons besoin ultérieurement.

THÉORÈME 1. *Soit V une variété localement réductive. Alors,*

i) *Il existe un espace homogène réductif $\bar{G}/\bar{H}$ localement représentable sur V.*

ii) *Il existe sur V une $\bar{H}$-structure notée $E(V, \bar{H})$.*

iii) *a) La $\bar{H}$-fibration principale $\bar{G} \to \bar{G}/\bar{H}$ s'identifie à une $\bar{H}$-structure notée $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$.*

b) Les deux $\bar{H}$-structures $E(V, \bar{H})$ et $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$ sont localement équivalentes.

DÉMONSTRATION. i) V étant localement réductive, par le théorème de Nomizu (cf. [8], Théorème IV.18.1 ou bien [6], § 42) on sait lui associer un espace homogène réductif G/H; $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus M$. D'autre part, H et $\bar{H}$ ayant même algèbre de Lie, on peut exhiber un espace homogène réductif $\bar{G}/\bar{H}$, localement représentable sur G/H, donc sur V.

ii) Soit z_0 un point du fibré des repères de V: $B^1(V)$. Notons $L(z_0)$ le groupe d'holonomie en z_0. Il est facile de voir que $L(z_0) \subset \bar{H}$, ce qui permet de conclure.

iii) *a)* Ce fait est bien connu — cf. [3] par exemple.

b) Si on note ω_0 la connexion canonique de $\bar{G}/\bar{H}$, μ la forme de Maurer-Cartan de $\bar{G}$, θ_0 (resp. θ) la forme fondamentale de la $\bar{H}$-structure $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$ (resp. de la $\bar{H}$-structure $E(V, \bar{H})$), alors, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & T\bar{G} & & \\ & \swarrow^{\omega_0} & \downarrow{\scriptstyle \nu} & \searrow^{\theta_0} & \\ \mathfrak{h} & \xleftarrow{p_1} & \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus M & \xrightarrow{p_2} & M \end{array}$$

où p_i est la projection sur i-ème facteur de sorte que

$$\mu = \omega_0 + \theta_0 .$$

D'autre part, si ω note la connexion invariante par parallèlisme de V, on a

$$d(\omega + \theta) + \tfrac{1}{2}[\omega + \theta, \omega + \theta] = 0 .$$

On achève alors avec le théorème de Darboux.

II. – Systèmes triples de Lie généraux-(G, H)-structures.

1) *Les systèmes triples de Lie généraux.*

DÉFINITION (cf. [9]). Un système triple de Lie général est la donnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel M de dimension finie n, muni de *deux lois de composition interne.*

i) $M \times M \xrightarrow{\psi} M$ bilinéaire
$(x, y) \mapsto \psi(x, y)$

ii) $M \times M \times M \xrightarrow{\varphi} M$ trilinéaire
$(x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z)$

vérifiant les axiomes suivants

* $\varphi(x, x, y) = 0 , \quad \forall x, y \in M$

* $\psi(x, x) = 0 , \quad \forall x \in M$

* $\underset{(x,y,z)}{S}(\varphi(x, y, z)) = -\underset{(x,y,z)}{S}\big(\psi(\psi(x, y), z)\big) , \quad \forall x, y, z \in M$

* $\underset{(x,y,z)}{S}\big(\varphi(\psi(x, y), z)t\big) = 0 , \quad \forall x, y, z, t \in M$

* $\varphi(\varphi(u, v, w), x, y) + \varphi(\varphi(v, u, x), w, y) + \varphi(v, u, \varphi(w, x, y))$
$+ \varphi(w, x, \varphi(u, v, y)) = 0 , \quad \forall u, v, w, x, y \in M$

* $\varphi(w, x, \psi(y, z)) + \psi(z, \varphi(w, x, y)) + \psi(y, \varphi(x, w, y)) = 0 , \quad \forall w, x, y, z \in M .$

Par $\underset{(x,y,z)}{S}(\varphi(x, y, z))$ on désigne la somme sur permutation circulaire des éléments (x, y, z).

