ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MONIQUE SABLÉ-TOUGERON

Problème d'évolution parabolique pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 8, n° 3 (1981), p. 441-472

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1981_4_8_3_441_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Problème d'évolution parabolique pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés.

MONIQUE SABLÉ-TOUGERON

Introduction.

La résolution du problème parabolique non homogène, par la méthode d'Agranovich-Visik [1] ou Lions [9], pour les opérateurs elliptiques dégénérés décrits par Bolley-Camus-Helffer [5] pose deux sortes de problèmes:

Pour se ramener au cas homogène on doit résoudre un problème de relèvement dans des espaces de Sobolev avec poids sur le cylindre $\Omega \times]0, T[$. Ce résultat permet en outre de décrire l'espace des conditions initiales, interpolé $\frac{1}{2}$ d'espaces avec poids dont la théorie générale de l'interpolation n'est pas connue.

Le cas homogène se déduit par transformation de Laplace de l'étude de la résolvante de réalisations dans L^2 de ces opérateurs elliptiques dégénérés. Suivant la méthode d'Agranovich-Visik [1] on est ramené à l'étude d'un opérateur différentiel sur la demi-droite dépendant des paramètres ξ' et λ, ξ' provenant d'une transformation de Fourier en variable tangentielle et λ étant le paramètre spectral. Au contraire du cas elliptique, l'espace sur lequel on étudie cet opérateur différentiel change de type en fonction du paramètre. Pour plus de clarté on a dégagé un problème aux limites à une variable dépendant d'un paramètre global ω et formulé des hypothèses plus abstraites que celles vérifiées par le cas d'application qui nous intéresse.

1. – Notations et résultats.

Dans un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$, de bord Γ, on considère l'opérateur différentiel:

$$L \equiv L(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} A_\alpha(x) D^\alpha$$

Pervenuto alla Redazione il 15 Luglio 1980.

où $m \in \mathbf{N} - \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = -i(\partial/\partial x_k)$.

On note S le secteur fermé du plan complexe:

$$S = \{\varrho \exp[i\theta],\ \varrho \geqslant 0,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}\ .$$

On suppose que les coefficients A_α sont indéfiniment dérivables dans $\bar{\Omega}$ et que la condition suivante est satisfaite:

E_0: Pour tous $x \in \Omega$, $(\xi, \lambda) \in (\mathbf{R}^n \times S) - \{0\}$ on a:

$$\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x)\xi^\alpha - \lambda \neq 0\ .$$

On suppose que le bord Γ est recouvert par une famille $\{O_1, \ldots, O_p\}$ d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ telle que pour chaque i il existe un difféomorphisme $\Phi_i: x \to y$ de classe C^∞ de O_i dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que $y_n = 0$ dans $\Phi_i(O_i \cap \Gamma)$ et $y_n > 0$ dans $\Phi_i(O_i \cap \Omega)$.

De plus si $y_1^i, \ldots, y_n^i$ sont des coordonnées dans $\Phi_i(O_i)$, et si $O_i \cap O_j \neq \emptyset$ on suppose que $y_n^i = y_n^j$ et que pour $k \leqslant n-1$, y_k^j n'est fonction que de $y_1^i, \ldots, y_{n-1}^i$.

On suppose que dans chaque O_i l'opérateur L s'exprime en coordonnées locales sous la forme:

$$L(y, D_y) = \sum_{|\alpha|+j \leqslant 2m} a_{\alpha j}(y) y_n^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} + D_{y'}^\alpha D_{y_n}^j\ ,$$

avec $\sigma < 0$, $\delta > 0$, $\sigma + 2m \in \mathbf{N}$, $\sigma + 2\delta m \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$, $j \in \mathbf{N}$, $[A]_+$ désignant le plus petit entier $\geqslant 0$ supérieur ou égal à A, et les fonctions $a_{\alpha j}$ étant indéfiniment dérivables dans $\overline{\mathbf{R}_+^n}$.

Cette classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés a été introduite par Bolley-Camus-Helffer [5]; elle contient les opérateurs de Visik-Grusin [12], et aussi des opérateurs qui s'expriment simplement sous forme globale dans $\bar{\Omega}$: Baouendi [2], Baouendi-Goulaouic [3], Triebel [11], Shimakura [10].

Soit O_0 un ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que $\bar{O}_0 \subset \Omega$ et tel que la famille $\{O_i\}_{i=0}^p$ recouvre Ω. Soit $\{\varphi_i\}_{i=0}^p$ une partition de l'unité indéfiniment dérivable subordonnée à ce recouvrement. On considère les espaces:

$$W^m_{\sigma/2,\delta}(\mathbf{R}^n_+) =$$

$$= \left\{u \in L^2(\mathbf{R}^n_+),\ y_n^{\sigma/2+\delta|\alpha|+j} D_{y'}^\alpha D_{y_n}^j u \in L^2(\mathbf{R}^n_+),\ \frac{\sigma}{2} + \delta|\alpha| + j \geqslant 0,\ |\alpha| + j \leqslant m\right\},$$

$$W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varphi_0 u \in H^{2m}(\mathbf{R}^n),\ \varphi_i u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+),\ i = 1, \ldots, p\}\ ,$$

l'appartenance à $W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^+_n)$ s'exprimant en coordonnées locales, et on les munit de la norme canonique.

En chaque point x de Γ, $x = (y', 0)$ en coordonnées locales on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:

E_1: pour tout $(\xi', \zeta, \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times S) - \{0\}$ on a:

$$\sum_{\substack{|\alpha|+j=2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbf{N}}} a_{\alpha j}(y')\xi'^{\alpha}\zeta^j - \lambda \neq 0$$

E_2: l'équation $F(x, \varrho) = \sum_{-\sigma\leqslant j\leqslant 2m} a_{0j}(y')(-i)^j\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-j+1) = 0$, n'a pas de racine à partie réelle $\operatorname{Re}\varrho$ supérieure ou égale à $-\sigma-\frac{1}{2}$.

Si $-\sigma-m \geqslant 1$ on considère de plus des opérateurs frontière B_j, $j = 0, \dots, \dots, -\sigma-m-1$, qui s'écrivent en coordonnées locales:

$$B_j(y', D_y) = \sum_{\delta|\beta|+q\leqslant m_j} b_{jq\beta}(y')D^{\beta}_{y'}D^q_{y_n},$$

où les fonctions $b_{jq\beta}$ sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et où $m_j \leqslant -\sigma-1$. On note K le compact de $\mathbb{C}^n$:

$$K = \left\{\omega = (\xi', \lambda),\ \xi' \in \mathbb{R}^{n-1},\ \lambda \in S,\ \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2 + |\lambda|^{1/m} = 1\right\},$$

On suppose que $-\sigma-m$ est positif ou nul et que la condition suivante est vérifiée:

E_3: Pour tous $x \in \Gamma$, $\omega = (\xi', \lambda) \in K$, le problème

$$\begin{cases} L^0(x, \omega)u \equiv \Big(\sum\limits_{\substack{|\alpha|+j\leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbf{N}}} a_{\alpha j}(y')\, t^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\xi'^{\alpha}D_t^j - \lambda\Big)u = 0 \\ B^0_j(x, \omega)u(0) \equiv \Big(\sum\limits_{\delta|\beta|+q\leqslant m_j} b_{jq\beta}(y')\xi'^{\beta}D^q_t u\Big)(0) = 0\,, \qquad j = 0, \dots, -\sigma-m-1 \\ u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ |\xi'|\, t^{\sigma+2\delta m}u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ t^{\sigma+2m}D_t^{2m}u \in L^2(\mathbb{R}_+) \end{cases}$$

n'admet que la solution nulle.

REMARQUE 1.1. Cette condition sur λ est en général une condition spectrale relative aux opérateurs non bornés dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, $L^0(x, (\xi', 0))$ avec $|\xi'| = 1$ ou $\xi' = 0$ ayant pour domaine l'ensemble

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ |\xi'|\, t^{\sigma+2\delta m}u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ t^{\sigma+2m}D_t^{2m}u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ B^0_j(x, (\xi', 0))u = 0$$

pour $j = 0, \dots, -\sigma-m-1\}$

Dans le cas d'opérateurs variationnels associés à une forme coercitive, (Baouendi-Goulaouic, Baouendi, Triebel), on peut choisir comme opérateurs B_j ceux obtenus à l'aide de la formule de Green en explicitant le problème aux limites attaché à la formulation variationnelle. A l'aide de l'étude de la coercivité faite dans [6] on peut alors expliciter la condition spectrale sur λ équivalente à E_3.

On démontre le résultat suivant:

THÉORÈME 1.1. *Sous les conditions E_0, E_1, E_2, E_3, il existe $C>0$, $\lambda_0>0$ tels que pour $\lambda\in S$, $|\lambda|\geqslant\lambda_0$ le résolvant $(L-\lambda)^{-1}$ dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur L ayant pour domaine*:

$$D(L)=\{u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega),\ B_ju=0 \text{ sur } \Gamma,\ j=0,\dots,-\sigma-m-1\},$$

existe et vérifie: pour tout $f\in L^2(\Omega)$,

$$\|(L-\lambda)^{-1}f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{C}{1+|\lambda|}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

REMARQUE 1.2. On peut obtenir un résultat du même type si l'équation $F(x,\varrho)=0$ a r_0 racines à partie réelle supérieure à $-\sigma-\frac{1}{2}$, si le nombre $\chi=-\sigma-m+r_0$ est positif ou nul et si la condition E_3 est vérifiée avec χ opérateurs frontière B_j; c'est le cas par exemple de l'opérateur $\varphi\Delta$, où φ désigne la distance au bord de Ω.

REMARQUE 1.3. On montre plus loin que les conditions E_0, E_1, E_3, et aussi E_2 en supposant que $F(x,\varrho)$ ne s'annule pas sur la droite $\operatorname{Re}\varrho=-\sigma-\frac{1}{2}$, sont nécessaires pour que les opérateurs $L-\lambda$ et B_j vérifient des estimations à priori faisant intervenir des normes dépendant de λ, uniformément pour λ dans S de module assez grand.

On introduit ensuite la variable de temps t, $0<t<T$, et pour $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$ on considère les espaces d'évolution [7]:

$$H^{r,s}(\Gamma\times]0,T[)=L^2(0,T;H^r(\Gamma))\cap H^s(0,T;L^2(\Gamma)),$$

munis des normes canoniques. Supposant de plus que le système $\{B_j\}_{j=0}^{-\sigma-m-1}$ est normal sur Γ, c'est-à-dire que $m_j\neq m_k$ si $j\neq k$ et que pour tout $x\in\Gamma$, $x=(y',0)$ en coordonnées locales, on a $b_{jm_j0}(y')\neq 0$ pour tout j, on démontre aussi:

THÉORÈME 1.2. *Sous les hypothèses du théorème* 1.1, *si le système* $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=0}^{-\sigma-m-1}$ *est normal sur* Γ *et si le secteur* S *est le demi-plan* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, *pour tous*

$$f \in L^2(]0, T[\times\Omega),\ \{u_0, g_j\} \in W^m_{\sigma/2,\delta}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j,\nu_j}(\Gamma\times]0, T[),$$

$$\mu_j = \frac{-\sigma-m_j-\frac{1}{2}}{\delta},\quad \nu_j = \frac{-\sigma-m_j-\frac{1}{2}}{-\sigma},$$

vérifiant les relations de compatibilité:

$$\mathcal{RC}_{\mathcal{B}}\ \begin{cases} B_j u_0(x) = g_j(x,0)\ \textit{pour}\ x\in\Gamma,\ \textit{si}\ m_j < -\dfrac{\sigma}{2}-\dfrac{1}{2} \\ \displaystyle\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |B_j(\varphi_i u_0)(y', \tau^{-1/\sigma}) - \varphi_i g_j)(y',\tau)|^2\, dy'\, \frac{d\tau}{\tau} < +\infty, \\ \textit{si}\ -\sigma\ \textit{est impair et}\ m_j = -\dfrac{\sigma}{2}-\dfrac{1}{2},\ \textit{en coordonnées locales dans}\ O_i, \end{cases}$$

il existe $u \in L^2(0, T; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ *unique vérifiant*:

$$\begin{cases} Lu + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f, \qquad 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0 \\ B_j u = g_j\ \textit{sur}\ \Gamma\times]0, T[,\ 0 \leqslant j \leqslant -\sigma-m-1. \end{cases}$$

EXEMPLES. 1) « Opérateur de N. Shimakura » variationnel: Si k est entier, $0 \leqslant k \leqslant m$, pour tous

$$f \in L^2(]0, T[\times\Omega),$$
$$\{u_0, g_j\} \in W^m_{-(2m-k)/2,1}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-k-1} H^{m-k-j-\frac{1}{2},\,((m-k-j-\frac{1}{2})/2m-k)}(\Gamma\times]0, T[),$$

il existe $u \in L^2(0, T; W^{2m}_{-(2m-k),1}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ unique vérifiant

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|=m} D^\alpha(\varphi(x)^k D^\alpha u) + \frac{\partial u}{\partial t} = f \\ u(x,0) = u_0 \\ \dfrac{\partial^{m+j} u}{\partial \nu^{m+j}} = g_j \quad \text{sur}\ \Gamma\times]0, T[, \quad 0 \leqslant j \leqslant m-k-1, \end{cases}$$

(φ désigne la distance à Γ et $\partial/\partial\nu$ la dérivée normale sur Γ orientée vers l'intérieur).

