ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

B. MÜLLER

$\mathfrak{L}_c$ und c-einbettbare Limesräume

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 5, n° 3 (1978), p. 509-526

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_509_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

$\mathfrak{L}_c$ und c-einbettbare Limesräume (*).

B. MÜLLER (**)

Jeder vollständig reguläre Raum X ist durch $\mathfrak{C}_{co}(X)$, die $\mathbf{R}$-Algebra aller stetigen Abbildungen von X in $\mathbf{R}$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von X, bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt. Will man eine größere Klasse von topologischen Räumen oder Limesräumen durch funktionalanalytische Methoden untersuchen, so erweisen sich $\mathfrak{C}_c(X)$, die $\mathbf{R}$-Algebra $\mathfrak{C}(X)$ aller stetigen Abbildungen von einem Limesraum X in $\mathbf{R}$, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz, und $\mathfrak{Hom}_c\mathfrak{C}_c(X)$, die Menge aller stetigen Algebrahomomorphismen von $\mathfrak{C}_c(X)$ auf $\mathbf{R}$, die die von $\mathfrak{C}_c(\mathfrak{C}_c(X))$ induzierte Limitierung trägt, als wichtige Hilfsmittel. Man betrachtet nämlich die Kategorie derjenigen Limesräume X, für die die Abbildung

$$i_X\colon X \to \mathfrak{Hom}_c\mathfrak{C}_c(X)\,,$$

definiert durch $[i_X(p)](f) = f(p)$ für alle $p \in X$ und alle $f \in \mathfrak{C}(X)$, ein Homöomorphismus ist. Die Objekte dieser Kategorie wurden von E. Binz c-einbettbare Limesräume genannt (siehe [1]). Jeder c-einbettbare Limesraum X ist also durch $\mathfrak{C}_c(X)$ bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt. Es ist bekannt, daß jeder vollständig reguläre Raum c-einbettbar ist, und daß es c-einbettbare, topologische Räume gibt, die nicht vollständig regulär sind. Da es c-einbettbare, topologische Räume X und Y gibt, für die $\mathfrak{C}_{co}(X) = \mathfrak{C}_{co}(Y)$ ist, während $\mathfrak{C}_c(X)$ und $\mathfrak{C}_c(Y)$ nicht bistetig isomorph sind, ist zur Untersuchung von topologischen Räumen oder Limesräumen X die Limitierung der stetigen Konvergenz auf $\mathfrak{C}(X)$ geeigneter als die co-Topologie. Für jeden Limesraum X sind $\mathfrak{C}_c(X)$ und $\mathfrak{C}_c(\mathfrak{Hom}_c\mathfrak{C}_c(X))$ bistetig iso-

(*) *Nota della Redazione*: questo lavoro, già accettato per la pubblicazione nella Serie III di questa rivista, viene pubblicato solo ora a causa di una serie di disguidi.

(**) Universität Mannheim, Fakultät für Mathematik und Informatik.

Pervenuto alla Redazione il 24 Aprile 1973.

morph, deshalb genügt es, die Limitierung der stetigen Konvergenz auf $\mathfrak{C}(X)$ nur für c-einbettbare Limesräume zu betrachten (siehe [2]). Dies ist der Anlaß, c-einbettbare Limesräume näher zu untersuchen und insbesondere eine interne Charakterisierung anzugeben. Dabei wird sich herausstellen, daß ein topologischer Raum X genau dann c-einbettbar ist, wenn $\mathfrak{C}(X)$ die Punkte von X trennt, und wenn für jeden Punkt $x \in X$ der Umgebungfilter $\mathfrak{U}(x)$ eine Basis aus Mengen besitzt, die in dem zu X assoziierten vollständig regulären Raum X_S abgeschlossen sind. Ein Beispiel wird jedoch zeigen, daß ein Limesraum X i.a. nicht c-einbettbar ist, wenn es zu jedem konvergenten Filter einen gröberen konvergenten Filter gibt, der eine Basis aus in X_S abgeschlossenen Mengen besitzt.

Die Beweise beruhen auf Eigenschaften von $\mathfrak{L}_c E$, der Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\mathfrak{L}E$ von einem R-Limesvektorraum E in R, versehen mit der von $\mathfrak{C}_c(E)$ induzierten Limitierung. Diese Eigenschaften werden in den ersten Abschnitten zusammengestellt. Dabei wird sich eine interne Charakterisierung derjenigen Limesvektorräume E ergeben, für die die Abbildung

$$j_E: E \to \mathfrak{L}_c \mathfrak{L}_c E ,$$

definiert durch $[j_E(x)](\xi) = \xi(x)$ für alle $x \in E$ und alle $\xi \in \mathfrak{L}E$, ein Homöomorphismus von E in $\mathfrak{L}_c \mathfrak{L}_c E$ ist. Ferner wird durch ein Beispiel gezeigt, daß für lokalkonvexe Limesvektorräume der Satz von Hahn-Banach i.a. nicht gültig ist.

Viele Ergebnisse dieser Arbeit stammen aus der Dissertation des Autors

1. – Die assoziierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird eine Charakterisierung c-reflexiver Limesvektorräume E bewiesen, die im wesentlichen auf einer topologischen Eigenschaft der zu $\mathfrak{L}_c E$ assoziierten lokalkonvexen Vektorraumtopologie beruht. Deshalb wird zunächst die assoziierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie eines Limesvektorraumes E beschrieben, die unter allen lokalkonvexen Vektorraumtopologien auf E, die gröber als die Limitierung von E sind, die feinste ist. Der Limesvektorraum E, versehen mit dieser Topologie, werde mit E_τ bezeichnet. Ferner bezeichne $\mathfrak{L}_{c0}(E)$ den Vektorraum $\mathfrak{L}E$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von E, und entsprechend $\mathfrak{C}_{c0}(X)$ die Algebra $\mathfrak{C}(X)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen des Limesraumes X. Ist A eine Teilmenge eines Limesvektorraumes E

und B eine Teilmenge von $\mathfrak{L}E$, so setze

$$A^0 := \{\zeta\colon \zeta \in \mathfrak{L}E, |\zeta(a)| \leqslant 1 \text{ für alle } a \in A\},$$

$$^0B := \{x\colon x \in E, \quad |\zeta(x)| \leqslant 1 \text{ für alle } \zeta \in B\}.$$

Mit $\overline{A}^\sigma$ werde der Abschluß von A bezüglich der gröbsten Topologie σ auf E, für die alle $\zeta \in \mathfrak{L}E$ stetig sind, und mit $\overline{B}^s$ der Abschluß von B bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathfrak{L}E$ bezeichnet.