EXEMPLE 1. Soit G/H un espace homogène réductif pour une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus M$. Alors M muni des deux lois suivantes

$$\psi(x, y) = [x, y]_M , \qquad x, y \in M$$
$$\varphi(x, y, z) = [[x, y]_{\mathfrak{h}}, z] , \qquad x, y, z \in M$$

a une structure de système triple de Lie général. On dira dans ce cas que M *est un système de type* (G, H) et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de M, pour les constantes de structure de système triple de Lie général, on posera

$$\begin{cases} \psi(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ij}^k e_k \\ \varphi(e_i, e_j, e_k) = \sum_{l=1}^{n} \pi_{ijk}^l e_l . \end{cases}$$

On définit de manière évidente les notions de morphisme de systèmes triples de Lie généraux, de sous-système triple de Lie général. Enfin, un idéal de M sera un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel N de M tel que

$$\begin{cases} \varphi(N, M, M) \subset N \\ \psi(N, M) \quad \subset N . \end{cases}$$

EXEMPLE 2. *Cas où l'espace G/H est symétrique.*

Alors, M est muni des deux lois suivantes

$$\varphi(x, y, z) = [[x, y], z] , \qquad \forall x, y, z \in M$$
$$\psi(x, y) = 0 , \qquad \forall x, y \in M .$$

EXEMPLE 3. *Cas des algèbres de Lie.*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors, on a sur $\mathfrak{g}$ une structure de système de type $(G, \{e\})$ G étant un groupe de Lie ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie et dans ce cas, ψ est le crochet de $\mathfrak{g}$ et φ est nulle.

EXEMPLE 4. *Cas des* $\mathbb{R}^n$.

Par rapport au cas précédent, on a $\varphi = \psi = 0$.

Soit M un système de type (G, H). Notons $\mathcal{K}$ le groupe des automorphismes de M pour la structure de système de type (G, H).

LEMME 1. *Les deux groupes $\overline{H}$ et $\mathcal{K}$ sont isomorphes (où $\overline{H}$ est le groupe qui a été introduit en* I-2).

2) *Les variétés à système.*

DÉFINITION. Soit V une variété de dimension n. Une structure à système S_M de type M sur V est la donnée:

* d'un système de type $(G, H)M$, de dimension n;

* d'une structure de fibré en systèmes triples de Lie généraux de fibre type M, sur TV. (TV est le fibré tangent de V.)

La donnée de S_M est donc celle

a) en chaque point $x \in V$ d'une structure de système triple de Lie général isomorphe à M sur T_xV (ce qui revient à se donner, pour tout x de V, une suite exacte de systèmes triples de Lie généraux

$$0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to T_xV \to 0);$$

b) d'un recouvrement ouvert $(U^\alpha)_{\alpha \in A}$ de V et sur chaque U^α de n champs de vecteurs linéairement indépendants $(X_1^\alpha, \ldots, X_n^\alpha)$ tels que, pour tout x de U^α, on ait

$$\begin{cases} \varphi(X_i^\alpha(x), X_j^\alpha(x), X_k^\alpha(x)) = \sum_{l=1}^{n} \pi_{ijk}^l X_l^\alpha(x) \\ \psi(X_i^\alpha(x), X_j^\alpha(x)) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ij}^k X_k^\alpha(x) \end{cases}$$

où les π_{ijk}^l et les τ_{ij}^k sont les constantes de structure de M introduites ci-dessus. $(U^\alpha, X_1^\alpha, \ldots, X_n^\alpha)$ sera dit trivialisation locale distinguée de TV.

PROPOSITION 1. *La donnée sur une variété V d'une structure à système S_M est équivalente à la donnée d'une $\mathcal{H}$-structure $E(V, \mathcal{H})$ sur V.*

EXEMPLES. *Si* $M = \mathbb{R}^n$, on voit qu'alors toute variété de dimension n est une variété à système de type $\mathbb{R}^n$.