En particulier pour l'opérateur div (φ grad) il y a existence et unicité sans donnée sur le manteau $\Gamma\times]0, T[$; (on obtient un résultat du même type pour l'« opérateur de H. Triebel » dont le modèle est $D_t\,(tD_t) + D_x^2$).

2) « Opérateur de N. Shimakura » non variationnel: D'après la remarque 1.2, pour tous $f \in L^2(]0, T[\times\Omega)$, $u_0 \in W^1_{-\frac{1}{2},1}(\Omega)$, $g_0 \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma\times]0, T[)$ tels que dans chaque O_i on ait en coordonnées locales:

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |(\varphi_i u_0)(y', \tau) - (\varphi_i g_0)(y', \tau)|^2 \, dy' \frac{d\tau}{\tau} < +\infty,$$

il existe $u \in L^2(0, T; W^2_{-1,1}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ unique vérifiant:

$$\begin{cases} -\varphi\,\Delta u + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u(x, 0) = u_0 \\ u(x, t) = g_0 \quad \text{sur } \Gamma\times]0, T[. \end{cases}$$

3) « Opérateur de M. S. Baouendi »: Pour tous $f \in L^2(]0, \vec{T}[\times\Omega)$, $u_0 \in W^1_{-1,1}(\Omega)$, $g_0 \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Gamma\times]0, T[)$, tels que $u_0(x) = g_0(x, 0)$ sur Γ,

il existe $u \in L^2(0, T; W^2_{-2,2}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ unique vérifiant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2}{\partial\nu^2} - \operatorname{div}(\varphi^2 \operatorname{grad} u) + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u(x, 0) = u_0 \\ u(x, t) = g_0 \quad \text{sur } \Gamma\times]0, T[. \end{cases}$$

2. – Etude d'un opérateur différentiel singulier dépendant d'un paramètre sur $\mathbf{R}_+$.

Cette étape est essentielle pour établir le théorème 1.1:

On considère sur $\mathbf{R}_+$ l'opérateur différentiel dépendant du paramètre $\omega \in \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$:

$$L(\omega) \equiv L(\omega, t, D_t) = \sum_{\substack{|k|+j\leqslant m \\ \sigma+\langle\delta,k\rangle+j\in\mathbf{N}}} a_{kj}(\omega)\, t^{\sigma+\langle\delta,k\rangle+j} D_t^j,$$

où $m \in \mathbf{N} - \{0\}$, $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_n > 0$, $\sigma = -m\delta_n$, $\sigma + m \in \mathbf{N}$, $\sigma + \delta_i m \in \mathbf{N}$ pour $i = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbf{N}^n$, $j \in \mathbf{N}$, $\langle \delta, k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta_i k_i$, $a_{kj}(\omega) \in \mathbf{C}$ et $a_{0m} = 1$.

On introduit les conditions:

$H_{0,\omega}$: Pour tout $t > 0$, l'équation en τ:

$$L_0(\omega, t, \tau) \equiv \sum_{\substack{|k|+j=m \\ \sigma+\langle\delta,k\rangle+j\in\mathbf{N}}} a_{kj}(\omega) t^{\langle\delta,k\rangle} \tau_j = 0 ,$$

n'a pas de racine réelle et il existe $C = C(\omega) > 0$ telle que pour $t \geqslant 1$, les racines $\tau(\omega, t)$ à partie imaginaire $\operatorname{Im} \tau(\omega, t)$ positive vérifient:

$$\operatorname{Im} \tau(\omega, t) \geqslant C\Big(\sum_{\substack{|k|=m \\ \sigma+\langle\delta,k\rangle\in\mathbf{N}}} |a_{k0}(\omega)| t^{\langle\delta,k\rangle} \Big)^{1/m}$$

$H_{1,\omega}$: Il existe $C = C(\omega) > 0$ telle que pour tous $k, j, |k| + j \leqslant m$, $\sigma + \langle \delta, k \rangle + j \in \mathbf{N}$ on ait:

$$|a_{kj}(\omega)| t^{\langle\delta,k\rangle} \leqslant C\Big(\sum_{\substack{|k|=m \\ \sigma+\langle\delta,k\rangle\in\mathbf{N}}} |a_{k0}(\omega)| t^{\langle\delta,k\rangle} \Big)^{|k|/m}, \quad \text{pour } t > 0 .$$

$H_{2,\omega}$: L'équation:

$$F(\omega, \varrho) \equiv \sum_{-\sigma \leqslant j \leqslant m} a_{0j}(\omega)(-i)^j \varrho(\varrho - 1) \ldots (\varrho - j + 1) = 0 ,$$

n'a pas de racine sur la droite $\operatorname{Re} \varrho = -\sigma - \frac{1}{2}$.

$L(\omega)$ opère sur l'espace:

$$W_\omega(\mathbf{R}_+) =$$

$$= \{u \in L^2(\mathbf{R}_+),\ a_{kj}(\omega) t^{\sigma+\langle\delta,k\rangle+j} D_t^j u \in L^2(\mathbf{R}_+),\ |k| + j \leqslant m,\ \sigma + \langle \delta, k \rangle + j \in \mathbf{N}\} ,$$

que l'on munit de la norme canonique. Pour chaque valeur du paramètre ω on a alors le résultat suivant:

PROPOSITION 2.1. *On suppose que l'opérateur $L(\omega)$ satisfait les conditions $H_{0,\omega}$, $H_{1,\omega}$ et $H_{2,\omega}$. Soit $m_+(\omega)$ le nombre de racines de l'équation $L_0(\omega, t, \tau) = 0$ à partie imaginaire positive et soit $r_0(\omega)$ le nombre de racines de l'équation $F(\omega, \varrho) = 0$ de partie réelle supérieure ou égale à $-\sigma - \frac{1}{2}$. Alors, considéré comme linéaire continu de $W_\omega(\mathbf{R}_+)$ dans $L^2(\mathbf{R}_+)$, l'opérateur $L(\omega)$ est à indice d'indice $m_+(\omega) + r_0(\omega) - \sigma - m$.*

DÉMONSTRATION. La proposition se déduit, à l'aide de théorèmes généraux d'indice, de l'étude de $L(\omega)$ sur $(0, T)$ et sur (T, ∞), pour T assez grand.

a) Etude de $L(\omega)$ sur $(0, T)$: on note:

$$W_\omega(0, T) =$$
$$= \{u \in L^2(0, T), a_{kj}(\omega) t^{\sigma + \langle \delta, k \rangle + j} D_t^j u \in L^2(0, T),\ |k| + j \leqslant m, \sigma + \langle \delta, k \rangle + j \in \mathbf{N}\},$$

$$V(0, T) = \{u \in H^{-\sigma}(0, T), t^{\sigma + j} D_t^j u \in L^2(0, T), -\sigma \leqslant j \leqslant m\}.$$

et on munit ces espaces des normes canoniques. Puisque l'on a:

$$V(0, T) = \{u \in L^2(0, T), t^{\sigma + m} D_t^m u \in L^2(0, T)\},$$

les espaces $W_\omega(0, T)$ et $V(0, T)$ coïncident.

D'après Bolley-Camus-Helffer [5], la condition $H_{2,\omega}$ implique alors que l'opérateur $L(\omega)$, considéré comme opérateur linéaire continu de $V(0, T) = W_\omega(0, T)$ dans $L^2(0, T)$, est à indice, d'indice $-\sigma + r_0(\omega)$.

b) Etude de $L(\omega)$ sur (T, ∞): on introduit la fonction:

$$h(\omega, t) = t^{-1}\Big(\sum_{\substack{|k| = m \\ \sigma + \langle \delta, k \rangle \in \mathbf{N}}} |a_{k0}(\omega)| t^{\langle \delta, k \rangle} \Big)^{1/m}.$$

Pour $t > 0$, $h(\omega, t)$ est non nulle d'après $H_{0,\omega}$ et de plus on a:

$$h(\omega, t) \geqslant t^{-1+\delta_n}\Big(\sum_{\substack{|k| = m \\ \sigma + \langle \delta, k \rangle \in \mathbf{N}}} |a_{k0}(\omega)| \Big)^{1/m},$$

donc, $T = T(\omega)$ restant à choisir, l'application: $t \to y = \int_T^t h(\omega, \tau)\, d\tau$, est une bijection croissante de (T, ∞) sur $(0, \infty)$.

On note:

$$V_\omega(T, \infty) = \{u \in \mathcal{D}'(T, \infty), t^{\sigma + m} h^m(\omega, t) u \in L^2(T, \infty), t^{\sigma + m} D_t^m u \in L^2(T, \infty)\}$$

et encore:

$$W_\omega(T, \infty) =$$
$$= \{u \in L^2(T, \infty), a_{kj}(\omega) t^{\sigma + \langle \delta, k \rangle + j} D_t^j u \in L^2(T, \infty), |k| + j \leqslant m, \sigma + \langle \delta, k \rangle + j \in \mathbf{N}\},$$

ces espaces étant munis des normes canoniques. On a de façon évidente l'inclusion $W_\omega(T, \infty) \subset V_\omega(T, \infty)$; de plus, pour $u \in V_w(T, \infty)$, on a:

$$t^{\sigma+m} h^{m-j}(\omega, t) D_t^j u \in L^2(T, \infty) \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m .$$

La condition $H_{1,\omega}$ montre alors qu'on a aussi $V_\omega(T, \infty) \subset W_\omega(T, \infty)$ pour T assez grand.

Pour $u \in W_\omega(T, \infty)$ on note $v(y) = t^{\sigma+m} h^{m-\frac{1}{2}}(\omega, t) u(t)$; l'égalité $W_\omega(T, \infty) = V_\omega(T, \infty)$ et la formule:

$$(2.1) \quad t^{\sigma+m} h^{m-j}(\omega, t) D_t^j u + h^{\frac{1}{2}-j}(\omega, t) \sum_{l=0}^{j-1} \psi_{j,l}(\omega, t) D_t^l u = h^{\frac{1}{2}}(\omega, t)\big(D_y^j v + h^{-j}(\omega, t) \sum_{l=1}^{j-1} \chi_{j,l}(\omega, t) D_y^l v\big)$$

où les fonctions $\psi_{j,l}$ et $\chi_{j,l}$ vérifient: pour $t > 0$,

$$(2.2) \quad |\psi_{j,l}(\omega, t)| \leqslant C t^{\sigma+m-j+l} h^{m-\frac{1}{2}}(\omega, t)$$

$$(2.3) \quad |\chi_{j,l}(\omega, t)| \leqslant C t^{-j+l} h^l(\omega, t) ,$$

permettent de montrer que l'application $u \to v$ est un isomorphisme de $W_\omega(T, \infty)$ sur $H^m(0, \infty)$.

