ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SIGERU MIZOHATA

Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 5, n° 3 (1978), p. 559-566

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_559_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski.

SIGERU MIZOHATA (*)

dédié à Jean Leray

1. – Introduction.

Il s'agit du problème de Cauchy. Etant donnée une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine ($\subset \boldsymbol{C}^{n+1}$):

$$\partial_t^m u + \sum_{j=1}^{m} a_j(x, t; \partial_x)\, \partial_t^{m-j} u = f(x, t)\,, \tag{1.1}$$

le théorème de Cauchy-Kowalewski dit que si

$$\text{ordre } a_j(x, t; \partial_x) \leqslant j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)\,, \tag{1.2}$$

alors pour toutes les données holomorphes $\partial_t^j u(x, 0) = u_j(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ et f au voisinage de l'origine, il existe une solution $u(x, t)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine.

La condition (1.2) serait nécessaire pour garantir l'existence des solutions holomorphes pour toutes les données holomorphes. En effet, l'auteur a montré que la condition

$$\text{ordre } a_j(x, 0; \partial_x) \leqslant j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) \tag{1.3}$$

est nécessaire [2] (1).

Cet article a pour but de montrer que si tous les coefficients ne dépendent que de t, la condition (1.2) est nécessaire. Le problème est tout-à-fait

(*) Department of Mathematics, Kyoto University.

(1) Il y a quelques articles sur ce sujet. Citons parmi eux, [3], [4].

Pervenuto alla Redazione il 27 Giugno 1977.

simple. Mais la méthode est différente de celle de [2] qui ne marche plus dans le cas actuel. Enonçons sous la forme suivante: Soit

$$\partial_t^m u + \sum_{j=1}^{m} a_j(t; \partial_x)\, \partial_t^{m-j} u = f . \tag{1.4}$$

THÉORÈME. *Pour que le théorème de Cauchy-Kowalewski pour* (1.4) *avec les données de Cauchy à* $t = 0$ *soit valable, il faut et suffit qu'on ait*

$$\text{ordre } a_j(t; \partial_x) \leqslant j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) . \tag{1.5}$$

Esquissons la démonstration. On cherche une famille de solutions $u_\zeta(x, t)$ de (1.4), supposée $f = 0$, sous la forme $e^{\zeta x} u(t; \zeta)$ avec des données de Cauchy $e^{\zeta x}$ multipliées par des vecteurs convenables $c(\zeta)$ *bornés* en ζ. Supposé que la condition (1.5) est violée, on montre qu'on peut trouver $u_\zeta(x, t)$ qui se comporte de façon qu'on ait

$$\sum_{j=0}^{m-1} |\partial_t^j u_\zeta(0, t_0)| \geqslant C \exp(\delta |\zeta|^p) \qquad (C, \delta: \text{constantes positives}) \tag{1.6}$$

où $p > 1$ et t_0 est une valeur fixée de t, quand ζ ($\in \boldsymbol{C}^n$) tend vers à l'infini convenablement. Cette inégalité montre que l'application de l'espace des données de Cauchy $\in \prod H(\boldsymbol{C}^n)$ dans l'espace des solutions $\in H(V)$ n'est pas continue, où V est un voisinage (complexe) de l'origine, ce qui implique la non-existence de solutions (voir [1]). Or, si l'on pose

$$u_\zeta(x, t) = e^{\zeta x} u(t; \zeta) ,$$

l'équation (1.4) avec $f = 0$ se réduit à l'équation différentielle ordinaire contenant le paramètre ζ:

$$L[u] = u^{(m)}(t; \zeta) + \sum_{j \geqslant 1} a_j(t; \zeta) u^{(m-j)}(t; \zeta) = 0 . \tag{1.7}$$

2. – Evaluations des solutions.

Soit

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \operatorname*{ordre}_{\zeta} a_j(t; \zeta)/j = p . \tag{2.1}$$

On suppose que $p > 1$. Soit $h_j(t; \zeta)$ la partie homogène d'ordre pj de a_j. Ensuite, soit q_j l'ordre de zéro en t à $t = 0$ de $h_j(t; \zeta)$ (si $h_j \equiv 0$, on con-

vient de considérer $q_j = \infty$), et posons

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant m} q_j/j = q \,. \tag{2.2}$$