DEFINITION. *Ein Limesvektorraum E heiße* c-reflexiv, *wenn die Abbildung*

$$j_E\colon E \to \mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E,$$

die definiert ist durch $[j_E(x)](\zeta) = \zeta(x)$ *für alle* $x \in E$ *und alle* $\zeta \in \mathfrak{L}E$, *ein Homöomorphismus von E auf* $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ *ist.*

Bekanntlich ist jede lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf einem Vektorraum E die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichstetigen Teilmengen von $\mathfrak{L}E$. Nach einem Ergebnis von C. H. Cook und H. R. Fischer (s. [6]) sind die gleichstetigen Teilmengen von $\mathfrak{L}(E_\tau)$ gerade die relativ-kompakten Teilmengen von $\mathfrak{L}_c E$. Daraus folgt nun:

LEMMA 1. *Für jeden Limesvektorraum E ist die assoziierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von* $\mathfrak{L}_c E$.

KOROLLAR. *Für jeden* c-*reflexiven Limesvektorraum E ist* $(\mathfrak{L}_c E)_\tau = \mathfrak{L}_{co}(E)$. *Ist E ein separierter lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $\tilde{E}$ die vollständige Hülle von E, so ist* $(\mathfrak{L}_c E)_\tau = \mathfrak{L}_{co}(\tilde{E})$.

BEWEIS. Nach [4] ist $\tilde{E} = \mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$. (Zu $(\mathfrak{L}_c E)_\tau = \mathfrak{L}_{co}(\tilde{E})$ siehe auch [7]).

LEMMA 2. *Ist für einen Limesvektorraum E die Topologie von E_τ separiert, und besitzt der 0-Umgebungsfilter von $(\mathfrak{L}_c E)_\tau$ eine Basis aus $\sigma(\mathfrak{L}E, E)$-abgeschlossenen Mengen, so ist $j_E(E)$ dicht in* $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$.

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{U}$ eine 0-Umgebungsbasis in $(\mathfrak{L}_c E)_\tau$, die aus absolutkonvexen und $\sigma(\mathfrak{L}E, E)$-abgeschlossenen Mengen besteht. Für alle $U \in \mathfrak{U}$ ist $\overline{j_E(^0U)}^s$ eine Teilmenge von U^0. Zu $y \in U^0 \setminus \overline{j_E(^0U)}^s$ gibt es nach den Trennungssätzen ein $\zeta \in \mathfrak{L}E$ mit $y(\zeta) > 1$ und $(\overline{j_E(^0U)}^s)(\zeta) \subseteq [-1, 1]$. Aus $\zeta(^0U) \subseteq [-1, 1]$ folgt nach dem Bipolarensatz, daß ζ in U liegt. Also ist $[y(\zeta)] \leqslant 1$, und deshalb muß $U^0 = \overline{j_E(^0U)}^s$ sein. Da die Familie $\{U^0\colon U \in \mathfrak{U}\}$ ganz $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E$ überdeckt, gibt es zu jedem $k \in \mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E$ ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $k \in U^0$. Auf $\overline{j_E(^0U)}^s = U^0$

stimmen die Limitierung der stetigen Konvergenz und die Topologie $\sigma(\mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E, \mathfrak{L}E)$ nach [6] überein. Also gibt es einen Filter, der in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ gegen k konvergiert und der eine Spur auf $j_E(E)$ hat.

Aus dem Korollar zu Lemma 1 und aus Lemma 2 ergibt sich nun:

SATZ 1. *Ein Limesvektorraum E ist genau dann* c*-reflexiv, wenn gilt:*

(i) *Die Abbildung j_E ist eine Einbettung.*

(ii) *E ist vollständig.*

(iii) *Der 0-Umgebungsfilter von $(\mathfrak{L}_c E)_\tau$ hat eine Basis aus $\sigma(\mathfrak{L}E, E)$-abgeschlossenen Mengen.*

KOROLLAR. *Für einen Limesvektorraum E ist $\mathfrak{L}_c E$ genau dann* c*-reflexiv, wenn $(\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E)_\tau = \mathfrak{L}_{co}(\mathfrak{L}_c E)$ ist.*

Später wird noch das folgende Lemma benötigt.

LEMMA 3. *Es sei E ein Limesvektorraum. Versieht man $j_E(E)$ mit der von $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ induzierten Limitierung, so trägt $(j_E(E))_\tau$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von $\mathfrak{L}_c E$. Ferner ist $(j_E(E))_\tau$ ein topologischer Unterraum von $(\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E)_\tau$.*

BEWEIS. Es sei V eine 0-Umgebung in $(j_E(E))_\tau$. Da j_E eine stetige Abbildung von E_τ auf $(j_E(E))_\tau$ ist, gibt es nach Lemma 1 eine kompakte Teilmenge K von $\mathfrak{L}_c E$ mit $j_E({}^0K) \subseteq V$. Aus $j_E({}^0K) = K^0 \cap j_E(E)$ folgt, daß auf $j_E(E)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von $\mathfrak{L}_c E$ feiner ist als die Topologie von $(j_E(E))_\tau$. Die Topologie von $(\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E)_\tau$ ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$, also ist sie feiner als die Topologie von $\mathfrak{L}_{co}(\mathfrak{L}_c E)$. Da die Inklusionsabbildung von $(j_E(E))_\tau$ in $(\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E)_\tau$ stetig ist, stimmen auf $j_E(E)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von $\mathfrak{L}_c E$, die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ und die Topologie von $(j_E(E))_\tau$ überein.