Gardant les notations $y = \int_T^t h(\omega, \tau)\, d\tau$ et $v(y) = t^{\sigma-m} h^{m-\frac{1}{2}}(\omega, t) u(t)$, on montre que:

$$L(\omega) u(t) = h^{\frac{1}{2}}(\omega, t) M(\omega) v(y) \equiv h^{\frac{1}{2}}(\omega, t)\big(M_0(\omega) + M_1(\omega)\big) v(y) ,$$

où:

$$M_0(\omega) v = D_y^m v + \sum_{j=0}^{m-1} A_{0,j}(\omega, y) D_y^j v$$

$$M_1(\omega) v = \sum_{j=0}^{m-1} A_{1,j}(\omega, y) D_y^j v , \quad \text{avec}$$

$$A_{0,j}(\omega, y) = \sum_{\substack{|k| = m-j \\ \sigma + \langle \delta, k \rangle + j \in \mathbf{N}}} a_{kj}(\omega) t^{\langle \delta, k \rangle + j - m} h^{-m+j}(\omega, t) ,$$

$$|D_y^l A_{0,j}(\omega, y)| \leqslant C\big(\mathrm{th}\,(\omega, t)\big)^{-l} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m-1,\ 0 \leqslant l \leqslant m,\ y \geqslant 0$$

et pour T assez grand:

$$|A_{1,j}(\omega, y)| \leqslant C\big(\mathrm{th}\,(\omega, t)\big)^{-1} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m-1,\ y \geqslant 0 .$$

L'hypothèse $H_{0,\omega}$ se traduit alors par: pour tout $y \geqslant 0$ l'équation en ζ:

$$M_0(\omega, y, \zeta) = \zeta^m + \sum_{j=0}^{m-1} A^{0,j}(\omega, y)\zeta^j = 0 ,$$

n'a pas de racine réelle et il existe $C = C(\omega) > 0$ telle que pour $y \geqslant 0$, les $m_+(\omega)$ racines $\zeta(\omega, y)$ à partie imaginaire positive vérifient $\operatorname{Im} \zeta(\omega, y) \geqslant C$.

En choisissant $T = T(\omega)$ assez grand on voit que l'opérateur $M(\omega)$ vérifie pour $y \geqslant 0$ les hypothèses du théorème 3.1 de Visik-Grusin [12]: $M(\omega)$ est donc un opérateur linéaire continu surjectif de $H^m(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ et son noyau est de dimension $m_+(\omega)$. On en déduit que $L(\omega)$ considéré comme linéaire continu de $W_\omega(T, \infty)$ dans $L^2(T, \infty)$ est à indice, d'indice $m_+(\omega)$. Ceci démontre la proposition 2.1.

On suppose maintenant que le paramètre ω décrit un compact K de $\mathbb{C}^n$ et que les fonctions $a_{kj}(\omega)$ sont continues sur K; on va imposer à $L(\omega)$, opérant sur $W_w(\mathbb{R}_+)$, des hypothèses plus fortes pour obtenir un résultat d'isomorphisme uniforme en ω (en ajoutant au besoin des conditions différentielles en 0).

Plus précisément on introduit les conditions:

H_0: Pour tout $\omega \in K$, $H_{0,\omega}$ est vérifiée et $m_+(\omega) = m_+$ est indépendant de ω.

H_1: Pour tout $\omega \in K$, $H_{1,\omega}$ est vérifiée.

H_2: Pour $-\sigma \leqslant j \leqslant m$, $a_{0j}(\omega) = a_{0j}$ est indépendant de ω et $r_0(\omega) = 0$.

Si le nombre $\chi = m_+ - m - \sigma$ est strictement positif, on considère de plus des opérateurs différentiels $B_j(\omega, D_t)$, $j = 0, \ldots, \chi - 1$, d'ordre m_j, $0 \leqslant m_j \leqslant -\sigma - 1$, qui s'écrivent:

$$B_j(\omega) \equiv B_j(\omega, D_t) = \sum_{q \leqslant m_j} b_{jq}(\omega) D_t^q ,$$

où les fonctions b_{jq} sont continues sur K.

On introduit alors la dernière condition:

H_3: Le nombre $\chi = m_+ - m - \sigma$ est positif ou nul et pour tout $\omega \in K$ le problème:

$$\begin{cases} L(\omega)\ u(t) = 0 \\ B_j(\omega)u(0) = 0 , \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant \chi - 1 , \end{cases}$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans $W_\omega(\mathbb{R}_+)$.

On va démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 2.2. *On suppose que l'opérateur*:

$$\mathfrak{T}(\omega)\colon u \to \{L(\omega)u,\ B_j(\omega)u(0),\ j = 0, \ldots, \chi - 1\}\ ,$$

vérifie les conditions H_0, H_1, H_2 *et* H_3. *Alors pour tout* $\omega \in K$, $\mathfrak{T}(\omega)$ *est un isomorphisme de* $W_\omega(\mathbb{R}_+)$ *sur* $L^2(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi$, *et la norme de son inverse est bornée sur* K.

On obtient ce théorème en étudiant le noyau de $L(\omega)$ sur $(0, T)$ et sur (T, ∞), T assez grand, et en construisant un inverse à droite pour $L(\omega)$ sur $(0, T)$, et un sur (T, ∞), dont on sait contrôler les normes en fonction du paramètre ω; l'hypothèse H_3 permet ensuite de conclure à l'isomorphisme.

PROPOSITION 2.3. *Sous l'hypothèse* H_2, *pour tout* $\omega \in K$, *l'opérateur* $L(\omega)$ *considéré comme linéaire continu de* $V(0, T)$ *dans* $L^2(0, T)$ *est surjectif et a un noyau de dimension* $-\sigma$. *Ce noyau admet pour base un système* $\{\varphi_1(\omega, t), t\varphi_2(\omega, t), \ldots, t^{-\sigma-1}\varphi_{-\sigma}(\omega, t)\}$, *où les fonctions* φ_j *sont continues sur* $K\times[0, T]$ *ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à* t, *et vérifient* $\varphi_j(\omega, 0) = 1$.

DÉMONSTRATION. Pour $\omega \in K$, $L(\omega)$: $V(0, T) \to L^2(0, T)$ est d'indice $-\sigma$; en particulier son image est fermée dans $L^2(0, T)$; l'ellipticité de $L(\omega)$ dans $]0, T[$ montre que cette image contient $\mathfrak{D}(]0, T[)$; $L(\omega)$ est donc une surjection de $V(0, T)$ sur $L^2(0, T)$ et son noyau est de dimension $-\sigma$. L'équation $F(\varrho) = 0$ n'ayant pas de racine entière supérieure ou égale à $-\sigma$ on peut trouver $-\sigma$ fonctions $\varphi_j(\omega, t)$, $1 \leqslant j \leqslant -\sigma$, analytiques dans $]-2T, 2T[$ vérifiant $\varphi_j(\omega, 0) = 1$ et $L(\omega)(t^{j-1}\varphi_j(\omega, t) = 0)$ dans $]-2T, 2T[$. De plus les coefficients du développement en série entière de $D_t^k\varphi_j(\omega, t)$, $k \in \mathbf{N}$, sont continus dans $K\times[0, T]$, (les $-\sigma - j - 1$ premiers coefficients du développement de $\varphi_j(\omega, t)$ étant pris égaux à 1), et ce développement converge uniformément sur $K\times[0, T]$; alors les fonctions $D_t^k\varphi_j$ sont continues en (ω, t) dans $K\times[0, T]$; d'où la proposition.

PROPOSITION 2.4. *Sous l'hypothèse* H_2, *pour tout* $\omega \in K$, *l'opérateur*:

$$\mathfrak{U}(\omega)\colon = W_\omega(0, T) \to L^2(0, T)\times\mathbb{C}^{-\sigma}$$
$$u \to \{L(\omega)u,\ (D_t^j u)(0),\ j = 0, \ldots, -\sigma - 1\}\ ,$$

est inversible et la norme de son inverse est bornée sur K.

DÉMONSTRATION. Puisque $W_\omega(0, T) = V(0, T)$ pour tout $\omega \in K$, l'opérateur $\mathfrak{U}(\omega)$ est linéaire continu de $W_\omega(0, T)$ dans $L^2(0, T)\times\mathbb{C}^{-\sigma}$. En utili-

sant la base du noyau $\ker L(\omega)$ de $L(\omega)$: $V(0, T) \to L^2(0, T)$ décrite à la proposition 2.3, on voit que l'application:

$$\ker L(\omega) \to \mathbf{C}^{-\sigma}$$

$$u \to \{(D_t^j u)(0),\ j = 0, \ldots, -\sigma - 1\}\ .$$

est bijective. Ceci entraîne l'injectivité de $\mathfrak{A}(\omega)$ et aussi la surjectivité puisque $L(\omega)$ est une surjection de $W_\omega(0, T)$ sur $L^2(0, T)$.

D'autre part $L(\omega)$ ayant des coefficients continus sur K, on montre facilement que la norme de l'application inverse de $\mathfrak{A}(\omega)$: $V(0, T) \to L^2(0, T) \times \mathbf{C}^{-\sigma}$ est bornée sur K; la norme de l'injection de $V(0, T)$ dans $W_\omega(0, T)$ étant aussi bornée sur K on en déduit la proposition 2.4.

LEMME 2.5.

i) *Pour $T > 0$, la norme de l'isomorphisme:*

$$V_\omega(T, \infty) \to H^m(0, \infty)$$

$$u \to t^{\sigma+m} h^{m-\frac{1}{2}}(\omega, t) u\ ,$$

est bornée sur K, ainsi que celle de son inverse.

ii) *Pour $T > 0$, la norme de l'injection de $V_\omega(T, \infty)$ dans $W_\omega(T, \infty)$ est bornée sur K.*

DÉMONSTRATION. ii) Se déduit de i) à l'aide de H_1. On montre donc i): soit $T > 0$ et soit $u \in V_\omega(T, \infty)$; alors $u \in L^2(T, \infty)$ et il existe $C > 0$ telle que pour tout $\omega \in K$ on ait:

$$\|u\|_{L^2(T,\infty)} \leqslant C \|t^{\sigma+m} h^m(\omega, t) u\|_{L^2(T,\infty)}\ .$$

On en déduit que pour $j = 0, \ldots, m$ on a, avec C indépendante de $\omega \in K$:

$$\|t^{\sigma+j} D_t^j u\|_{L^2(T,\infty)} \leqslant C \|u\|_{V_\omega(T,\infty)}\ .$$

On a de plus:

$$|D_t^j h^{-1}(\omega, t)| \leqslant C t^{-j} h^{-1}(\omega, t)\ , \qquad \text{pour } t > 0,\ \omega \in K\ ,$$

et dans (2.2) la constante C peut être choisie indépendante de $\omega \in K$; alors la formule:

$$h^{\frac{1}{2}} D_y^m v = \sum_{\substack{i_0 + i_r j_r + \ldots + i_k j_k = m \\ j_0 + j_r + \ldots + j_k = m \\ i_p j_p \neq 0 \text{ pour } p = 1, \ldots, k,\ k \geqslant 1}} c_{ij} (h^{-1})^{j_0} (D_t^{i_1} h^{-1})^{j_1} \ldots (D_t^{i_k} h^{-1})^{j_k} \cdot \cdot \left(t^{\sigma+m} h^m D_t^{i_0} u + h^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{i_0 - 1} \psi_{i_0, l} D_t^l u\right),$$

montre que l'on a:

$$\|D_y^m v\|_{L^2(0,\infty)} \leqslant C\|u\|_{V_\omega(T,\infty)}, \quad \text{avec } C \text{ indépendante de } \omega \in K.$$

Ceci démontre, puisque $\|u\|_{L^2(T,\infty)} = \|v\|_{L^2(0,\infty)}$, que la norme de l'application $u \to v$ est bornée sur K.