Soit $h_j(t; \zeta) = t^{qj} \mathring{h}_j(t; \zeta)$. Rappelons que $\mathring{h}_j(t; \zeta)$ est homogène d'ordre pj en ζ, alors vu que pour au moins un des j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $\mathring{h}_j(0; \zeta) \not\equiv 0$, l'équation caractéristique

$$\lambda^m + \sum_j \mathring{h}_j(0; \zeta) \lambda^{m-j} = 0 \tag{2.3}$$

a au moins une racine $\lambda(\zeta)$ qui pour une valeur complexe convenable ζ_0 $(|\zeta_0| = 1)$ satisfait à

$$\operatorname{Re} \lambda(\zeta_0) > 0 \,.$$

Posons

$$\zeta = \xi \zeta_0 \,,$$

ξ étant réel positif à faire tendre vers à l'infini. La partie principale de (1.7) devient

$$L_P = \partial_t^m + \sum_j \mathring{h}_j(t; \zeta_0)(\xi^p t^q)^j \partial_t^{m-j} \,.$$

On pose ensuite, en désignant $u(t; \xi\zeta_0)$ par $u(t; \xi)$,

$$u_j = (\xi^p t^q)^{m-j-1} \partial_t^j u(t; \xi) \qquad (0 \leqslant j \leqslant m-1) \,. \tag{2.4}$$

On a alors

$$\begin{cases} \partial_t u_j = \xi^p t^q u_{j+1} + q(m-1-j) u_j/t & (0 \leqslant j \leqslant m-2) \,, \\ L_P[u] = \partial_t u_{m-1} + \xi^p t^q \sum_j h_j(t) u_{m-j} \,, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $h_j(t) = \mathring{h}_j(t; \zeta_0)$.

Quant à $L - L_P$, posons

$$a_j(t; \xi\zeta_0) - h_j(t; \xi\zeta_0) = b_j(t; \xi\zeta_0) \,.$$

Vu que ordre $b_j(t; \zeta) < pj$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, et que

$$b_j(t; \xi\zeta_0) \partial_t^{m-j} u(t; \xi) = b_j(t; \xi\zeta_0)(\xi^p t^q)^{-(j-1)} u_{m-j} \,,$$

posons

$$c_j(t;\xi) = b_j(t;\xi\zeta_0)(\xi^p t^q)^{-(j-1)}\,.$$

On voit que, quand $\xi \to +\infty$,

$$|c_j(t;\xi)| \leqslant c\xi^{\text{ordre}\,(b_j)-p(j-1)}t^{-q(j-1)} = c\xi^{p-(pj-\text{ordre}(b_j))}t^{-q(j-1)}\,,$$

où c est une constante ne dépend ni de t et ni de ξ.

Soit

$$r = \min_{1\leqslant j\leqslant m}\left(pj - \text{ordre}\,(b_j)\right) \qquad (>0)\,,$$

alors,

$$|c_j(t;\xi)| \leqslant c\xi^{p-r}t^{-q(j-1)}\,, \qquad (1\leqslant j\leqslant m)\,. \tag{2.6}$$

Compte tenu de (2.6) et de

$$L[u] = \partial_t u_{m-1} + \xi^p t^q \sum_{j=1}^{m} h_j(t)u_{m-j} + \sum c_j(t;\xi)u_{m-j}\,,$$

en posant

$$\mathfrak{U}(t;\xi) = {}^t(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})\,,$$

$L[u]=0$ s'écrit de la forme matricielle:

$$\partial_t\mathfrak{U} = A(t)\xi^p t^q\mathfrak{U} + \frac{1}{t}B\mathfrak{U} - C(t;\xi)\mathfrak{U}\,, \tag{2.7}$$

où

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & 0 & \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} e_0 & & & \\ & e_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e_{m-2} \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ -h_m & -h_{m-1} & \cdots & -h_1 \end{bmatrix},$$

$$C(t,\xi) = \begin{bmatrix} & 0 & & \\ c_m & c_{m-1} & \cdots & c_1 \end{bmatrix},$$

où $e_j = q(m-1-j)$ $(0\leqslant j\leqslant m-2)$.

Les valeurs propres de $A(0)$ sont des racines de (2.3) avec $\zeta = \zeta_0$. Soient donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \geqslant 1)$ celles dont la partie réelle sont positives, et soit $\min_{1 \leqslant j \leqslant k} \operatorname{Re} \lambda_j = 4\delta$ (> 0), on peut trouver une matrice régulière N telle que

$$NA(0)N^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & & \ddots \\ & a_{ij} & \lambda_m \end{bmatrix}$$

et $|a_{ij}| \leqslant \delta/4m$. D'après la continuité de $A(t)$, si l'on prend t_0 (> 0) assez petit,

$$NA(t)N^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & & \\ & \ddots & a_{ij}(t) \\ a_{ij}(t) & & \ddots \\ & & \lambda_m(t) \end{bmatrix}$$

satisfait dans $t \in [0, t_0]$ aux conditions suivantes:

$$\text{(2.8)} \qquad \begin{cases} \text{i)} & \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} \operatorname{Re} \lambda_j(t) \geqslant 3\delta \,, \\ \text{ii)} & \max\limits_{k+1 \leqslant j \leqslant m} \operatorname{Re} \lambda_j(t) \leqslant \delta \,, \\ \text{iii)} & |a_{ij}(t)| \leqslant \delta/2m \qquad (i \neq j) \,. \end{cases}$$