2. – c-Reflexivität und Hahn-Banach Eigenschaft.

Für einen Limesvektorraum E ist $\mathfrak{L}_c E$ genau dann c-reflexiv, wenn $(\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E)_\tau = \mathfrak{L}_{co}(\mathfrak{L}_c E)$ ist. Dies ist gleichwertig damit, daß sich jedes $\zeta \in \in \mathfrak{L}\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ stetig und linear auf $\mathfrak{C}_c(\mathfrak{L}_c E)$ fortsetzen läßt, da nach einem Ergebnis von H. P. Butzmann $(\mathfrak{C}_c(\mathfrak{L}_c E))_\tau = \mathfrak{C}_{co}(\mathfrak{L}_c E)$ ist (s. [4]). Wie folgendes Beispiel zeigt, besitzen jedoch i.a. lokalkonvexe Limesvektorräume

nicht die Hahn-Banach Eigenschaft, d.h. daß für alle Unterräume U eines lokalkonvexen Limesvektorraumes F gilt: Jedes $\zeta \in \mathfrak{L}U$ läßt sich stetig und linear auf F fortsetzen. Dabei heißt ein Limesvektorraum E lokalkonvex, wenn mit jedem Filter φ auch der von $\{\Gamma V\colon V \in \varphi\}$ erzeugte Filter in E gegen 0 konvergiert, wobei mit ΓV die absolutkonvexe Hülle von V bezeichnet wird.

LEMMA 4. *Ist $\mathfrak{K}$ die Familie der kompakten Teilmengen eines Limesvektorraumes E, so ist*

$$\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{c0}(E) = \bigcup_{K\in\mathfrak{K}} \overline{\Gamma j_E(K)}^s .$$

Falls $(\mathfrak{C}_c(E))_\tau = \mathfrak{C}_{c0}(E)$ ist, so besteht $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{c0}(E)$ gerade aus den Elementen ζ von $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E$, die sich stetig und linear auf $\mathfrak{C}_c(E)$ fortsetzen lassen.

BEWEIS. Die Topologie von $(\mathfrak{L}_c E)_\tau$ ist feiner als die von $\mathfrak{L}_{c0}(E)$, deshalb ist $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{c0}(E)$ eine Teilmenge von $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E$. Da $\{^0(j_E(K))\colon K \in \mathfrak{K}\}$ eine 0-Umgebungsbasis für die Topologie von $\mathfrak{L}_{c0}(E)$ ist, und da nach dem Bipolarensatz

$$[^0(j_E(K))]^0 = \overline{\Gamma j_E(K)}^s \text{ ist, gilt } \mathfrak{L}\mathfrak{L}_{c0}(E) = \bigcup_{K\in\mathfrak{K}} \overline{\Gamma j_E(K)}^s .$$

Es sei nun E ein Vektorraum, dessen Dimension nicht endlich ist. Mit E_σ werde der Vektorraum E, versehen mit der Topologie $\sigma(E, LE)$, bezeichnet. Dabei ist LE die Menge aller linearen Abbildungen von E in $\mathbb{R}$. Bekanntlich ist jede kompakte Teilmenge von E_σ in einem endlichdimensionalen Unterraum von E enthalten, also ist $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{c0}(E_\sigma) = j_E(E)$. Die vollständige Hülle von E_σ ist $LLE = \mathfrak{L}\mathfrak{L}_c(E_\sigma)$. Da $LLE \setminus j_E(E) \neq \emptyset$ ist, gibt es in diesem Fall stetige, lineare Funktionale auf $\mathfrak{L}_c(E_\sigma)$, die sich nicht stetig und linear auf $\mathfrak{C}_c(E_\sigma)$ fortsetzen lassen.

3. – $\mathfrak{L}_c$-einbettbare Limesvektorräume.

Wie man leicht sieht, ist für jeden Limesvektorraum E die Abbildung j_E immer stetig und genau dann injektiv, wenn E_τ separiert ist. Deshalb werde im folgenden stets vorausgesetzt, daß $\mathfrak{L}E$ die Punkte von E trennt. Will man die Limesvektorräume E intern charkterisieren, für die j_E eine Einbettung ist, so muß man die in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ konvergenten Filter kennen. Aus diesen Grund wird zuerst ein Überblick über alle in $\mathfrak{L}_c E$ konvergenten Filter gegeben. Dazu sei im folgenden stets $\lambda(0)$ eine Familie von in E gegen 0 konvergenten Filtern, so daß es zu jedem gegen 0 konvergenten Filter einen gröberen Filter aus $\lambda(0)$ gibt.

Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen.

LEMMA 5. *Ein Filter φ konvergiert in $\mathfrak{Q}_c E$ genau dann gegen 0, wenn gilt:*

(i) *φ konvergiert gegen 0 bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(\mathfrak{Q}E, E)$.*

(ii) *Zu jedem $\mathfrak{U} \in \lambda(0)$ gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$, so daß U^0 zu φ gehört.*

Mit Hilfe von Lemma 5 soll nun $\mathfrak{Q}_c \mathfrak{C}_u(X)$ bestimmt werden. Dazu sei X ein Limesraum. Es bezeichne X_S die Menge X, versehen mit der von $\mathfrak{C}(X)$ induzierten Topologie. Für eine Teilmenge A von X sei $\overline{A}^s$ der Abschluß von A in X_S. Auf $\mathfrak{C}(X)$ wird die Limitierung der *lokal-uniformen Konvergenz* folgendermaßen definiert: Ein Filter φ konvergiert gegen f, wenn es für alle $x \in X$ und alle gegen x konvergenten Filter $\mathfrak{U}$ ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt, so daß gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $F \in \varphi$ mit $F(U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Durch diese Limitierung wird $\mathfrak{C}(X)$ eine $\mathbb{R}$-Limesalgebra, die mit $\mathfrak{C}_u(X)$ bezeichnet werde.