Enfin de la majoration:

$$\|D_y^j w\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} \leqslant C\{\|w\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} + \|D_y^m w\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}\} \quad \text{pour } w \in H^m(\mathbf{R}_+),$$

de la formule (2.1), et du fait que dans (2.3) la constante peut être rendue indépendante de $\omega \in K$, on déduit qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $\omega \in K$ on ait:

$$\|t^{\sigma+m} h^{m-j}(\omega, t) D_t^j u\|_{L^2(T,\infty)} \leqslant C\{\|v\|_{L^2(0,\infty)} + \|D_t^m v\|_{L^2(0,\infty)}\},$$

pour $j = 1, \ldots, m$.

Ceci démontre que la norme de l'application inverse de $u \to v$ est aussi bornée sur K.

PROPOSITION 2.6. *Sous les hypothèses H_0 et H_1 il existe $T > 0$, $C > 0$ tels que pour tout $\omega \in K$ le noyau de l'opérateur $L(\omega)$: $W_\omega(T, \infty) \to L^2(T, \infty)$ admette une base $\{u_1(\omega, t), \ldots, u_{m_+}(\omega, t)\}$ de fonctions continues sur $K \times [T, \infty)$ ainsi que leurs dérivées $D_t^j u_k$ pour $j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant m_+$, et qui vérifient:*

$$\sum_{k=1}^{m_+} \|u_k(\omega)\|_{W_\omega(T,\infty)} \leqslant C.$$

DÉMONSTRATION. D'après H_0, on peut choisir T assez grand de façon que l'opérateur $M(\omega)$ vérifie sur K les hypothèses du théorème 3.1 de Visik-Grusin [12]; alors le noyau de $M(\omega)$: $H^m(0, \infty) \to L^2(0, \infty)$ admet une base $\{v_1(\omega, y), \ldots, v_{m_+}(\omega, y)\}$ de fonctions continues sur $K \times [0, \infty[$ ainsi que leurs dérivées $D_y^j v_k$ pour $j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant m_+$ et de plus: il existe $C > 0$, $d > 0$ telles que pour $j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant m_+$, $\omega \in K$, $y \geqslant 0$, on ait:

$$|D_y^j v_k(\omega, y)| \leqslant C \exp[-dy]$$

les fonctions $\psi_{j,l}(\omega, t)$ et $\chi_{j,l}(\omega, t)$ intervenant dans la formule (2.1) étant continues sur $K \times]0, \infty[$, on obtient la proposition en posant:

$$u_k(\omega, t) = t^{-\sigma-m} h^{-m+\frac{1}{2}}(\omega, t) v_k(\omega, y)$$

et en utilisant le lemme 2.5.

PROPOSITION 2.7. *Sous les hypothèses H_0 et H_1 il existe $T>0$ tel que pour tout $\omega \in K$, l'opérateur*:

$$\mathfrak{U}(\omega)\colon W_\omega(T, \infty) \to L^2(T, \infty)\times \mathbf{C}^{m_+}$$
$$u \to \{L(\omega)u,\ (D^j u)(T),\ j=0, \ldots, m_+-1\},$$

soit inversible et tel que la norme de l'inverse de $\mathfrak{U}(\omega)$ soit bornée sur K.

DÉMONSTRATION. D'àprès Visik-Grusin, en choisissant T assez grand, l'opérateur

$$\mathfrak{W}(\omega)\colon H^m(0, \infty) \to L^2(0, \infty)\times \mathbf{C}^{m^+}$$
$$v \to \{M(\omega)v,\ (D_t^j v)(0),\ j=0, \ldots, m_+-1\},$$

est inversible pour tout $\omega \in K$ et la norme de son inverse est bornée sur K.

La proposition s'en déduit en remarquant que le problème:

$$\begin{cases} L(\omega)u(t) = f(t), & t>T \\ (D_t^j u)(T) = c_j, & 0\leqslant j\leqslant m_+-1, \end{cases}$$

est équivalent à:

$$\begin{cases} M(\omega)v(y) = g(y), & y>0 \\ (D_j^t v)(0) = d_j, & 0\leqslant j\leqslant m_+-1, \end{cases}$$

avec:

$$\begin{cases} g(y) = h^{-\frac{1}{2}}(\omega, t)f(t) \\ d_l = T^{\sigma+m}h^{m-j-\frac{1}{2}}(\omega, T)c_j + h^{-j}(\omega, T)\sum_{l=0}^{j-1}\psi_{j,l}(\omega, T)C_l - h^{-j}(\omega, T)\sum_{l=1}^{j-1}\chi_{j,l}(\omega, T)d_l, \end{cases}$$

et en utilisant le lemme 2.5.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2. La proposition 2.1 et l'hypothèse H_3 montrent déjà que pour chaque $\omega \in K$, l'opérateur $\mathfrak{T}(\omega)$ est un isomorphisme de $W_\omega(\mathbf{R}_+)$ sur $L^2(\mathbf{R}_+)\times \mathbf{C}^\chi$. Il reste à contrôler la norme de $\mathfrak{T}(\omega)^{-1}$.

Le problème aux limites:

$$\begin{cases} L(\omega)u(t) = f(t), & t>0 \\ B_j(\omega)u(0) = g_j, & j=0, \ldots, \chi-1 \\ u \in W_\omega(\mathbf{R}_+), \end{cases}$$

se transforme grâce aux propositions 2.3, 2.4, 2.6 et 2.7, en notant:

$$u^1 = \mathfrak{U}(\omega)^{-1}(f|_{(0,T)}, 0)\,, \qquad u^2 = \mathfrak{V}(\omega)^{-1}(f|_{(T,\infty)}, 0)$$

$$(u - u^1)(\omega, t) = \sum_{k=0}^{-\sigma-1} \lambda_k(\omega) t^k \varphi_{k+1}(\omega, t)$$

$$(u - u^2)(\omega, t) = \sum_{k=-\sigma}^{-\sigma+m_+-1} \lambda_k(\omega) u_{k+\sigma+1}(\omega, t)\,,$$

en le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{-\sigma-1} B_j(\omega)\big(t^k \varphi_{k+1}(\omega, t)\big)(0) \cdot \lambda_k(\omega) = g_j\,, \qquad j = 0, \ldots, \chi - 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{-\sigma-1} D_t^j\big(t^k \varphi_{k+1}(\omega, t)\big)(T)\lambda_k(\omega) - \sum_{k=-\sigma}^{-\sigma+m_+-1} D_t^j\big(u_{k+\sigma+1}(\omega, t)\big)(T) \cdot \lambda_k(\omega) = \\ \qquad\qquad D_t^j u^2(T) - D_t^j u^1(T)\,, \qquad j = 0, \ldots, m - 1\,. \end{cases}$$

D'après H_3, ce système admet une solution unique. Chaque coefficient de son déterminant $D(\omega)$, ainsi que $D(\omega)^{-1}$, est continu sur K d'après les propositions 2.3 et 2.6, donc sa solution $\{\lambda_0(\omega), \ldots, \lambda_{-\sigma+m_+-1}(\omega)\}$ vérifie, avec C indépendante de $\omega \in K$:

$$\begin{aligned} |\lambda_k(\omega)| &\leqslant C\Big\{\sum_{j=0}^{\chi-1} |g_j| + \sum_{j=0}^{m-1} |D_t^j u^1(T)| + \sum_{j=0}^{m-1} |D_t^j u^2(T)|\Big\} \\ &\leqslant C\Big\{\sum_{j=0}^{\chi-1} |g_j| + \|u^1\|_{W_\omega(0,T)} + \|u^2\|_{W_\omega(T,\infty)}\Big\} \\ &\leqslant C\Big\{\|f\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} + \sum_{j=0}^{\chi-1} |g_j|\Big\}\,, \end{aligned}$$

ce qui implique:

$$\|u\|_{W_\omega(\mathbf{R}_+)} \leqslant C\Big\{\|f\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} + \sum_{j=0}^{\chi-1} |g_j|\Big\}\,,$$

d'où le théorème 2.2.

3. – Résolvante de réalisations dans L^2 pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.

Pour obtenir le théorème 1.1, suivant la méthode d'Agranovich-Visik, on étudie deux aspects des problèmes aux limites dans un ouvert borné

pour l'opérateur $L-\lambda$, $|\lambda|$ assez grand: les estimations à priori contrôlées en λ et l'existence.

Pour cela on déduit d'abord du paragraphe 2) un résultat d'isomorphisme dans $\mathbf{R}^n_+$ pour des opérateurs quasi-homogènes, opérateurs qui proviendront d'un figeage sur le bord des coefficients d'une « partie principale » de L:

3.1. *Problèmes aux limites dans $\mathbf{R}^n_+$ avec paramètre spectral pour des opérateurs elliptiques dégénérés quasi-homogènes.*

On considère dans $\mathbf{R}^n_+$ les opérateurs quasi-homogènes:

$$L_0 \equiv L_0(y_n, D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbf{N}}} a_{\alpha j} y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j},$$

$$B_j^0 \equiv B_j^0(D_y) = \sum_{\delta|\beta|+q=m_j} b_{jq\beta} D_{y'}^{\beta} D_{y_n}^{q}, \qquad j = 0, \ldots, -\sigma-m-1,$$

où $a_{\alpha j}$ et $b_{jq\beta}$ sont des constantes et les scalaires m, σ, δ vérifient les hypothèses du paragraphe 1). On note γu la trace de u sur $y_n = 0$ lorsqu'elle a un sens et $H^s(\Omega)$, $s\geqslant 0$, les espaces de Sobolev usuels. La continuité de l'opérateur

$$\mathfrak{T}_\lambda^0 = \{L^0-\lambda, \gamma B_j^0,\ j = 0, \ldots, -\sigma-m-1\}$$

de $W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n_+)\times \prod_{j=0}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})$, $\mu_j=(-\sigma-m_j-\frac{1}{2})/\delta$, résulte du lemme simple, [7]:

LEMME 3.1. *Soient $\alpha\in\mathbf{N}^{n-1}$, $j\in\mathbf{N}$ tels que $\delta|\alpha|+j<-\sigma-\frac{1}{2}$.*

Si $u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$ on a $\gamma D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j} u \in H^{(-\sigma-j-\delta|\alpha|-\frac{1}{2})/\delta}(\mathbf{R}^{n-1})$; De plus il existe $C>0$ telle que pour tout $\lambda\geqslant 0$ on ait: pour tout $u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$.

$$\|\gamma D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j} u\|_{H^{(-\sigma-j-\delta|\alpha|-\frac{1}{2})/\delta}(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda^{(\sigma+j+\delta|\alpha|+\frac{1}{2})/\sigma} \|\gamma D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j} u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}$$
$$\leqslant C\{\|y_n^{\sigma+2m} D_{y_n}^{2m} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=2m} \|y_n^{\sigma+2\delta m} D_{y'}^{\alpha} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + (1+\lambda)\|u\|\}_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}.$$

Ce lemme montre de plus qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $\lambda\in S$ on ait, pour $u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$:

$$\|(L^0-\lambda)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} \left(\|\gamma B_j^0 u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j}\|\gamma B_j^0 u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}\right)$$
$$\leqslant C\{\|y_n^{\sigma+2m} D_{y_n}^{2m} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=2m} \|y_n^{\sigma+2\delta m} D_{y'}^{\alpha} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + (1+|\lambda|)\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\},$$

où $\nu_j = (\sigma + m_j + \frac{1}{2})/\sigma$.