Si $M = \mathfrak{k}$, on retrouve exactement la définition de variété à crochet de type $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire, toute variété à crochet de type $\mathfrak{k}$ est une variété à système de type $\mathfrak{k}$ (cf. [1]).

Enfin, si comme variété on prend l'espace homogène réductif $\bar{G}/\bar{H}$, on a sur cet espace une $\bar{H}$-structure $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$ et d'après le *Lemme* 1, on a sur $\bar{G}/\bar{H}$ une structure canonique de variété à système de type M.

3) *Les variétés (G, H)-structurées.*

On va demander, ici, aux lois algébriques définies sur TV d'être « réalisées » par des champs de vecteurs.

DÉFINITION. Soit M un système de type (G, H).
Soit V une variété à système de type M.
Soit U un ouvert de V — il sera dit (G, H)-*trivialisant* si

1°) On a un morphisme injectif d'algèbres de Lie

$$\begin{aligned} 0 \to \mathfrak{g}^0 &\to \mathfrak{X}(U) \\ a_i &\to Y_i\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p \\ e_j &\to X_j\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \end{aligned}$$

(où $\mathfrak{g}^0$ est l'algèbre des champs de vecteurs invariants à droite sur G et où $\mathfrak{X}(U)$ est l'algèbre des champs de vecteurs sur U).

2°) Pour un x_0, élément de U, on a

$$\begin{cases} \psi_{x_0}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n} - \tau_{ij}^k X_k \\ \varphi_{x_0}(X_i, X_j, X_k) = \sum_{l=1}^{n} - \pi_{ijk}^l X_l \end{cases}$$

(voir II - Exemple 1 pour les notations).

3°) $\mathfrak{L}_{X_i}\psi = 0$; $\mathfrak{L}_{X_i}\varphi = 0$; $\mathfrak{L}_{Y_j}\psi = 0$; $\mathfrak{L}_{Y_j}\varphi = 0$

$$\text{avec} \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n\,. \end{cases}$$

DÉFINITION 2. On dira qu'une structure à système $\mathcal{S}_M$ sur V est *intégrable* ou bien que V est *une variété* (G, H)-*structurée* si il existe au voisinage de tout point de V une (G, H)-trivialisation de TV.

EXEMPLE 1. Tout variété différentiable est $(\mathbb{R}^n, 0)$-structurée.

EXEMPLE 2. Si $M = \mathfrak{g}$, on retrouve, avec une autre expression, la condition d'intégrabilité des variétés à crochet ([1]).

EXEMPLE 3. Si l'on prend comme variété l'espace homogène réductif $\bar{G}/\bar{H}$ lui-même, il est évident que $\bar{G}/\bar{H}$ est $(\bar{G}, \bar{H})$-structurée, et ce de manière canonique.

THÉORÈME 2. *Soit sur V une structure à système de type M, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1°) *V est $(\bar{G}, \bar{H})$-structurée.*

2°) *$E(V, \bar{H})$ est une $\bar{H}$-structure localement équivalente à $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$.*

3°) *Il existe au voisinage de tout point de V une connexion de type réductif adaptée à $E(V, \bar{H})$.*

REMARQUE. En remplaçant « à système de type M » par « à crochet de type $\mathfrak{k}$ » on retrouve alors le théorème 3 de [1].

DÉMONSTRATION

i) $\Leftrightarrow$ ii). Cette équivalence est évidente, car la définition de variété $(\bar{G}, \bar{H})$-structurée a été posée afin d'exprimer autrement l'équivalence de $\bar{H}$-structures du ii).

ii) $\Rightarrow$ iii). On transporte, par équivalence locale, la connexion canonique du modèle, d'où iii).

iii) $\Rightarrow$ ii). Au voisinage de x_0, notons ω la connexion réductive de l'hypothèse et θ la forme fondamentale de la $\bar{H}$-structure.

On pose $\mu = \omega + \theta$. μ est une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{h} \oplus M = \mathfrak{g}$ et vérifie $d\mu + \frac{1}{2}[\mu, \mu] = 0$.