Zu $\zeta \in \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_c(X)$ kann man in der üblichen Weise den Träger T_ζ von ζ als das Komplement der größten offenen Teilmenge U von X_S mit folgender Eigenschaft definieren:

$$\text{Ist } 0 \leqslant f \in \mathfrak{C}(X) \text{ und } T_f := \overline{\{x : x \in X, f(x) \neq 0\}}^s \subseteq U, \text{ so ist } \zeta(f) = 0.$$

Aus Ergebnissen von H. P. Butzmann (s. [5]) folgt dann:

$$\text{Für alle } f \in \mathfrak{C}(X) \text{ mit } f(T_\zeta) = \{0\} \text{ ist } \zeta(f) = 0.$$

Im folgenden werde für alle Teilmengen U von X und alle $\varepsilon > 0$ mit $F_{U,\varepsilon}$ die Menge $\{f : f \in \mathfrak{C}(X), f(U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ bezeichnet.

LEMMA 6. *Für alle Teilmengen U von X ist*

$$(F_{U,1})^0 = \overline{\Gamma i_X(U)}^s = \{\zeta : \zeta \in \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_c(X), T_\zeta \subseteq \overline{U}^s, |\zeta(f)| \leqslant 1, \forall f \in \mathfrak{C}(X) \text{ mit } f(T_\zeta) \subseteq [-1, 1]\},$$

wobei die Polare bezüglich der Dualität $\langle \mathfrak{C}(X), \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_c(X) \rangle$ gebildet wird.

BEWEIS. Aus $F_{U,1} = {}^0(\Gamma i_X(U))$ und dem Bipolarensatz folgt $(F_{U,1})^0 = \overline{\Gamma i_X(U)}^s$. Es sei $\zeta \in (F_{U,1})^0$, es sei $f \in \mathfrak{C}(X)$ und es gelte $f(U) = \{0\}$. Dann liegt nf in $F_{U,1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $|\zeta(nf)| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\zeta(f) = 0$. Also gilt $T_\zeta \subseteq \overline{U}^s$. Ist $h(T_\zeta) \subseteq [-1, 1]$ für ein $h \in \mathfrak{C}(X)$, so setze $g := (h \wedge e) \vee \vee(-e)$, wobei $e(x) = 1$ für alle $x \in X$ ist. Aus $g \in F_{U,1}$ folgt dann $|\zeta(h)| = |\zeta(g)| \leqslant 1$. Also ist

$$(F_{U,1})^0 \subseteq \{\zeta : \zeta \in \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_c(X), T_\zeta \subseteq \overline{U}^s, |\zeta(f)| \leqslant 1 \text{ für } f \in \mathfrak{C}(X) \text{ mit } f(T_\zeta) \subseteq [-1, 1]\}.$$

Daß auch die umgekehrte Inklusion gilt, ist klar.

LEMMA 7. *Für alle Teilmengen U und V von X und für alle positiven reellen Zahlen λ und μ gilt:*

$$\lambda(F_{U,1})^0 \cap \mu(F_{V,1})^0 = \min(\lambda, \mu)(F_{\overline{U}^s \cap \overline{V}^s,1})^0 .$$

BEWEIS. Aus $\zeta \in \lambda(F_{U,1})^0 \cap \mu(F_{V,1})^0$ folgt $T_\zeta \subseteq \overline{U}^s \cap \overline{V}^s$. Es sei $f \in \mathfrak{C}(X)$ mit $f(\overline{U}^s \cap \overline{V}^s) \subseteq [-1, 1]$. Setzt man $g := (f \wedge e) \vee (-e)$, so gilt $g(U \cup V) \subseteq \subseteq [-1, 1]$. Also ist $|\zeta(f)| = |\zeta(g)| \leqslant \min(\lambda, \mu)$. Daraus folgt

$$\lambda(F_{U,1})^0 \cap \mu(F_{V,1})^0 \subseteq \min(\lambda, \mu)(F_{\overline{U}^s \cap \overline{V}^s,1})^0 .$$

Die Umkehrung dieser Inklusion folgt aus

$$\lambda^{-1} F_{U,1} \cup \mu^{-1} F_{V,1} \subseteq \min(\lambda, \mu)^{-1} F_{\overline{U}^s \cap \overline{V}^s,1} .$$

SATZ 2. *Für alle Limesräume X ist $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X) = \mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_u(X)$.*

BEWEIS. In [5] zeigte H. P. Butzmann, daß die zu $\mathfrak{C}_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von $\mathfrak{Hom}_c\mathfrak{C}_c(X)$ ist. Mit denselben Schlüssen kann man zeigen, daß $(\mathfrak{C}_c(X))_\tau$ und $(\mathfrak{C}_u(X))_\tau$ diesselbe Topologie tragen, wenn man berücksichtigt, daß aus Satz 2 in [3] folgt, daß die abgeschlossenen Ideale in $\mathfrak{C}_u(X)$ gerade die fixierten sind.