Du théorème 2.2 on va déduire:

PROPOSITION 3.2. *On suppose vérifiées les conditions E_1, E_2 et E_3. Alors pour tout $\lambda \in S - \{0\}$, l'opérateur:*

$$\mathfrak{T}_\lambda^0 : W_{\sigma,\delta}^{2m}(\mathbf{R}_+^n) \to L^2(\mathbf{R}_+^n) \times \prod_{j=0}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})$$

$$u \to \{(L^0 - \lambda)u,\ \gamma B_j^0 u\,, \quad j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1\}\,,$$

est inversible et il existe $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in S - \{0\}$ on ait: pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{2m}(\mathbf{R}_+^n)$.

$$\|y_n^{\sigma+2m} D_{y_n}^{2m} u\|_{L^2(\mathbf{R}_+^n)} + \sum_{|\alpha|=2m} \|y_n^{\sigma+2\delta m} D_{y'}^{\alpha} u\|_{L^2(\mathbf{R}_+^n)} + |\lambda| \cdot \|u\|_{L^2(\mathbf{R}_+^n)}$$

$$\leqslant C\{\|(L^0 - \lambda)u\|_{L^2(\mathbf{R}_+^n)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} (\|\gamma B_j^0 u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j} \|\gamma B_j^0 u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})})\}\,. \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION. Soient $f \in L^2(\mathbf{R}_n^+)$, $g_j \in H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})$, $j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1$. On note $\hat{f}(\xi', y_n)$, $\hat{g}_j(\xi')$ les transformées de Fourier en y' de f et g_j.

Pour $(\xi', \lambda) \in (\mathbf{R}^{n-1} \times S) - \{0\}$ on note $r(\xi', \lambda)$ l'unique réel positif solution de:

$$\sum_{n-1}^{i=1} r^{-2\delta} \xi_i^2 + r^{\sigma/m} |\lambda|^{1/m} = 1\,,$$

et $\omega = (r^{-\delta}\xi', r^\sigma \lambda)$. Sous les hypothèses E_1, E_2, E_3 les opérateurs $L(\omega) = L^0(t, r^{-\delta}\xi', D_t) - r^\sigma \lambda$, $B_j(\omega) = B_j^0(r^{-\delta}\xi', D_t)$ vérifient les conditions H_0, H_1, H_2, H_3 de 2), l'espace $W_\omega(\mathbf{R}_+)$ s'identifiant à:

$$\{u \in L^2(\mathbf{R}_+),\ t^{\sigma+2m} D_t^{2m} u \in L^2(\mathbf{R}_+)\} \quad \text{si } \xi' = 0$$

$$\{u \in L^2(\mathbf{R}_+),\ t^{\sigma+2\delta m} u \in L^2(\mathbf{R}_+),\ t^{\sigma+2m} D_t^{2m} u \in L^2(\mathbf{R}_+)\} \quad \text{si } \xi' \neq 0\,.$$

Une condition nécessaire pour que $u \in W_{\sigma,\delta}^{2m}(\mathbf{R}_+^n)$ soit solution de $\mathfrak{T}_\lambda^0 u = (f, g_j)$ est que pour presque tout $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ la fonction $v(t) = \hat{u}(\xi', y_n)$, avec $t = r(\xi', \lambda) y_n$ vérifie:

$$\begin{cases} (L^0(t, r^{-\delta}\xi', D_t) - r^\sigma \lambda) v(t) = r^\sigma \hat{f}(\xi', r^{-1}t) \\ (B_j^0(r^{-\delta}\xi', D_t) v(t))(0) = r^{-m_j} \hat{g}_j(\xi')\,, \\ \qquad\qquad j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1,\ v \in W_\omega(\mathbf{R}_+)\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

D'après le théorème 2.2, (3.2) admet une solution unique; ceci démontre l'injectivité de $\mathfrak{T}_\lambda^0$; de plus la solution de (3.2) vérifie:

$$\|t^{\sigma+2m}D_t^{2m}v\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}+\sum_{|\alpha|=2m}\|t^{\sigma+2m\delta}(r^{-\delta}\xi')^\alpha v\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}+\|r^\sigma\lambda v\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}$$
$$\leqslant C\{\|r^\sigma\hat{f}(\xi',r^{-1}t)\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}+\sum_{j=0}^{-\sigma-m-1}|r^{-m_j}\hat{g}_j(\xi')|\}\,,$$

avec C indépendante de ξ' et λ. En revenant en variable y_n on voit que pour $\lambda\in S$, $\lambda\neq 0$, $v(r(\xi',\lambda)y_n)$ est la transformée de Fourier en y' d'une fonction $u\in W^{\sigma,\delta}_{2m}(\mathbf{R}^n_+)$ qui vérifie $\mathfrak{T}_\lambda^0 u=(f,g_j)$ et l'inégalité (3.1); d'où la proposition.

3.2. *Estimations à priori avec paramètre spectral pour des problèmes aux limites elliptiques dégénérés dans un ouvert borné.*

On reprend les notations du paragraphe 1). Il résulte du lemme 3.1 que l'opérateur: $\mathfrak{T}_\lambda=\{L-\lambda,\gamma B_j,\ j=0,\ldots,-\sigma-m-1\}$ est linéaire continu de $W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)\times\prod_{j=0}^{-\sigma-m-1}H^{\mu_j}(\Gamma)$, et qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $\lambda\in S$, $|\lambda|\geqslant 1$ on ait, pour $u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$:

$$\|(L-\lambda)u\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{j=0}^{-\sigma-m-1}\left(\|\gamma B_j u\|_{H^{\mu_j}(\Gamma)}+|\lambda|^{\nu_j}\|\gamma B_j u\|_{L^2(\Gamma)}\right)$$
$$\leqslant C\{\|u\|_{W^{\sigma,\delta}_{2m}(\Omega)}+|\lambda|\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\}\,.$$

On va montrer une inégalité inverse pour $|\lambda|$ grand:

PROPOSITION 3.3. *Sous les hypothèses E_0,E_1,E_2,E_3 il existe $\lambda_0>0$, $C>0$ tels que pour $\lambda\in S$, $|\lambda|\geqslant\lambda_0$ on ait pour tout $u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$:*

$$\|u\|_{W^{\sigma,\delta}_{2m}(\Omega)}+|\lambda|\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\Big\{\|(L-\lambda)u\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{j=0}^{-\sigma-m-1}\left(\|\gamma B_j u\|_{H^{\mu_j}(\Gamma)}+|\lambda|^{\nu_j}\|\gamma B_j u\|_{L^2(\Gamma)}\right)\Big\}\,. \tag{3.3}$$

DÉMONSTRATION. D'après Agranovich-Visik, pour tout $x\in\Omega\cap O_i$, il existe un voisinage ouvert O_x de x contenut dans $\Omega\cap O_i$, $\lambda_x>0$, $C_x>0$ tels que pour tout $\lambda\in S$, $|\lambda|\geqslant\lambda_x$, et pour toute fonction $u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support contenu dans O_x on ait:

$$\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)}+|\lambda|\cdot\|u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_x\|(L-\lambda)u\|_{L^2(\Omega\cap O_x)}.$$

Pour montrer une inégalité du même type si $x \in \Gamma \cap O_i$, on décompose les opérateurs $L - \lambda$ et B_j, en coordonnées locales dans O_i sous la forme:

$$L - \lambda \equiv (L^0 - \lambda) + L^1 + L^2, \qquad B_j = B_j^0 + B_j^1,$$

avec

$$L^0 = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbf{N}}} a_{\alpha j}(y) y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j}$$

$$L^1 = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j > 0 \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \notin \mathbf{N}}} a_{\alpha j}(y) y_n^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} + D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j}$$

$$L^2 = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j < 0}} a_{\alpha j}(y) D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j}$$

$$B_j^0 = \sum_{\delta|\beta|+\alpha = m_j} b_{j\alpha\beta}(y') D_{y'}^{\beta} D_{y_n}^{\alpha}, \qquad B_j^1 = \sum_{\delta|\beta|+\alpha < m_j} b_{j\alpha\beta}(y') D_{y'}^{\beta} D_{y_n}^{\alpha}.$$

On note $L^0(x)$, $B_j^0(x)$ les opérateurs obtenus à partir de L^0 et B_j^0 en figeant les coefficients $a_{\alpha j}$ et $b_{j\alpha\beta}$ au point x. Ces opérateurs sont du type étudié en 3.1. De la proposition 3.2 on déduit donc qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tous $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant 1$ et $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $O_i \cap \bar{\Omega}$ on ait en coordonnées locales:

$$\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + |\lambda| \cdot \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leqslant C_1 \Big\{ \|(L-\lambda)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} \big(\|\gamma B_j u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j} \|\gamma B_j u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})} \big) + R_u \Big\},$$

avec

$$R_u = \|(L^0 - L^0(x))u + L^1 u + L^2 u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} \big(\|\gamma(B_j^0 - B_j^0(x))u + \gamma B_j^1 u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j} \|\gamma(B_j^0 - B_j^0(x))u + \gamma B_j^1 u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})} \big).$$

La majoration de R_u va se déduire des lemmes simples suivants (partiellement démontrés dans [7]), qui seront utilisés aussi par la suite:

LEMME 3.4. *Il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \geqslant 1$ les quantités suivantes se majorent par: $C\lambda^{-\gamma}\{\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega^n_+)} + \lambda \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\}$:*

i) $\|D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$ *pour* $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$ *si* $|\alpha| + j \leqslant 2m$, $\sigma + \delta|\alpha| + j < 0$.

ii) $\|y_n^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} + D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$ *pour* $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$ *à support dans* $y_n \leqslant 1$ *si* $\sigma + \delta|\alpha| + j > 0$, $\sigma + \delta|\alpha| + j \notin \mathbf{N}$, $|\alpha| + j \leqslant 2m - 1$.

iii) $\|y_n^{\sigma+\delta(|\alpha|+1)+j} D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$ *et* $\|y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j+\inf(1,\delta)} D_{y'}^{\alpha} D_{y_n}^{j} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$,

pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$ *à support dans* $y_n \leqslant 1$, *si* $\sigma + \delta|\alpha| + j \in \mathbf{N}$, $|\alpha| + j \leqslant 2m-1$.

LEMME 3.5. *Si* $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2$, *il existe* $C>0$, $\gamma>0$ *tels que pour* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \geqslant 1$ *on ait pour* $u \in H^{s_2}(\mathbf{R}^{n-1})$:

$$\|u\|_{H^{s_1}(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda^{\delta s_2/-\sigma} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})} \leqslant C\lambda^{-\gamma}\{\|u\|_{H^{s_2}(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda^{\delta s_2/-\sigma}\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}\}.$$

Ces lemmes donnent alors: il existe un voisinage U de x contenu dans O_i et $C>0$ tels que pour $\lambda \geqslant 1$ et $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $U \cap \bar{\Omega}$, on ait:

$$\|L^2 u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} (\|\gamma B_j^1 u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda^{\nu_j}\|\gamma B_j^1 u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})} \leqslant C\lambda^{-\gamma}(\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + \lambda\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}).$$

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage ouvert U_ε de x contenu dans U et il existe $C>0$ tels que pour $\lambda \geqslant 1$ et $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $U_\varepsilon \cap \bar{\Omega}$ on ait:

$$\|(L^0 - L^0(x))u + L^1 u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} \big(\|\gamma(B_j^0 - B_j^0(x))u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda^{\nu_j}\|\gamma(B_j^0 - B_j^0(x))u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}\big) \leqslant (\varepsilon + C\lambda^{-\gamma})\cdot(\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + \lambda\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}).$$

Ceci donne une majoration de R_u en fonction de $\varepsilon>0$, $\lambda \geqslant 1$ et $(\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + \lambda\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)})$ pour u à support dans $U_\varepsilon \cap \bar{\Omega}$; on choisit alors ε assez petit λ_x assez grand, on note $O_x = U_\varepsilon$ de façon que pour $\lambda \geqslant \lambda_x$ et u à support dans $O_x \cap \bar{\Omega}$, on ait:

$$C_1 \cdot R_u \cdot \leqslant \tfrac{1}{2}(\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + \lambda\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}).$$

Alors on a aussi:

$$\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + |\lambda|\cdot\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leqslant C_x(\|(L-\lambda)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} (\|\gamma B_j u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j}\|\gamma B_j u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}),$$

pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_x$, $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $O_x \cap \bar{\Omega}$.