On achève la démonstration à l'aide du théorème de Darboux.

III. – Un morphisme caractéristique pour les fibrés principaux modelés sur un espace homogène réductif.

1) On a vu que la donnée d'une variété localement réductive (donc munie d'une connexion réductive *globale*) donnait lieu à la construction d'un modèle $\bar{G}/\bar{H}$ et à l'équivalence locale entre deux $\bar{H}$-structures (Théorème 1).

Inversement, (Théorème 2) la donnée de l'équivalence locale de $E(V, \bar{H})$ et $E_0(\bar{G}, \bar{H}, \bar{H})$ donne l'existence de connexions réductives *locales* adaptées.

Le problème qui se pose naturellement alors est celui relatif à la globalisation de ces connexions locales, ou, plus précisément: quelles sont les obstructions à cette globalisation? On reprend dans ce paragraphe les notations de [2].

Soient ω, θ, μ respectivement la forme de connexion canonique de l'espace homogène réductif, la forme fondamentale de $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$ et la forme de Maurer Cartan de $\bar{G}$. On a vu que $\mu = \omega + \theta$. Or $d\mu + \frac{1}{2}[\mu, \mu] = 0$, ce qui donne en développant

$$\Omega + \tfrac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} + \Theta + \tfrac{1}{2}[\theta, \theta]_M = 0$$

où Ω et Θ sont les 2-formes de courbure et torsion de ω.

Posons:

$$\bar{\Omega} = \Omega + \tfrac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}$$

$$\bar{\Theta} = \Theta + \tfrac{1}{2}[\theta, \theta]_M$$

on a

$$d\bar{\Theta} = [\Omega, \theta] + [\Theta, \theta]_M - [\omega, \bar{\Theta}] .$$

Notons que les relations sur les tenseurs R et T

$$R(u, v)w = -[[u, v]_{\mathfrak{h}}, w]$$

$$T(u, v) \quad = -[u, v]_M$$

se traduisent en terme de formes par $\bar{\Omega} = 0$ et $\bar{\Theta} = 0$.

La suite du paragraphe a pour but de définir un morphisme de Chern-Weil pour les connexions ω_1 ayant une torsion du type $\bar{\Theta}_1 = 0$.

Soit H un groupe de Lie. Considérons les triples (A, M, θ) où

* A est une H-A.D.G.;
* M est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n;
* $\theta \in B^1(A \otimes M)$ (c'est-à-dire, θ est une 1-forme basique définie sur A, à valeurs dans M).

On dira que le triple (A, M, θ) est *réductif de type* (G, H) si il existe un espace homogène G/H, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus M$, où θ est à valeurs dans M. (Notons que M a une structure de H-module définie par l'espace homogène réductif.)

Soit ω une connexion sur A, c'est-à-dire

$$\omega \in I^1(A \otimes \mathfrak{h})$$

$$i_X \omega = X , \qquad \forall X \in \mathfrak{h}$$

notons Θ sa torsion relative à $\theta (\Theta = d\theta + [\omega, \theta])$ et par analogie avec ce qui précède, posons $\bar{\Theta} = \Theta + \tfrac{1}{2}[\theta, \theta]_M$.

On dira pour une connexion sur un triple réductif de type (G, H), (A, M, θ), que c'est une connexion à *torsion compatible* si $\bar{\Theta} = 0$.

Soit $W(G)$ l'algèbre de Weil de G, c'est une G-A.D.G. (cf. [3]). On en fait une H-A.D.G. en restreignant à H l'action de G, et à $\mathfrak{h}$ les opérateurs i_X et $\mathfrak{L}_X$, $X \in \mathfrak{g}$.

L'algèbre différentielle sous-jacente est alors

$$W(G, H) = \Lambda(\mathfrak{h}^*) \otimes S(\mathfrak{h}^*) \otimes \Lambda(M^*) \otimes S(M^*)$$

où les éléments de $\mathfrak{h}^*$ et M^* sont de degré *un* dans $\Lambda^1(\mathfrak{h}^*)$ et $\Lambda^1(M^*)$, et de degré *deux* dans $S^1(\mathfrak{h}^*)$ et $S^1(M^*)$.