Es sei $\mathfrak{F}$ ein in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_u(X)$ gegen 0 und φ ein in $\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 konvergenter Filter. Für alle $x \in X$ und für alle gegen x konvergenten Filter $\mathfrak{U}$ gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $F_{U,1} \in \varphi$. Man wähle ein solches Filterelement und bezeichne es mit $U_\mathfrak{u}$. Ist Λ die Familie aller in X konvergenter Filter, so setze $\mathfrak{M} := \{U_\mathfrak{u} : \mathfrak{U} \in \Lambda\}$. Der von der Filtersubbasis $\{F_{U,\varepsilon} : U \in \mathfrak{M}, \varepsilon > 0\}$ erzeugte Filter $\varphi_\mathfrak{M}$ konvergiert in $\mathfrak{C}_u(X)$ gegen 0. Deshalb gibt es nach Lemma 5 ein Filterelement $W \in \varphi_\mathfrak{M}$ mit $W^0 \in \mathfrak{F}$. Zu W gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{M}$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{U_i,\varepsilon_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i F_{U_i,1} \subseteq W .$$

Setzt man $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ und $\tilde{U} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i^s$, so folgt:

$$\varepsilon F_{\tilde{U},1} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i F_{U_i,1} \subseteq W \qquad \text{und} \qquad W^0 \subseteq \varepsilon^{-1}(F_{\tilde{U},1})^0 .$$

Der Filter $\varepsilon\mathfrak{F}$ enthält also die Polare eines Filterelementes von φ, nämlich $(F_{\tilde{U},1})^0 = \left[\bigcap_{i=1}^{n} F_{U_i,1}\right]^0$. Es sei ψ ein Filter, der ebenfalls in $\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 kon-

vergiert. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ und eine in X_s abgeschlossene Teilmenge V von X mit $F_{V,1} \in \psi$ und $\lambda^{-1}(F_{V,1})^0 \in \mathfrak{F}$. Daraus folgt

$$\varepsilon^{-1}(F_{\tilde{U},1})^0 \cap \lambda^{-1}(F_{V,1})^0 = \min(\varepsilon^{-1}, \lambda^{-1})(F_{\tilde{U}\cap V,1})^0 \subseteq \varepsilon^{-1}(F_{V,1})^0 \in \mathfrak{F}\,.$$

Also enthält $\varepsilon\mathfrak{F}$ auch die Polare eines Filterelements von ψ. Nach Lemma 1 konvergiert $\varepsilon\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0, und damit ist

$$\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X) = \mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_u(X)\,.$$

(Für topologische, vollständig reguläre Räume X wurde dieses Ergebnis bereits von H. P. Butzmann bewiesen.)

Lemma 5 legt eine Definition nahe, die es erlauben wird, diejenigen Limesräume X bzw. Limesvektorräume E intern zu charakterisieren, für die i_X bzw. j_E eine Einbettung ist.

DEFINITION. *Es sei x ein Punkt eines Limesraumes X und $\lambda(x)$ eine Familie von gegen x konvergenten Filtern, so daß es zu jedem gegen x konvergenten Filter einen gröberen Filter aus $\lambda(x)$ gibt. Eine Abbildung ξ von $\lambda(x)$ in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ von X heiße* Auswahlfunktion, *wenn $\xi(\mathfrak{U}) \in \mathfrak{U}$ für alle $\mathfrak{U} \in \lambda(x)$ gilt. Das System*

$$M_\xi := \Big\{ \bigcup_{\mathfrak{U}\in H} \xi(\mathfrak{U}) \colon H \text{ endliche Teilmenge von } \lambda(x) \Big\}$$

heiße ein lokales $\lambda(x)$-Überdeckungssystem von x *oder ein* lokales Überdeckungssystem von x, *wenn $\lambda(x)$ die Familie aller gegen x konvergenten Filter ist.*

Aus Lemma 5 ergibt sich unmittelbar:

PROPOSITION 1. *Es sei E ein Limesvektorraum. Für alle lokalen $\lambda(0)$-Überdeckungssysteme M_ξ von 0 ist*

$$\{(U \cap B)^0 \colon U \in M_\xi,\ B \text{ endliche Teilmenge von } E\}$$

eine Basis eines in $\mathfrak{L}_cE$ gegen 0 konvergenten Filters φ_ξ. Ist $\mathfrak{T}$ die Menge aller Auswahlfunktionen von $\lambda(0)$ in $\mathfrak{P}(E)$, so ist $\lambda'(0) := \{\varphi_\xi \colon \xi \in \mathfrak{T}\}$ eine Familie von gegen 0 konvergenten Filtern, so daß es zu jedem in $\mathfrak{L}_cE$ gegen 0 konvergenten Filter einen gröberer aus $\lambda'(0)$ gibt.

LEMMA 8. *Ein Filter $\mathfrak{F}$ konvergiert in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_cE$ genau dann gegen 0, wenn gilt:*

(i) *$\mathfrak{F}$ konvergiert bezüglich $\sigma(\mathfrak{L}\mathfrak{L}_cE, \mathfrak{L}E)$ gegen 0.*

(ii) *Zu jedem lokalen $\lambda(0)$-Überdeckungssystem M_ξ von 0 in E gibt es ein $U_\xi \in M_\xi$ und eine endliche Teilmenge B_ξ von E, so daß gilt:*

$$(U_\xi \cup B_\xi)^{00} \in \mathfrak{F}\,.$$

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{F}$ ein Filter in $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E$, der die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt. Dann gibt es aus jedem Filter $\varphi_\xi \in \lambda'(0)$ ein Filterelement, nämlich $(U_\xi \cup B_\xi)^0$, so daß $(U_\xi \cup B_\xi)^{00}$ zu $\mathfrak{F}$ gehört. Nach Lemma 5 konvergiert dann $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ gegen 0.

Konvergiert umgekehrt ein Filter $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ gegen 0, so konvergiert $\mathfrak{F}$ bezüglich $\sigma(\mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E, \mathfrak{L}E)$ gegen 0. Ist M_ξ ein lokales $\lambda(0)$-Überdeckungssystem von 0 in E, so gibt es ein Filterelement V aus dem von der Filterbasis

$$\{(U \cup B)^0\colon\ U \in M_\xi,\ B \text{ endliche Teilmenge von } E\}$$

erzeugten Filter φ_ξ mit $V^0 \in \mathfrak{F}$. Da es zu V ein $U_\xi \in M_\xi$ und eine endliche Teilmenge B_ξ von E gibt mit $(U_\xi \cup B_\xi)^0 \subseteq V$, folgt

$$V^0 \subseteq (U_\xi \cup B_\xi)^{00} \in \mathfrak{F}\,.$$

Aus Lemma 8 folgt nun eine Charakterisierung der in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ gegen 0 konvergenten Filter.