De la famille des ouverts O_x lorsque x parcourt $\bar{\Omega}$ on extrait une famille finie $\{U_1 \dots U_q\}$ recouvrant $\bar{\Omega}$ et on considère une partition de l'unité $\{\psi_1 \dots \psi_q\}$

subordonnée à ce recouvrement. Il existe donc $C>0$, $\lambda_1\geqslant 1$ tels que pour tous $\lambda\in S$, $|\lambda|\geqslant\lambda_1$ et $u\in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ on ait:

$$\begin{cases} \|\psi_k u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega^n_+)}+|\lambda|\cdot\|\psi_k u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|(L-\lambda)(\psi_k u)\|_{L^2(\Omega)}, & \text{si } U_k\subset\Omega, \\ \|\psi_k u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)}+|\lambda|\cdot\|\psi_k u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\leqslant C\{\|(L-\lambda)(\psi_k u)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \\ \qquad +\sum_{j=0}^{-\sigma-m-1}(\|\gamma B_j(\psi_k u)\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})}+|\lambda|^{\nu_j}\|\gamma B_j(\psi_k u)\|_{L^2(\mathbf{R}_{n-1})})\}, \\ \qquad\qquad \text{si } U_k\cap\Gamma\neq\emptyset, \text{ en coordonnées locales}. \end{cases}$$

On montre facilement que si $U_k\subset\Omega$ on a, en notant $AB-BA\equiv[A,B]$,

$$\|[L-\lambda,\psi_k]u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C|\lambda|^{-1/2m}\big(\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)}+|\lambda|\cdot\|u\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

De plus les lemmes 3.4 et 3.5 donnent dans le cas $U_k\cap\Gamma\neq\emptyset$:

$$\|[L-\lambda,\psi_k]u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}+\sum_{j=0}^{-\sigma-m-1}(\|\gamma[B_j,\psi_k]u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})}+|\lambda|^{\nu_j}\|\gamma[B_j,\psi_k]u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}) \leqslant C|\lambda^{-\gamma}|(\|\chi_k u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)}+|\lambda|\cdot\|\chi_k u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)})$$

où $0<\gamma\leqslant 1/2m$ et χ_k est une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathbf{R}^n$ à support dans U_k et égale à 1 sur un voisinage du support de ψ_k.

Une sommation sur k donne enfin pour $|\lambda|\geqslant\lambda_1$:

$$\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)}+|\lambda|\cdot\|u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\{\|(L-\lambda)u\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{j=0}^{-\sigma-m-1}(\|\gamma B_j u\|_{H^{\mu_j}(\Gamma)} +|\lambda|^{\nu}\|\gamma B_j u\|_{L^2(\Gamma)})+|\lambda|^{-\gamma}(\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)}+|\lambda|\cdot\|u\|_{L^2(\Omega)})\},$$

d'où la proposition 3.3 en choisissant λ_0 assez grand.

On montre maintenant une réciproque de la proposition 3.3:

PROPOSITION 3.6. *Si la conclusion de la proposition* 3.3 *est vraie alors les conditions* E_0, E_1, E_3 *sont vérifiées pour* $\lambda\in S$. *Si de plus pour tout* $x\in\Gamma$ *l'équation* $F(x,\varrho)=0$ *n'a pas de racine sur la droite* $\operatorname{Re}\varrho=-\sigma-\frac{1}{2}$ *alors* E_2 *est aussi vérifiée.*

DÉMONSTRATION. On suppose donc que (3.3) est vérifiée pour $|\lambda|$ grand. Les mêmes techniques que celles utilisées dans la démonstration de la proposition 3.3 montrent que pour tout $x\in\overline{\Omega}$ il existe un voisinage ouvert O_x

de x, $C_x > 0$ et $\mu_x > 0$ tels que pour tout $\mu \in S$, $|\mu| \geqslant \mu_x$ on ait:

$$\|u\|_{H^{2m}(\Omega)} + |\mu| \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_x \left\| \left(\sum_{|\alpha|=2m} A_x(x) D^\alpha - \mu \right) u \right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.4}$$

si $x \in \Omega$, pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans O_x.

$$\|u\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + |\mu| \cdot \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leqslant C_x \{ \|(L^0(x) - \mu)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} (\|\gamma B^0_j(x) u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + |\mu|^{\nu_j} \|\gamma B^0_j(x) u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}) \}, \tag{3.5}$$

en coordonnées locales, si $x \in \Gamma$, pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support contenu dans $O_x \cap \bar{\Omega}$. La nécessité des conditions E_i s'obtient en appliquant (3.4) et (3.5) à des fonctions test particulières:

NÉCESSITÉ DE E_0: (3.4) implique E_0 pour $\lambda \neq 0$ d'après Agranovich-Visik. De plus si dans (3.4) on fixe μ on obtient, pour tout $u \in \mathfrak{D}(O_x)$:

$$\|u\|_{H^{2m}(O_x)} \leqslant C(\mu) \left\{ \left\| \sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x) D^\alpha u \right\|_{L^2(O_x)} + \|u\|_{L^2(O_x)} \right\};$$

il est bien connu que cette estimation implique l'ellipticité de L dans Ω c'est à dire E_0 pour $\lambda = 0$.

NÉCESSITÉ DE E_1: Soit $x \in \Gamma$; on peut supposer que $x = 0$ en coordonnées locales; d'après (3.5) il existe $\varepsilon > 0$, $\mu_0 > 0$, $C > 0$ tels que pour tous $\mu \in S$, $|\mu| \geqslant \mu_0$, $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$ à support dans

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2,\ y_n > \varepsilon/4 \right\}$$

on ait:

$$\|y_n^{\sigma+2m} D^{2m}_{y_n} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=2m} \|y_n^{\sigma+2\delta m} D^\alpha_{y'} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + |\mu| \cdot \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leqslant C \|(L^0(x) - \mu)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}. \tag{3.6}$$

E_1 est trivialement vérifiée pour $(\xi', \zeta) = 0$; si $(\xi', \zeta) \neq 0$ et si $\lambda \neq 0$, on applique 3.6) avec $\mu = \varrho^{2m}\lambda$, $\varrho > 0$ assez grand, à la fonction

$$u_\varrho(y) = \varphi(y')\psi(y_n) \exp\left[i\varrho \left(\sum_{n-1}^{i=1} y_i \xi_i + y_n \zeta \right) \right] \tag{3.7}$$

où $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, le support de $\varphi\psi$ étant contenu dans $\left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2,\ y_n > \varepsilon/4 \right\}$ $\varphi = 1$ au voisinage de 0; puis on fait tendre ϱ vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue.

On obtient:

$$|\lambda| \cdot \|\psi\|_{L^2(0,3\varepsilon/4)} \leqslant C \left\| \Big(\sum_{\substack{|\alpha|+j=2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbf{N}}} a_{\alpha j}(x) y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi'^{\alpha} \zeta^j - \lambda \Big) \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

On applique cette nouvelle inégalité à la fonction:

$$\psi_\varrho(y_n) = \psi_1(y_n)\psi_2(\varrho(y_n - \varepsilon/2)), \tag{3.8}$$

où $\varrho > 0$, $\psi_1 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, $\psi_2 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, $\psi_2(0) \neq 0$, ψ_1 est à support dans $]\varepsilon/4, 3\varepsilon/4[$, à valeurs dans $[0,1]$ et égale à 1 dans $[\varepsilon/3, 2\varepsilon/3]$; puis on fait tendre ϱ vers $+\infty$, ce qui donne E_1 pour $\lambda \neq 0$.

Pour montrer E_1 lorsque $\lambda = 0$ on applique (3.6) avec μ fixé à la fonction u_ϱ définie par (3.7) et on fait tendre ϱ vers $+\infty$; ceci donne:

$$\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \Big)^m + \zeta^{2m} \Big) \|\psi\|_{L^2(\varepsilon/4, 3\varepsilon/4)} \leqslant C(\mu) \left\| \Big(\sum_{\substack{|\alpha|+j=2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbf{N}}} a_{\alpha j}(x) y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi'^{\alpha} \zeta^j \Big) \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Cette inégalité appliquée à la fonction ψ_ϱ définie par (3.8) donne E_1 pour $\lambda = 0$ en faisant tendre ϱ vers $+\infty$.

NÉCESSITÉ DE E_3: Soit $x \in \Gamma$. D'après (3.5) il existe $\varepsilon > 0$, $\mu_0 > 0$, $C > 0$ tels que pour tout $\mu \in S$, $|\mu| \geqslant \mu_0$, $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ à support dans $\left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2 \right\}$ on ait:

$$\sum_{|\alpha|=2m} \|y_n^{\sigma+2\delta m} D^\alpha_{y'} u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + |\mu| \cdot \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leqslant C \Big\{ \|(L^0(x) - \mu)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} \big(\|\gamma B_j^0(x) u\|_{H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})} + |\mu|^{\nu_j} \|\gamma B_j^0(x) u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})} \big) \Big\}. \tag{3.9}$$

Soient $\omega = (\xi', \lambda) \in K$ et $v \in W_\omega(\mathbb{R}_+)$, $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ telles que le support de $\varphi\psi$ soit contenu dans $\left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2 \right\}$, $\varphi = 1$ dans un voisinage de 0, $\psi = 1$ dans $[0, \varepsilon/2]$.

Pour $\lambda \neq 0$ on applique (3.9) avec $\mu = \varrho^{-\sigma}\lambda$ à la fonction:

$$u_\varrho(y) = \varphi(y')\psi(y_n) v(\varrho y_n) \exp\Big[i\varrho^\delta \sum_{i=1}^{n-1} y_i \xi_i \Big], \tag{3.10}$$

en distinguant les deux cas $\xi' \neq 0$ et $\xi' = 0$. On effectue le changement de variable $z = \varrho y_n$ puis on fait tendre ϱ vers $+\infty$. Ceci donne E_3 pour $\lambda \neq 0$. Pour $\lambda = 0$ on applique encore (3.9) avec μ fixé à la fonction u_ϱ définie par (3.10), on effectue le changement de variable $z = \varrho y_n$ et on fait tendre ϱ vers $+\infty$.

NÉCESSITÉ DE E_2: Soit $x \in \Gamma$. On suppose en plus de (3.3) que l'équation $F(x, \varrho) = 0$ n'a pas de racine sur la droite $\operatorname{Re} \varrho = -\sigma - \frac{1}{2}$; la condition E_1 étant nécessaire pour $\lambda \neq 0$, d'après Bolley-Camus-Helffer[5] l'opérateur $L^0(x, \omega)$, où $\omega = (0, \lambda)$ si $n \geqslant 2$, $\omega = \lambda$ si $n = 1$, avec $|\lambda| = 1$, considéré comme linéaire continu de $W_\omega(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ est à indice d'indice $-\sigma + r_0 - m$; la condition E_3 étant aussi nécessaire pour $\lambda \neq 0$, le noyau de $L^0(x, \omega)$ est au plus de dimension $-\sigma - m$. Ceci donne bien $r_0 = 0$ c'est-à-dire E_2.

3.3. *Existence de solutions pour des problèmes aux limites elliptiques dégénérés avec paramètre spectral dans un ouvert borné.*

On garde les notations du paragraphe 1). Le théorème 1.1 est un corollaire immédiat de la proposition 3.3 et du résultat suivant:

PROPOSITION 3.7. *Sous les hypothèses E_0, E_1, E_2 et E_3, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ l'opérateur:*

$$\mathcal{T}_\lambda : W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega) \to L^2(\Omega) \times \prod_{j=0}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\Omega)$$

$$u \to \{(L - \lambda)u,\ \gamma B_j u,\ j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1\},$$

admet un inverse à droite.