On notera: λ_0 (resp. Λ_0) l'unité $1_{\mathfrak{g}}$ considérée comme élément de $\Lambda^1(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathfrak{g}$ (resp. de $S^1(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathfrak{g}^*$).

: ω_0 (resp. Ω_0) l'identité $1_{\mathfrak{h}}$ considérée comme élément de $\Lambda^1(\mathfrak{h}^*)\otimes\mathfrak{h}$ (resp. de $S^1(\mathfrak{h}^*)\otimes\mathfrak{h}$).

: θ_0 (resp. Θ_0) l'identité 1_M considérée comme élément de $\Lambda^1(M^*)\otimes M$ (resp. de $S^1(M^*)\otimes M$). On a alors, $\lambda_0=\omega_0+\theta_0$ et $\Lambda_0=\Omega_0+\Theta_0$.

La différentielle de $W(G)$ est caractérisée par

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} d\lambda_0 + \frac{1}{2}[\lambda_0, \lambda_0] = \Lambda_0 \\ d\Lambda_0 + [\lambda_0, \Lambda_0] = 0\,. \end{cases}$$

(On notera d pour $d\otimes id_{\mathfrak{g}}$, de même, on notera i_X et $\mathfrak{L}_X$ pour $i_X\otimes id_{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{L}_X\otimes id_{\mathfrak{g}}$ — enfin, si $\alpha, \beta\in W(G)$ et si $A, B\in\mathfrak{g}$ on définit le crochet de $W(G)\otimes\mathfrak{g}$ en posant $[\alpha\otimes A, \beta\otimes B]=\alpha\cdot\beta\otimes[A, B]$). Remarquons que l'on a aussi

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_A\lambda_0 = -[A, \lambda_0] \\ \mathfrak{L}_A\Lambda_0 = -[A, \Lambda_0] \end{cases} \quad \text{(voir [3])}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} i_A\lambda_0 = A \\ i_A\Lambda_0 = 0 \end{cases}$$

de (I) on tire les relations suivantes caractérisant la différentielle de $W(G, H)$.

$$\text{(I')}\quad \begin{cases} \Omega_0 = d\omega_0 + \frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0] + \frac{1}{2}[\theta_0, \theta_0]_{\mathfrak{h}} \\ \Theta_0 = d\theta_0 + [\omega_0, \theta_0] + \frac{1}{2}[\theta_0, \theta_0]_M \\ 0 = d\Omega_0 + [\omega_0, \Omega_0] + [\theta_0, \Theta_0]_{\mathfrak{h}} \\ 0 = d\Theta_0 + [\omega_0, \Theta_0] + [\theta_0, \Omega_0] + [\theta_0, \Theta_0]_M \end{cases}$$

de même de (II) et (III) on tire des relations analogues relatives à ω_0, Ω_0, θ_0 et Θ_0.

PROPOSITION 2. *Etant donnée une* H-A.D.G. A *et un* R-*espace vectoriel* M, *il revient au même de se donner un couple* (ω, θ), ω *étant une connexion sur* A *et* $\theta\in B^1(A\otimes M)$ *ou bien un morphisme de* H-A.D.G.

$$\psi_{(\theta,\omega)}\colon W(G; H)\to A\,.$$

Si le triple (A, M, θ) est réductif de type (G, H) et est muni d'une connexion à torsion compatible, on obtient alors un morphisme nul sur l'idéal homogène engendré par les relations

$$\begin{cases} 0 = \Theta_0 \\ 0 = [\Omega_0, \theta_0] \end{cases}$$

(c'est-à-dire, J est engendré par les composantes de Θ_0 et de $[\Omega_0, \theta_0]$ par rapport à n'importe quelle base de $\mathfrak{g}$). La deuxième relation assurant la stabilité de J pour la différentielle et comme J est invariant par l'action de H et par les opérateurs i_X, $X \in \mathfrak{h}$, la structure de H-A.D.G. passe au quotient sur