PROPOSITION 2. *Wählt man zu jedem lokalen $\lambda(0)$-Überdeckungssystem M_ξ von 0 in E ein $U_\xi \in M_\xi$ und eine endliche Teilmenge B_ξ von E, und bezeichnet man mit $\mathfrak{T}$ die Menge aller Auswahlfunktionen ξ von $\lambda(0)$ in $\mathfrak{P}(E)$, so konvergiert der von der Subbasis*

$$\{(U_\xi \cup B_\xi)^{00}\colon \xi \in \mathfrak{T}\} \cup \{\{\zeta\}^0\colon \zeta \in \mathfrak{L}E\}$$

erzeugte Filter $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ gegen 0. Ist $\lambda''(0)$ die Familie aller Filter in $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_c E$, die man durch diese Konstruktion erhält, so gibt es zu jedem in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ gegen 0 konvergenten Filter einen gröberen Filter aus $\lambda''(0)$.

DEFINITION. *Ein Limesvektorraum E heiße* $\mathfrak{L}_c$-einbettbar, *wenn j_E injektiv und j_E^{-1} eine stetige Abbildung von $j_E(E)$, versehen mit der von $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ induzierten Limitierung, auf E ist.*

Zur internen Charakterisierung $\mathfrak{L}_c$-einbettbarer Limesvektorräume wird das folgende Lemma benötigt:

LEMMA 9. *Für jede Teilmenge A eines Limesvektorraumes E ist $A^{00} = \overline{j_E(\Gamma A)}^s$.*

BEWEIS. Für alle $a \in A$ und alle $\zeta \in A^0$ ist

$$[j_E(a)](\zeta) = \zeta(a) \subseteq [-1, 1] .$$

Daraus folgt $\overline{j_E(\Gamma A)}^s \subseteq A^{00}$. Es sei $k \in A^{00} \setminus \overline{j_E(\Gamma A)}^s$. Nach den Trennungssätzen gibt es dann ein $\zeta \in \mathfrak{L}E$ mit

$$k(\zeta) > 1 \quad \text{und} \quad \overline{j_E(\Gamma A)}^s(\zeta) \subseteq [-1, 1] .$$

Insbesondere gilt $\zeta(A) \subseteq [-1, 1]$, also liegt ζ in A^0. Aus $k \in A^{00}$ folgt $k(\zeta) \in [-1, 1]$. Also ist $A^{00} = \overline{j_E(\Gamma A)}^s$.

SATZ 3. *Für einen Limesvektorraum E, dessen Dual $\mathfrak{L}E$ die Punkte von E trennt, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *E ist $\mathfrak{L}_c$-einbettbar.*

(ii) *Ein Filter φ konvergiert in E genau dann gegen 0, wenn gilt:*

a) φ konvergiert bezüglich $\sigma(E, \mathfrak{L}E)$ gegen 0.

b) Zu jedem lokalen $\lambda(0)$-Überdeckungssystem M_ξ von 0 gibt es ein $U_\xi \in M_\xi$ und eine endliche Teilmenge B_ξ von E, so daß $\overline{\Gamma(U_\xi \cup B_\xi)}^\sigma$ ein Element von φ ist.

(iii) *Ein Filter φ konvergiert in E genau dann gegen 0, wenn gilt:*

a) φ konvergiert in E_τ gegen 0.

b) Zu jedem lokalen $\lambda(0)$-Überdeckungssystem M_ξ von 0 gibt es ein $U_\xi \in M_\xi$ und eine endliche Teilmenge B_ξ von E, so daß $\overline{\Gamma(U_\xi \cup B_\xi)}^\tau$, der Abschluß von $\Gamma(U_\xi \cup B_\xi)$ in E_τ, zu φ gehört.

BEWEIS. Wegen Lemma 8 und Lemma 9 folgt (ii) aus (i).

(iii) $\Rightarrow$(i): Konvergiert ein Filter ψ in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E$ gegen 0, so konvergiert ψ auch in $(\mathfrak{L}_c\mathfrak{L}_c E)_\tau$ gegen 0. Aus Lemma 3 folgt, daß $j_E^{-1}(\psi)$ in E_τ gegen 0 konvergiert. Zu jedem lokalen $\lambda(0)$-Überdeckungssystem M_ξ von 0 gibt es nach Lemma 8 und nach Lemma 9 ein $U_\xi \in M_\xi$ und eine endliche Teilmenge B_ξ von E, so daß $\overline{j_E(\Gamma(U_\xi \cup B_\xi))}^s$ ein Element von ψ ist. Nach Lemma 3 ist ferner

$$j_E(\overline{\Gamma(U_\xi \cup B_\xi)}^\tau) = j_E(\overline{\Gamma(U_\xi \cup B_\xi)}^\sigma) = \overline{j_E(\Gamma(U_\xi \cup B_\xi))}^s \cap j_E(E) .$$

Also ist $\overline{\Gamma(U_\xi \cup B_\xi)}^\tau$ ein Element von $j_E^{-1}(\psi)$. Nach (iii) konvergiert $j_E^{-1}(\psi)$ in E gegen 0 und damit ist j_E^{-1} stetig.

BEISPIEL. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{C}_u(X)$ genau dann c-reflexiv, wenn $\mathfrak{C}_c(X) = \mathfrak{C}_u(X)$ ist. Falls also $\mathfrak{C}_c(X) \neq \mathfrak{C}_u(X)$ ist, so kann $\mathfrak{C}_u(X)$ nicht die Bedingung *b*) von (ii) erfüllen.

4. – c-einbettbare Limesräume.