DÉMONSTRATION. A l'aide du lemme 3.5 on déduit facilement de la proposition 3.2 le résultat suivant:

LEMME 3.8. *On suppose les conditions E_1, E_2 et E_3 vérifiées pour $\lambda \in S$ et pour les opérateurs à coefficients indéfiniment dérivables dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$:*

$$\begin{cases} L^0(y, D_y) = \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha|+j \leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbf{N}}} a_{\alpha j}(y) y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_{y'}^\alpha D_{y_n}^j \\ B_j^0(y', D_y) = \displaystyle\sum_{\delta|\beta|+\alpha = m_j} b_{j\alpha\beta}(y') D_\beta^{y'} D_{y_n}^\alpha, \qquad j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1. \end{cases}$$

Il existe $\varepsilon > 0$, $\lambda_0 > 0$, $C > 0$ *tels que si on a*:

$$\begin{cases} |a_{\alpha j}(y) - a_{\alpha j}(0)| < \varepsilon, \ |\alpha| + j \leqslant 2m, \ \sigma + \delta|\alpha| + j \in \mathbf{N} \\ |b_{jq\beta}(y') - b_{jq\beta}(0)| < \varepsilon, \ \delta|\beta| + q = m_j, \qquad j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1, \end{cases}$$

l'opérateur:

$$\mathfrak{T}^0_\lambda \colon W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+) \to L^2(\mathbf{R}^n_+) \times \prod_{j=0}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})$$

$$u \to \{L^0(y, D_y)u, \ \gamma B^0_j(y', D_y)u, \ j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1\},$$

admet un inverse à droite $\mathcal{R}^0_\lambda$ *pour* $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ *qui vérifie*: *pour tous* $f \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$, $g_j \in H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})$, $j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1$,

$$\|\mathcal{R}^0_\lambda(f, g_j)\|_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)} + |\lambda| \cdot \|\mathcal{R}^0_\lambda(f, g_j)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leqslant C\Big\{\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{j=0}^{-\sigma-m-1} \big(\|g_j\|_{H^{\mu_j(\Omega^{n-1})}} + |\lambda|^{r_j}\|g_j\|_{L^2(\mathbf{R}^{n-1})}\big)\Big\}. \tag{3.11}$$

Ce lemme 3.8 et un résultat analogue d'Agranovich-Visik dans $\mathbf{R}^n$ montrent qu'il existe un recouvrement $\{U_k\}_{k=1}^q$ de $\bar{\Omega}$ plus fin que $\{O_i\}_{i=1}^p$, une partition de l'unité $\{\psi_k\}_{k=1}^q$ subordonnée à ce recouvrement et une famille $\{\chi_k\}_{k=1}^q$ de fonctions à support dans U_k égales à 1 dans un voisinage du support ψ_k tels que: Si $U_k \subset \Omega$ il existe un prolongement L_k à $\mathbf{R}^n$ de l'opérateur L qui vérifie $L_k(\chi_k u) = L(\chi_k u)$ dans U_k et, l'opérateur $A^0_k - \lambda \in \mathfrak{L}(H^{2m}(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$, où A^0_k est la partie homogène de degré $2m$ en $(D_{x_1}, \ldots, D_{x_n})$ de L_k, admet pour $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ un inverse à droite $\mathcal{R}^0_{k,\lambda}$ tel que: pour tous $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0$,

$$\|\mathcal{R}^0_{k,\lambda} f\|_{H^{2m}(\mathbf{R}^n)} + |\lambda| \cdot \|\mathcal{R}^0_{k,\lambda} f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)},$$

avec C indépendante de λ et f.

Si $U_k \cap \Gamma \neq \emptyset$ il existe un opérateur $\mathfrak{T}_k = \{L_k, B_{j,k}, j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1\}$ du même type que $\{L, B_j\}$ en coordonnées locales qui vérifie $\mathfrak{T}_k(\chi_k u) = \mathfrak{T}_0(\chi_k u)$ en coordonnées locales dans U_k et tel que l'opérateur $\mathfrak{T}^0_{k,\lambda} = \{L^0_k - \lambda, B^0_{j,k}, j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1\}$ linéaire continu de $W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n_+) \times \prod_{j=0}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1})$, admet un inverse à droite $\mathcal{R}^0_{k,\lambda}$ pour $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ qui vérifie (3.11).

On note alors, pour $|\lambda|$ assez grand,

$$\mathcal{R}^0_\lambda(f, g) = \sum_{U_k \cap \Gamma \neq \emptyset} \chi_k \mathcal{R}^0_{k,\lambda}(\psi_k f, \psi_k g_j) + \sum_{U_k \subset \Omega} \chi_k \mathcal{R}^0_{k,\lambda}(\psi_k f) .$$

Des lemmes 3.4 et 3.5 on déduit que l'opérateur $\mathcal{T}_\lambda \mathcal{R}^0_\lambda$ est inversible pour $|\lambda|$ assez grand. Alors $\mathcal{R}^0_\lambda(\mathcal{T}_\lambda \mathcal{R}^0_\lambda)^{-1}$ est un inverse à droite pour $\mathcal{T}_\lambda$ pour $|\lambda|$ assez grand.

4. – Résolution du problème d'évolution parabolique non homogène.

La terminologie et les notations sont celles de Grisvard [8] ou Lions-Magenes [9]. D'après [9] ou [1], par transformation de Laplace, dans le cas où le secteur S est le demi-plan $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$, le théorème 1.1 permet de résoudre de façon unique le problème:

$$\begin{cases} Lu + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u(0) = u_0 \\ B_j u = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0, T[\,, \quad j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1 \\ u \in L^2\big(0, T; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)\big) \cap H^1\big(0, T; L^2(\Omega)\big)\,, \end{cases}$$

pour f donné dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$, $T > 0$, et u_0 dans $[D(L), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}$.

Pour passer au cas non homogène et déterminer l'espace $[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}$, on étudie les traces sur $\Gamma \times]0, T[$ et en $t = 0$ des éléments de l'espace $L^2\big(0, T; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)\big) \cap H^1\big(0, T; L^2(\Omega)\big)$; ces espaces étant locaux il suffit d'ailleurs d'étudier le cas $\Omega = \mathbf{R}^n_+$, $T = +\infty$:

$t \in]a, b[$ désignant la variable d'évolution, pour $r, s \geqslant 0$ on considère l'espace: $H^{r,s}(\Omega \times]a, b[) = L^2\big(a, b; H^r(\Omega)\big) \cap H^s\big(a, b; L^2(\Omega)\big)$, muni de la norme canonique. Les scalaires m, σ, δ vérifiant les hypothèses du paragraphe 1), on montre facilment le résultat de trace sur $x_n = 0$:

LEMME 4.1. *Pour* $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$, $j \in \mathbf{N}$, $\delta|\alpha| + j < -\sigma - \frac{1}{2}$, *l'application*

$$u \to D^\alpha_{x'} D^j_{x_n} u(x', 0, t)$$

est linéaire continue de $L^2\big(0, \infty; H^{-\sigma/\delta, -\sigma}\big(\mathbf{R}^{n-1} \times (0, \infty)\big)\big) \cap H^1\big(0, \infty; L^2(\mathbf{R}^n_+)\big)$ *dans l'espace* $H^{(-\sigma-\delta|\alpha|-j-\frac{1}{2})/\delta, (-\sigma-\delta|\alpha|-j-\frac{1}{2})/(-\sigma)}\big(\mathbf{R}^{n-1} \times (0, \infty)\big)$.

Ce lemme, avec un résultat de Grisvard [8] montrent que l'application:

$$\mathcal{C}_\gamma\colon u \to \{u(x,0),\ D^j_{x_n}u(x',0,t),\ j=0,\dots,-\sigma-1\}\,,$$

est linéaire continue de $L^2(0,\infty;W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+))\cap H^1(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^n_+))$ dans le sous-espace F_γ du produit:

$$[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+),L^2(\mathbf{R}^n_+)]_{\frac12}\times\prod_{j=0}^{-\sigma-m-1}H^{(-\sigma-j-\frac12)/\delta,(-\sigma-j-\frac12)/-\sigma}(\mathbf{R}^{n-1}\times(0,\infty))\,,$$

des $\{u_0,g_j\}$ qui vérifient les relations de compatibilité:

$$\mathcal{RC}_\gamma\begin{cases} D^j_{x_n}u_0(x',0)=g_j(x',0) & \text{si } j<\dfrac{\sigma}{2}-\dfrac12\\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{n-1}}|D^j_{x_n}u_0(x',\tau)-g_j(x',\tau^{-\sigma})|^2\,dx'\,\frac{d\tau}{\tau}<+\infty & \\ \qquad\qquad \text{si } -\sigma \text{ est impair et } j=-\dfrac{\sigma}{2}-\dfrac12\,. \end{cases}$$

On montre alors le résultat de relèvement:

PROPOSITION 4.2. *L'application*

$$\mathcal{C}_\gamma\colon L^2(0,\infty;W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+))\cap H^1(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^n_+))\to F_\gamma\,,$$

est surjective.

DÉMONSTRATION. Soient $\{u_0,g_j\}\in F_\gamma$ et $v\in L^2(0,\infty;W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+))\cap H^1(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^n_+))$ telle que $v(0)=u_0$. Si on note: $D^j_{x_n}v(x',0,t)=h_j(x',t)$ pour $j\leqslant\leqslant-\sigma-1$, on a $\{0,h_j-g_j\}\in F_\gamma$ donc, avec les notations de Lions-Magenes [9]:

$$\begin{cases} h_j-g_j\in H_0^{(-\sigma-j-\frac12)/-\sigma}(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^{n-1})) & \text{si } j<-\dfrac{\sigma}{2}-\dfrac12\\[2ex] h_j-g_j\in H^{\frac12}_{00}(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^{n-1})) & \text{si } -\sigma \text{ est impair et } j=-\dfrac{\sigma}{2}-\dfrac12\,. \end{cases}$$

Le prolongement Q par imparité de $L^2(0,\infty;L^2(\mathbf{R}^{n-1}))$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$Qu(t)=\begin{cases} u(t) & \text{si } t>0\\ -u(-t) & \text{si } t<0\,, \end{cases}$$

étant continu de $H_0^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ dans $H^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ on a, par interpolation:

$$Q(h_j - g_j) \in H^{((-\sigma-j-\frac{1}{2})/-\sigma)}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \quad \text{pour tout } j = 0, \ldots, -\sigma - 1 .$$

Alors, pour $j \leqslant -\sigma - 1$, la fonction w_j définie par sa transformée de Fourier $\hat{w}_j$ en (x', t):

$$\hat{w}_j(\xi', x_n, \tau) = \\ = i^j \widehat{Q(h_j - g_j)}(\xi', \tau) \frac{d^{\sigma+2m}}{dx_n^{\sigma+2m}} \left(\frac{x_n^{\sigma+2m+j}}{(\sigma+2m+j)!} \psi\left(\left(1 + \left(\sum_{n-1}^{i=1} \xi_i^2\right)^{1/2\delta} + |\tau|^{-1/\sigma}\right) x_n \right) \right)$$

où $\psi \in \mathcal{D}([0, \infty[)$ vaut 1 dans un voisinage de zéro, vérifie:

$$\begin{cases} w_j \in L^2(\mathbb{R}, W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n_+)) \\ D^k_{x_n} w_j(x', 0, t) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j, \ k \leqslant -\sigma - 1 \\ Q(h_j - g_j)(x', t) \text{ si } k = j \end{cases} \\ w_j(x, 0) = 0 . \end{cases}$$

En considérant $u = v - \sum_{j=0}^{-\sigma-1} w_j$ on démontre ainsi la surjectivité de l'application $\mathcal{C}_\gamma$.