$$\hat{W}(G; H) = W(G, H)/J .$$

Alors

PROPOSITION 3. *Soit (A, M, θ) un triple réductif de type (G, H). Il revient au même de se donner une connexion ω à torsion compatible, ou un morphisme de H-A.D.G.*

$$\hat{\psi}_\omega : \hat{W}(G, H) \to A .$$

En passant aux éléments basiques, on a le morphisme

$$B\hat{\psi}_\omega : B\hat{W}(G, H) \to BA .$$

THÉORÈME 3. *Soient ω_0 et ω_1 deux connexions à torsion compatible sur un triple réductif de type (G, H), (A, M, θ).*

Alors, les morphismes induits en cohomologie basique

$$HB\hat{\psi}_{\omega_i} : HB\hat{W}(G, H) \to HBA , \quad i = 0, 1$$

coïncident.

PREUVE. C'est une adaptation au cas qui nous concerne de celle donnée dans [2].

On appellera, pour un triple (A, M, θ), réductif de type (G, H), *homomorphisme de Chern-Weil* de (A, M, θ) le morphisme

$$\chi_{(A,M,\theta)} = HB\hat{\psi}_\omega$$

défini à partir de n'importe quelle connexion, ω, à torsion compatible.

IV. – Applications.

1) Introduisons l'idéal de $B\hat{W}(G, H)$, que l'on notera I_{Ω_0}, engendré par les classes des composantes, sur une base arbitraire de $\mathfrak{g}$, de Ω_0.

I_{Ω_0} est stable par la différentielle d et notons I l'idéal de $HB\hat{W}(G, H)$ engendré par les éléments ayant un représentant dans I_{Ω_0}.

Soit $E(V, H)$ une H-structure sur la variété V (de dimension n). Une connexion adaptée à $E(V, H)$, ω, est dite *réductive de type* (G, H) si la courbure et la torsion vérifient

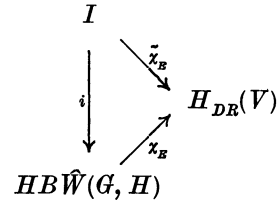
$$\begin{cases} \Omega + \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} = 0 \\ \Theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]_M = 0 \,. \end{cases}$$

THÉORÈME 4. *Soit G/H un espace homogène réductif ($\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus M$) et soit $E(V, H)$ une H-structure sur une variété V modelée sur M. On suppose que sur E est définie une connexion à torsion compatible, d'où le morphisme*

$$\chi_E : HB\hat{W}(G, H) \to H_{DR}(V) \,.$$

Alors, une condition nécessaire pour qu'il existe une connexion réductive de type (G, H) sur E est que χ_E soit nul sur I.

PREUVE. Découle directement de la commutativité du diagramme suivant:



où i est l'injection canonique de l'idéal I dans $HB\hat{W}(G, H)$ et où $\tilde{\chi}_E$ est l'homomorphisme caractéristique de E.

CAS PARTICULIER 1. Si la $\bar{H}$-structure $E(V, \bar{H})$ est localement équivalente à $E_0(\bar{G}/\bar{H}, \bar{H})$ le théorème 4 donne une obstruction à l'existence d'une structure localement réductive sur V (c'est-à-dire, l'obstruction au passage du local au global évoqué au début du III).

CAS PARTICULIER 2. Supposons que G/H soit symétrique (dans ce cas $[M, M]_M = 0$, ou bien, la torsion de la connexion canonique est nulle) et

soit sur $E(V, H)$ une connexion à torsion compatible (donc, ici, torsion nulle) — qui existe dès que le premier tenseur de structure est nul — le théorème 4 donne une obstruction à l'existence d'une structure affine localement symétrique (avec la terminologie de [5], chapitre XI).

CAS PARTICULIER 3. Les structures $\mathfrak{k}$-plates.