Appliquons N à (2.7) à gauche,

$$\text{(2.9)} \qquad \partial_t N\mathfrak{U} = NA(t)N^{-1}\xi^p t^q (N\mathfrak{U}) + NBN^{-1}\frac{1}{t}(N\mathfrak{U}) - NC(t;\xi)N^{-1}(N\mathfrak{U}) \,.$$

Posons

$$\text{(2.10)} \qquad N\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = {}^t(v_1, v_2, \ldots, v_m) \,,$$

et considérons

$$\text{(2.11)} \qquad S(t;\xi) = \exp\left(-4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right)\left\{\sum_{i=1}^{k} |v_i(t;\xi)|^2 - \sum_{i=k+1}^{m} |v_i(t;\xi)|^2\right\} \,.$$

Compte tenu de (2.6) et (2.8), par un calcul habituel, on a

$$\text{(2.12)} \qquad \exp\left(4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right) S'(t;\xi) \geqslant \left(\delta\xi^p t^q - \frac{\text{const}}{t} - \text{const}\,\xi^{p-r} t^{-q(m-1)}\right) \cdot \sum_{i=1}^{m} |v_i|^2 \,,$$

où dans le second membre const/t provient du second terme de (2.9) et le terme const $\xi^{p-r}t^{-q(m-1)}$ provient du troisième terme de (2.9).

Rappelons que ξ est un paramètre positif qu'on fait tendre vers ∞. On choisit t_ξ (>0) tendant vers 0 lorsque $\xi\to\infty$ de telle manière que

$$\text{(2.13)}\qquad \begin{cases} \text{i)} & \xi^p t_\xi^q \gg \dfrac{1}{t_\xi}, \\ \text{ii)} & \xi^p t_\xi^q \gg \xi^{p-r} t_\xi^{-q(m-1)}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, $t_\xi^{q+1}\gg\xi^{-p}$, $t_\xi^{qm}\gg\xi^{-r}$. Si l'on veut choisir t_ξ sous la forme $t_\xi=\xi^{-\sigma}$ ($\sigma>0$), ces conditions signifient:

$$\text{(2.14)}\qquad \sigma<\min\left(\frac{p}{q+1},\frac{r}{qm}\right).$$

On considère (2.11) et (2.12) pour $t\in[t_\xi,t_0]$. En choisissant δ' positif $<\delta$, (2.12) devient, pour ξ assez grand,

$$S'(t;\xi)\geqslant\exp\left(-4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right)\delta'\xi^p t^q\sum_{i=1}^m|v_i|^2\geqslant\delta'\xi^p t^q S(t;\xi)\,,\qquad t\geqslant t_\xi\,.$$

D'où,

$$\text{(2.15)}\qquad S(t;\xi)\geqslant\exp\left(\delta'\xi^p\int_{t_\xi}^t s^q\,ds\right)S(t_\xi;\xi)\,,\qquad t\geqslant t_\xi\,.$$

3. – Démonstration du Théorème.

D'abord (2.15) donne

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{aligned}\sum_{i=1}^m|v_i(t;\xi)|^2&\geqslant\exp\left(4\delta\xi^p t^{q+1}/q+1\right)S(t;\xi)\geqslant\\ &\geqslant\exp\left[(\delta'+4\delta)\xi^p\int_{t_\xi}^t s^q\,ds\right]\left(\sum_{i=1}^k|v_i(t_\xi;\xi)|^2-\sum_{i=k+1}^m|v_i(t_\xi;\xi)|^2\right).\end{aligned}$$