On va démontrer un résultat du même type, les $D^j_{x_n}$ étant remplacés par un système d'opérateurs normal sur $\{x_n = 0\}$:

On considère un système $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=0}^p$ d'opérateurs différentiels de la forme:

$$B_j(x', D_x) = \sum_{\delta|\beta| + \alpha \leqslant m_j} b_{j\alpha\beta}(x') D^\beta_{x'} D^\alpha_{x_n} ,$$

où $0 \leqslant m_j \leqslant -\sigma - 1$ et les fonctions $b_{j\alpha\beta}$ sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On suppose que $m_j \neq m_k$ si $j \neq k$ et que $b_{jm_j0} = 1$ pour tout j.

Il résulte de Grisvard [8] que l'application:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}: u \to \{u(x, 0), B_j u(x', 0, t), \ j = 0, \ldots, p\} ,$$

est linéaire continue de $L^2(0, \infty; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^n_+))$ dans le sous-espace $F_{\mathcal{B}}$ du produit:

$$[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+), L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}} \times \prod_{j=0}^{p} H^{\mu_j, \nu_j}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)) ,$$

des $\{u_0, g_j\}$ qui vérifient les relations de compatibilité:

$$\mathcal{RC}_{\mathcal{B}} \begin{cases} B_j u_0(x', 0) = g_j(x', 0), & \text{si } m_j < -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |B_j u_0(x', \tau) - g_j(x', \tau^{-\sigma})|^2 \, dx' \frac{d\tau}{\tau} < +\infty & \\ \qquad \text{si } -\sigma \text{ est impair et } m_j = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}. & \end{cases}$$

On a encore:

PROPOSITION 4.3. *L'application*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}: L^2(0, \infty; W^{m2}_{\sigma,\delta}(\mathbf{R}^n_+)) \cap H^1(0, \infty; L^2(\mathbf{R}^n_+)) \to F_{\mathcal{B}},$$

est surjective.

DÉMONSTRATION. *a*) On traite d'abord le cas $m_j \neq (-\sigma)/2 - \frac{1}{2}$ pour tout j. On complète le système $\mathcal{B}$ à l'aide de $D^k_{x_n}$ en un système $\mathcal{B}' = \{B'_j\}_{j=0}^{-\sigma-1}$ d'opérateurs de la forme:

$$B'_j(x', D_x) = \sum_{\delta|\beta|+\alpha \leqslant j} b'_{j\alpha\beta}(x') D^\beta_{x'} D^\alpha_{x_n}, \qquad \text{avec } b'_{jj0} = 1,$$

pour lesquels on a les formules:

$$\begin{cases} D^j_{x_n} = B'_j + \sum_{s=0}^{j-1} \Lambda'_{js} B'_s, & 0 \leqslant j \leqslant -\sigma - 1, \\ B'_j = D^j_{x_n} + \sum_{s=0}^{j-1} \Lambda'_{js} D^s_{x_n} \end{cases}$$

où $\Lambda_{js}, \Lambda'_{js}$ sont des opérateurs différentiels en x' d'ordre inférieur ou égal à $(j-s)/\delta$.

On convient que $\Lambda_{jj} = \Lambda'_{jj} = 1$.

Soit alors $\{u_0, g_j\} \in F_{\mathcal{B}}$ et $\varphi \in L^2(0, \infty; H^{-\sigma/\delta, -\sigma}(\mathbf{R}^{n-1} \times (0, \infty))) \cap H^1(0, \infty; L^2(\mathbf{R}^n_+))$ vérifiant $\varphi(x, 0) = u_0(x)$. Pour $j \leqslant -\sigma - 1$ on note $h_j = \sum_{s=0}^{j} \Lambda_{js} g'_s$, avec:

$$\begin{cases} g'_s(x', t) = g_j(x', t) & \text{si } s = m^j, \\ g'_s(x', t) = D^s_{x_n}(x', 0, t) & \text{si } s \neq m_j, \ s \leqslant -\sigma - 1. \end{cases}$$

Puisque $B_{(-\sigma/2)-\frac{1}{2}} = D_{x_n}^{(-\sigma/2)-\frac{1}{2}}$ si $-\sigma$ est impair, on a $\{u_0, h_j\} \in F_\gamma$, donc d'après la proposition 4.2, il existe $u \in L^2(0,\infty; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n_+))$ vérifiant $\mathcal{C}_\gamma u = \{u_0, h_j\}$. Alors on voit facilement qu'on a aussi $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} u = \{u_0, g_j\}$.

b) On suppose maintenant que $-\sigma$ est impair et qu'il existe j tel que $m_j = (-\sigma)/2 - \frac{1}{2}$. En complètant le système $\mathcal{B}$ comme en *a*) on peut supposer que $p = -\sigma - 1$ et $m_j = j$ pour tout j. Soient $\{u_0, g_j\} \in F_{\mathcal{B}}$ et φ relevant u_0 dans $L^2(0,\infty; H^{(-\sigma)/\delta,-\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty))) \cap H^1(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n_+))$. Si on note:

$$\begin{cases} B_j'' = B_j \quad \text{et} \quad g_j'' = g_j \quad \text{pour } j \neq -\dfrac{\sigma}{2} - \dfrac{1}{2}, \\ B_j'' = D_{x_n}^j \quad \text{et} \quad g_j'' = D_{x_n}^j \varphi(x', 0, t) \quad \text{pour } j = -\dfrac{\sigma}{2} - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On a $\{u_0, g_j''\} \in F_{\mathcal{B}''}$, donc d'après *a*) il existe $u_1 \in L^2(0,\infty; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap \cap H^1(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n_+))$ vérifiant:

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = u_0(x), \\ B_j'' u_1(x', 0, t) = g_j''(x', t), \quad 0 \leqslant j \leqslant -\sigma - 1. \end{cases}$$

En écrivant encore $D_{x_n}^j = \sum_{s=0}^{j} \Lambda_{js} B_s$, $B_j = \sum_{s=0}^{j} \Lambda'_{js} D_{x_n}^s$, on voit que pour $j = (-\sigma)/2 - \frac{1}{2}$ et $s < j$, on a:

$$\Lambda_{js} u_1 \in L^2(0,\infty; H^{(-\sigma/2+s+\frac{1}{2})/\delta,\, -\sigma/2+s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty))) \cap H^{(-\sigma/2+s+\frac{1}{2})/-\sigma}(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n_+))$$

donc, d'après Grisvard [8]:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |B_s \Lambda_{js} u_0(x', \tau) - \Lambda_{js} g_s(x', \tau^{-\sigma})|^2 \, dx' \frac{d\tau}{\tau} < +\infty.$$

Une sommation sur $s \leqslant j$, en utilisant aussi la relation intégrale de $\mathcal{RC}_{\mathcal{B}}$ vérifiée par u_0 et g_j, donne:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| D_{x_n}^j u_0(x', \tau) - \left(\sum_{s=0}^{j} \Lambda_{js} g_s \right)(x', \tau^{-\sigma}) \right|^2 dx' \frac{d\tau}{\tau} < +\infty, \qquad \text{pour } j = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}.$$

Ce qui montre que $\left\{u_0, \sum_{s=0}^{j} A_{js} g_s\right\}$ appartient à F_γ. Un relèvement u donné par la proposition 4.2 vérifie alors $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} u = \{u_0, g_j\}$.

PROPOSITION 4.4. *On a l'égalité* $[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+), L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}} = W^m_{\sigma/2,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$.

DÉMONSTRATION: D'après Bolley-Camus ([4] dans le cas $\delta = 1$), il existe un opérateur A non borné dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, auto-adjoint positif, de domaine $D(A)$ défini par:

$$\begin{cases} D(A) = W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{si } 0 < -\sigma \leqslant m \\ D(A) = \{u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+),\ B_j u = 0,\ j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1\} \\ \qquad\qquad \text{si } m + 1 \leqslant -\sigma \leqslant 2m\,, \end{cases}$$

où $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=0}^{-\sigma-m-1}$ est du type étudié ci-dessus, avec $m \leqslant m_j \leqslant -\sigma - 1$ pour tout j, et associé à une forme sesquilinéaire coercitive sur l'espace $W^{2m}_{\sigma/2,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$. La proposition 4.4 est donc immédiate dans le cas $-\sigma \leqslant m$. Si $-\sigma \geqslant m + 1$ on a toujours:

$$W^m_{\sigma/2,\delta}(\mathbb{R}^n_+) = [D(A), L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}} \subset [W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+), L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}}\,.$$

Pour démontrer l'inclusion inverse on applique la proposition 4.3: si $f \in [W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+), L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}}$ puisqu'alors $\{f, 0\} \in F_{\mathcal{B}}$, il existe $u \in L^2(0, \infty; D(A)) \cap$ $\cap H^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^n_+))$ vérifiant $u(x, 0) = f(x)$. Cela donne bien $f \in W^m_{\sigma/2,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$.

Des propositions 4.3 et 4.4 on déduit que l'on a:

$$[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = W^m_{\sigma/2,\delta}(\Omega)\,,$$

et que, si le système $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=0}^{-\sigma-m-1}$ décrit en 1) est normal sur Γ, pour tous $\{u_0, g_j\}$ appartenant au sous-espace du produit $W^m_{\sigma/2,\delta}(\Omega) \times$ $\times \prod_{j=0}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j, \nu_j}(\Gamma \times]0, T[)$, $T > 0$, défini par:

$$\mathcal{RC}_{\mathcal{B}} \begin{cases} B_j u_0(x) = g_j(x, 0) \quad \text{pour } x \in \Gamma, \quad m_j < -\dfrac{\sigma}{2} - \dfrac{1}{2} \\ \displaystyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |B_j(\varphi_i u_0)(y', \tau^{-1/\sigma}) - (\varphi_i g_j)(y', \tau)|^2\, dy' \frac{d\tau}{\tau} < +\infty\,, \\ \text{si } -\sigma \text{ est impair et } m_j = -\dfrac{\sigma}{2} - \dfrac{1}{2}, \\ \qquad\qquad \text{en coordonnées locales dans } O_i\,, \end{cases}$$

il existe $u \in L^2(0, T; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ vérifiant:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \mathcal{B}_j u = g_j \text{ sur } \Gamma, \quad j = 0, \ldots, -\sigma - m - 1; \end{cases}$$

Ceci, avec la résolubilité du problème homogène, démontre le théorème 1.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. AGRANOVICH - M. I. VISIK, *Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type*, Russian Math. Surveys, **19** (1964), pp. 53-157.

[2] M. S. BAOUENDI, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Bull. Soc. Math. France, **95** (1967), pp. 45-87.

[3] M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés; Applications*, J. Functional Analysis, **9** (1972), pp. 208-248.

[4] P. BOLLEY - J. CAMUS, *Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels*, Boll. Un. Mat. Ital., (5), **14B** (1977), pp. 77-100.

[5] P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER, *Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques*, J. Math. Pures Appl., **55** (1976), pp. 131-171.

[6] P. BOLLEY - J. CAMUS - PHAM THE LAI, *Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. Proceedings*, Saint-Jean-de-Monts, 1977; *Lecture notes in Mathematics*, Springer-Verlag.

[7] J. CAMUS, *On a class of Sobolev's spaces with weights and application to the spectral theory of a class of degenerated elliptic operators.*

[8] P. GRISVARD, *Caractérisation de quelques espaces d'interpolation*, Arch. Ratio nal Mech. Anal., vol. 25, n. 1 (1967), pp. 40-63.

[9] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, Paris.

[10] N. SHIMAKURA, *Problèmes aux limites généraux de type elliptiques dégénérés*, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 9, no. 2 (1969), pp. 275-335.

[11] H. TRIEBEL, *Erzengung des nuklearen lokalkonvexen raumes $C^\infty(\bar{\Omega})$ durch einen elliptishen differential operatoren zweiter ordnung*, Math. Ann., **177** (1968), pp. 247-264.

[12] M. I. VISIK - V. V. GRUSIN, *On a class of higher order degenerated elliptic equations*, Math. USSR Sb., vol. 8, No. 1 (1969).

UER Mathématiques
Avenue du Général Leclerc
35042 Rennes, France