Betrachtet man für einen Limesraum X den Limesraum $\mathfrak{Hom}_c\mathfrak{C}_c(X)$ als Unterraum von $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X)$, so kennt man nach den in Abschnitt 3 entwickelten Methoden alle in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X)$ und damit auch alle in $\mathfrak{Hom}_c\,\mathfrak{C}_c(X)$ konvergenten Filter. Dies wird zu einer internen Charakterisierung c-einbettbarer Limesräume führen.

E. Binz bewies in [2], daß für alle Limesräume X die Abbildung i_X von X in $\mathfrak{Hom}_c\,\mathfrak{C}_c(X)$ stetig und surjektiv ist. Da i_X genau dann injektiv ist, wenn $\mathfrak{C}(X)$ die Punktè von X trennt, wird im folgenden stets vorausgesetzt, daß $\mathfrak{C}(X)$ die Punkte von X trennt. Mit Λ werde die Menge aller in X konvergenten Filter, mit I das Intervall $(0, \frac{1}{2}]$ und mit $\mathfrak{T}'$ die Menge der Abbildungen $\mu: \Lambda \times I \to \mathfrak{P}(X)$ bezeichnet, für die $\mu(\mathfrak{U}, \varepsilon) \in \mathfrak{U}$ für alle $\mathfrak{U} \in \Lambda$ und alle $\varepsilon \in I$ gilt. Setzt man

$$F_{\mu(\mathfrak{U},\varepsilon)} := \{f: f \in \mathfrak{C}(X),\ f(\mu(\mathfrak{U}, \varepsilon)) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]\}\ ,$$

so konvergiert für jedes $\mu \in \mathfrak{T}'$ der von der Filtersubbasis $\{F_{\mu(\mathfrak{U},\varepsilon)}: \mathfrak{U} \in \Lambda,\ \varepsilon \in I\}$ erzeugte Filter φ_μ in $\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0.

LEMMA 10. *Zu jedem in $\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 konvergenten Filter φ gibt es einen gröberen Filter aus $\lambda'(0) := \{\varphi_\mu: \mu \in \mathfrak{T}'\}$.*

BEWEIS. Für alle $\mathfrak{U} \in \Lambda$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$ mit

$$\{f: f \in \mathfrak{C}(X),\ f(U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]\} \in \varphi\ .$$

Wählt man ein solches $U \in \mathfrak{U}$ und bezeichnet es mit $\mu(\mathfrak{U}, \varepsilon)$, so wird dadurch eine Abbildung μ von $\Lambda \times I$ in $\mathfrak{P}(X)$ definiert, die zu $\mathfrak{T}'$ gehört, so daß der zugehörige Filter φ_μ gröber als φ ist.

Es sollen nun die in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 konvergenten Filter beschrieben werden. Dazu sei $\mathfrak{T}''$ die Menge aller Auswahlfunktionen $\xi: \lambda'(0) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{C}(X))$ mit der Eigenschaft: Zu jedem Filter φ_μ aus $\lambda'(0)$ gibt es Filter $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$

aus Λ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ aus I, so daß gilt:

$$\xi(\varphi_\mu) = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_i, \varepsilon_i)}.$$

Der von der Filtersubbasis

$$\{[\xi(\varphi_\mu)]^0 : \varphi_\mu \in \lambda'(0)\} \cup \{\{f\}^0 : f \in \mathfrak{C}(X)\}$$

in $\mathfrak{UC}_c(X)$ erzeugte Filter $\mathfrak{F}_\xi$ konvergiert in $\mathfrak{U}_c\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0, und es gilt:

LEMMA 11. *Zu jedem in $\mathfrak{U}_c\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 konvergenten Filter $\mathfrak{G}$ gibt es einen gröberen Filter $\mathfrak{F}_\xi$ aus $\lambda''(0) := \{\mathfrak{F}_\xi : \xi \in \mathfrak{T}''\}$.*

BEWEIS. Zu jedem Filter $\varphi_\mu \in \lambda'(0)$ gibt es ein $W \in \varphi_\mu$ mit $W^0 \in \mathfrak{G}$. Nach Konstruktion von φ_μ gibt es Filter $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ aus Λ und $\varepsilon_1, .., \varepsilon_n$ aus I mit $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_i, \varepsilon_i)} \subseteq W$. Daraus folgt

$$W^0 \subseteq \Big(\bigcap_{i=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_i, \varepsilon_i)}\Big)^0 \in \mathfrak{G}.$$

Man wähle ein solches Basiselement $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_i, \varepsilon_i)}$ und bezeichne es mit $\xi(\varphi_\mu)$. Dadurch wird eine Auswahlfunktion ξ definiert, die zu $\mathfrak{T}''$ gehört, und der zugehörige Filter $\mathfrak{F}_\xi$ ist gröber als $\mathfrak{G}$.

Es sei nun $x \in X$ und $\mathfrak{F}$ ein Filter, der in $\mathfrak{Hom}_c\mathfrak{C}_c(X)$ gegen $i_X(x)$ konvergiert. Da die Fortsetzung $\tilde{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}_c\mathfrak{C}_c(X)$ ebenfalls gegen $i_X(x)$ konvergiert, gibt es einen Filter $\mathfrak{F}_\xi$ aus $\lambda''(0)$, so daß $i_X(x) + \mathfrak{F}_\xi$ gröber als $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist. Damit ist auch die Spur von $i_X(x) + \mathfrak{F}_\xi$ auf $i_X(X)$ gröber als $\mathfrak{F}$. Einen Überlick über alle in $\mathfrak{Hom}_c\mathfrak{C}_c(X)$ gegen $i_X(x)$ konvergenten Filter erhält man also, wenn man für alle $\xi \in \mathfrak{T}''$ die Spur von $i_X(x) + \mathfrak{F}_\xi$ auf $i_X(X)$ berechnet. Dazu dient das folgende Lemma.