Notons que $\mathfrak{V}=N\mathfrak{U}$ et comme N est une matrice régulière constante,

$$\sum_{j=0}^{m-1}|u_j(t;\xi)|^2\geqslant\text{const}\sum_{i=1}^m|v_i(t;\xi)|^2\,,$$

et rappelons que le premier membre n'est autre que

$$\sum_{j=0}^{m-1}(\xi^p t^q)^{2(m-1-j)}|\partial_t^j u(t;\xi)|^2\,.$$

On considère l'évaluation des $\partial_t^j u(t;\xi)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ pour $t \in [0, t_\xi]$ de la manière habituelle: posons

$$\tilde{u}_j(t;\xi) = \xi^{p(m-1-j)} \partial_t^j u(t;\xi)\,, \qquad (0 \leqslant j \leqslant m-1)\,.$$

Alors, $\partial_t \tilde{u}_j = \xi^p \tilde{u}_{j+1}$, $(0 \leqslant j \leqslant m-2)$, et

$$\partial_t \tilde{u}_{m-1} = \partial_t^m u(t;\xi) = -\sum_{j=1}^{m} a_j(t;\xi\zeta_0)\partial_t^{m-j} u = \\ = -\xi^p \sum_j a_j(t;\xi\zeta_0)/\xi^{pj}\xi^{p(j-1)}\partial_t^{m-j} u = -\xi^p \sum_j \tilde{a}_j(t;\xi)\tilde{u}_{m-j}\,,$$

où les $\tilde{a}_j(t;\xi)$ sont bornés par rapport à ξ et t.

D'où, en posant $S_0(t;\xi) = \sum_{j=0}^{m-1} |\tilde{u}_j(t;\xi)|^2$, on a

$$S_0(0;\xi) \leqslant \exp(c'\xi^p t_\xi) S_0(t_\xi;\xi)\,,$$

où c' est une constante positive convenable. Cette inégalité montre que, si

$$S_0(t_\xi;\xi) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{2p(m-1-j)} |\partial_t^j u(t_\xi;\xi)|^2 \leqslant \exp(-c'\xi^p t_\xi)\,, \tag{3.2}$$

on aura

$$S_0(0;\xi) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{2p(m-1-j)} |\partial_t^j u(0;\xi)|^2 \leqslant 1\,. \tag{3.3}$$

Notons que, d'après (2.10), en désignant $(m_{ij}) = N^{-1}$, on a

$$u_i(t_\xi;\xi) = \sum_j m_{i+1,j} v_j(t_\xi;\xi)\,. \tag{3.4}$$

Or, si l'on définit la famille de solutions $u_\xi(t;\xi)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ de (1.7) par les données de Cauchy à $t = t_\xi$:

$$v_i(t_\xi;\xi) = \begin{cases} \exp(-c'\xi^p t_\xi)\,, & i = 1\,, \\ 0\,, & i \neq 1\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

la condition (3.2) est bien remplie. En effet, compte tenu de (3.4) et (3.5),

on a $u_j(t_\xi;\xi) = m_{j+1,1}\exp(-c'\xi^p t_\xi)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$, et d'après (2.4), on a

$$\xi^{2p(m-1-j)}|\partial_t^j u(t_\xi;\xi)|^2 = t_\xi^{-2q(m-1-j)}|u_j(t_\xi;\xi)|^2 =$$
$$= t_\xi^{-2q(m-1-j)}|m_{j+1,1}|^2\,|v_1(t_\xi;\xi)|^2 = t_\xi^{-2q(m-1-j)}\exp(-2c'\xi^p t_\xi)|m_{j+1,1}|^2,$$

et compte tenu de $\xi^p t_\xi = \xi^{p-\sigma}$ et $p-\sigma>0$, on a

$$t_\xi^{-2q(m-1-j)}\exp(-c'\xi^{p-\sigma}) \to 0 \qquad (\xi \to \infty).$$

D'autre part, d'après (3.1) et (3.5), $u_\xi(t;\xi)$ a la minoration:

$$\sum_{j=0}^{m-1}(\xi^p t^q)^{2(m-1-j)}|\partial_t^j u_\xi(t;\xi)|^2 \geqslant \text{const}\exp\left[(\delta'+4\delta)\xi^p\int_{t_\xi}^{t} s^q\,ds - 2c'\xi^p t_\xi\right].$$

On a donc montré (1.6), ce qui achève la démonstration du Théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. MIZOHATA, *On kowalewskian systems* (in Russian), Uspehi Mat. Nauk, **29** (1974), pp. 213-227.

[2] S. MIZOHATA, *On Cauchy-Kowalewski's Theorem; A necessary condition*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10** (1975), pp. 509-519.

[3] M. MIYAKE, *A remark on Cauchy-Kowalewski's Theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **10** (1974), pp. 243-255.

[4] K. KITAGAWA - T. SADAMATSU, *A necessary condition of Cauchy-Kowalewski's theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **11** (1976), pp. 523-534.