Notons K le groupe de Lie simplement connexe ayant $\mathfrak{k}$ pour algèbre de Lie. Prenons $H \subset \mathrm{AUT}(\mathfrak{k})$ et G le produit semi-direct $H \underset{\cdot}{\times} K$, $E_0(G/H, H)$ est alors la H-structure $\mathfrak{k}$-plate standard sur $\mathfrak{k}$.

Si $E(V, H)$ est localement équivalente à $E_0(G/H, H)$ c'est-à-dire, si $E(V, H)$ est une H-structure $\mathfrak{k}$-plate, il existe sur $E(V, H)$ des connexions à torsion compatibles: les (—)-connexions (cf. [1]). Alors, le théorème 4 donne une obstruction à l'existence d'un étalement

$$\psi\colon V \to K$$

tel que

$$\psi^* E_0 = E\,.$$

En particulier, si $\mathfrak{k} = \mathbb{R}^n$, et si G est le produit semi-direct $H \underset{\cdot}{\times} \mathbb{R}^n$, on retrouve la construction faite dans [2].

2) *Autre application.*

Soit $E(V, H)$ une H-structure $\mathfrak{k}$-plate sur V.

Soit H' un sous-groupe de Lie de H. Supposons qu'il existe une H'-réduction $\mathfrak{k}$-plate de $E(V, H)$ alors, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} HB\hat{W}(H \underset{\cdot}{\times} K, H) & \xrightarrow{\pi} & HB\hat{W}(H' \underset{\cdot}{\times} K, H') \\ & {\scriptstyle \chi_E} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \chi_{E'}} & \\ & H_{DR}(V) & \end{array}$$

De là on tire le

THÉORÈME 5. *Soit $E(V, H)$ une H-structure $\mathfrak{k}$-plate sur une variété V. Une condition nécessaire pour qu'il existe une H'-réduction $\mathfrak{k}$-plate de E est que*

$$\forall \eta \subset HB\hat{W}(H \underset{\cdot}{\times} K, H)$$

vérifiant

$$\pi(\eta) = 0$$

on ait

$$\chi_E(\eta) = 0\,.$$

3) *Illustrons ce dernier théorème par un exemple.*

* Considérons le cas où $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}(3, \mathbf{R})$, algèbre de Lie dont les constantes de structure sont

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$$

$$[e_2, e_3] = e_1 .$$

Alors, $G_0 = \mathrm{AUT}(\mathfrak{k})$ est formé des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|cc} a & \alpha & \beta \\ \hline 0 & & \\ 0 & & A \end{array}\right)$ avec $\det A = a$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$—son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_0$ est formée des matrices $\left(\begin{array}{c|cc} b & \alpha & \beta \\ \hline 0 & & \\ 0 & & B \end{array}\right)$ avec $\mathrm{Trace}(B) = b$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Considérons $G_1 \subset G_0$, le sous-groupe formé des matrices $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & & \\ 0 & & A \end{array}\right)$, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ est formée des matrices $\left(\begin{array}{c|cc} 0 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & & \\ 0 & & B \end{array}\right)$ avec $\mathrm{Trace}\, B = 0$.

Le calcul des invariants donne un générateur en dimension 2 : $\eta = e^1 \cdot e^2$ — et un générateur en dimension 3 : $\pi = e^1 e^2 e^3$ ((e^1, e^2, e^3) étant la base duale de (e_1, e_2, e_3)). Soit enfin $G \subset G_1$ le groupe formé des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & A \end{array}\right)$ — dans ce cas, le calcul donne entre autre, un invariant en dimension 3 — $\pi' = e^1 e^2 e^3$.

* Soit V la variété $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$.

t notera la coordonnée sur $\mathbf{S}^1$, (θ, φ) seront les coordonnées sphériques sur $\mathbf{S}^2$

$$\begin{cases} 0 < t < 2\pi \\ 0 < \varphi < 2\pi \\ -\pi/2 < \theta < \pi/2 . \end{cases}$$

Soit U l'ouvert dense de V définit par ces coordonnées.

Notons $p : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ la projection sur $\mathbf{S}^2$ et β la forme volume de $\mathbf{S}^2$:

$$\beta = -\cos\theta \, d\theta \wedge d\varphi .$$

Posons

$$\bar{\beta} = p^* \beta .$$

Le parallèlisme de S^1 et la forme volume de S^2 définissent sur V une G-structure et par agrandissement, on a une G_0-structure sur V, avec

$$[\![X, Y]\!] = \bar{\beta}(X, Y)\frac{\partial}{\partial t}.$$

On note Δ la connexion riemannienne définie sur U à partir de la connexion riemannienne de S^2. On a

$$\Delta_{(\partial/\partial t)}\frac{\partial}{\partial t} = \Delta_{(\partial/\partial t)}\frac{\partial}{\partial \theta} = \Delta_{(\partial/\partial t)}\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Delta_{(\partial/\partial \theta)}\frac{\partial}{\partial t} = \Delta_{(\partial/\partial \theta)}\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

$$\Delta_{(\partial/\partial \varphi)}\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\Delta_{(\partial/\partial \theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \Delta_{(\partial/\partial \varphi)}\frac{\partial}{\partial \theta} = -\operatorname{tg}\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\Delta_{(\partial/\partial \varphi)}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos\theta \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Enfin on définit la connexion suivante

$$\nabla = \Delta - \frac{1}{2}\bar{\beta}(\ ,\ )\frac{\partial}{\partial t}$$

et les champs suivants $X_1 = \partial/\partial t$

$$X_2 = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$X_3 = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ces 3 champs définissent une section de la G_0-structure $E_0(V, G_0)$. Soit $E_1 = \{\text{repères } r \in E_0 |$ le premier vecteur de la base définie par r est $\partial/\partial t\}$.

Si r et $r' \in E_1|_x$, on passe de l'un à l'autre par un élément de G_1.

D'autre part, le calcul du tenseur de courbure R de ∇ montre que Ω est à valeurs dans $\mathfrak{g}_1$.

Donc, la connexion définie par ∇ est adaptée à E_1 et, de plus, c'est une (—)-connexion.

D'où le morphisme

$$\chi_{E_1}: HB\hat{W}(G_1 \underset{\cdot}{\times} K, G_1) \to H_{DR}(V)\,.$$

Enfin, on a un morphisme

$$\psi: HB\hat{W}(G_1 \underset{\cdot}{\times} K, G_1) \to HB\hat{W}(G \underset{\cdot}{\times} K, G)$$

avec $\psi(e^2 e^3) = 0$;

et comme $\chi_{E_1}(e^2 e^3)$ définit la classe de la forme volume sur S^2, $\chi_{E_1}(e^2 e^3) \neq 0$. Donc, il n'existe pas de G-réduction $\mathfrak{k}$-plate de E_0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. ALBERT, *Some properties of $\mathfrak{k}$-flat manifolds*, J. Differential Geometry, **11** (1976), pp. 103-128.

[2] C. ALBERT - D. LEHMANN, *Une algebre graduée universelle pour les connexions sans torsion*, Math. Z., **159** (1978), pp. 133-142.

[3] C. ALBERT - P. MOLINO, *Pseudogroupes de Lie et structures différentiables*, Montpellier, 1980.

[4] H. CARTAN, *Cohomologie réelle d'un espace fibré principal différentiable* (I) *et* (II), Sèminaire Cartan, 1949-1950, E.N.S. Paris, 1956.

[5] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Tome 1, 1963 - Tome 2, 1969, Interscience Publishers.

[6] A. LICHNEROWICZ, *Geometrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[7] O. LOOS, *Symetric spaces*, Tome 1, Benjamin, 1969.

[8] K. NOMIZU, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math., **76** (1954), pp. 33-65.

[9] A. SAGLE, *On anti-commutative algebras and general Lie triple systems*, Pacific J. Math., **15** (1965), pp. 281-291.

Institut de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques
du Languedoc
34060 Montpellier, France