LEMMA 12. *Es sei $\lambda(x)$ die Familie aller gegen x konvergenten Filter. Es sei $\mu \in \mathfrak{T}'$ mit $x \notin \overline{\mu(\mathfrak{U}, \varepsilon)}^S$ für alle $(\mathfrak{U}, \varepsilon) \in (\Lambda \times I) \setminus (\lambda(x) \times I)$. Für je endlich viele Filter $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n \in \Lambda$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in I$ gilt dann: Sind $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m$ die Filter aus $\{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n\}$, die zu $\lambda(x)$ gehören, so gibt es ein $f \in \mathfrak{C}(X)$ mit*

$$\Big[i_X(x) + \Big(\bigcap_{j=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_j, \varepsilon_j)}\Big)^0\Big] \cap [i_X(x) + \{f\}^0] \cap i_X(X) \subseteq i_X\Big(\bigcup_{j=1}^{m} \overline{\mu(\mathfrak{U}_j, \varepsilon_j)}^S\Big).$$

Falls keiner der Filter $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ gegen x konvergiert, so ist

$$i(X) \cap \Big[i_X(x) + \Big(\bigcap_{j=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_j, \varepsilon_j)}\Big)^0\Big] = \{i_X(x)\}.$$

BEWEIS. Zur Abkürzung setze man $F := \bigcap_{j=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_j, \varepsilon_j)}$. Es sei

$$y \notin \overline{\mu(\mathfrak{U}_1, \varepsilon_1)}^S \cup \ldots \cup \overline{\mu(\mathfrak{U}_n, \varepsilon_n)}^S$$

und $y \neq x$. Dann gibt es ein $g \in \mathfrak{C}(X)$ mit $g(y) = 2$, $g(x) = 0$ und $g(\mu(\mathfrak{U}_j, \varepsilon_j)) = \{0\}$ für $j = 1, \ldots, n$. Damit liegt g in F. Aus $2 = g(y) - g(x) = [i_X(y) - i_X(x)](g)$ folgt, daß $i_X(y)$ nicht in $\{i_X(x) + F^0\}$ liegt. Falls alle Filter $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ zu $\lambda(x)$ gehören, so folgt hieraus die Behauptung. Konvergiert keiner dieser Filter gegen x, so gibt es ein $h \in \mathfrak{C}(X)$ mit $h(x) = 2$ und $h(\mu(\mathfrak{U}_1, \varepsilon_1) \cup \ldots \cup \mu(\mathfrak{U}_n, \varepsilon_n)) = \{0\}$. Also liegt h in F, und für alle $u \in \overline{\mu(\mathfrak{U}_1, \varepsilon_1)}^S \cup \ldots \cup \overline{\mu(\mathfrak{U}_n, \varepsilon_n)}^S$ folgt:

$$-2 = h(u) - h(x) = [i_X(x) - i_X(x)](h) .$$

Also gehört u nicht zu $[i_X(x) + F^0]$ und es ist

$$[i_X(x) + F^0] \cap i_X(X) = \{i_X(x)\} .$$

Es seien nun $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m$ die Filter, die gegen x konvergieren, und $\mathfrak{U}_{m+1}, \ldots \mathfrak{U}_n$ die Filter, die nicht zu $\lambda(x)$ gehören. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{C}(X)$ mit

$$f(\mu(\mathfrak{U}_{m+1}, \varepsilon_{m+1}) \cup \ldots \cup \mu(\mathfrak{U}_n, \varepsilon_n)) = \{2\}$$

und $f(x) = 0$. Daraus folgt

$$[i_X(x) + F^0] \cap [i_X(x) + \{f\}^0] \cap i_X(X) \subseteq i_X\big(\overline{\mu(\mathfrak{U}_1, \varepsilon_1)}^S \cup \ldots \cup \overline{\mu(\mathfrak{U}_m, \varepsilon_m)}^S\big) .$$

SATZ 4. *Ein Limesraum X, dessen Funktionenalgebra $\mathfrak{C}(X)$ die Punkte von X trennt, ist genau dann* c*-einbettbar, wenn für alle $x \in X$ gilt:*

Ein Filter $\mathfrak{U}$ konvergiert genau dann gegen x, wenn es zu jedem lokalen Überdeckungssystem M_ξ von x ein $U \in M_\xi$ gibt, so daß $\overline{U}^S$ zu $\mathfrak{U}$ gehört.

BEWEIS. Es werde zunächst vorausgesetzt, daß für alle $x \in X$ gilt: Ein Filter $\mathfrak{U}$ konvergiert gegen x, wenn es zu jedem lokalen Überdeckungssystem M_ξ von x ein $U \in M_\xi$ gibt mit $\overline{U}^S \in \mathfrak{U}$. Zu zeigen ist, daß für alle in $\mathfrak{Hom}_c\, \mathfrak{C}_c(X)$ gegen $i_X(x)$ konvergenten Filter $\mathfrak{F}$ der Filter $i_X^{-1}(\mathfrak{F})$ in X gegen x konvergiert. Es sei also $\mathfrak{F}$ ein Filter, der in $\mathfrak{Hom}_c\, \mathfrak{C}_c(X)$ gegen $i_X(x)$ konvergiert. Die Fortsetzung $\tilde{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{L}\mathfrak{C}_c(X)$ konvergiert dann in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X)$ ebenfalls gegen $i_X(x)$. Also gibt es einen Filter $\mathfrak{F}_\zeta \in \lambda''(0)$, so daß $i_X(x) + \mathfrak{F}_\zeta$ gröber als $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist. Da $i_X^{-1}(\tilde{\mathfrak{F}}) = i_X^{-1}(\mathfrak{F})$ feiner als $i_X^{-1}(i_X(x) + \mathfrak{F}_\zeta)$ ist, muß gezeigt werden, daß $i_X^{-1}(i_X(x) + \mathfrak{F}_\zeta)$ gegen x konvergiert. Die Fa-

milie

$$\{i_X(X) \cap [i_X(x) + [\zeta(\varphi_\mu)]^0] : \varphi_\mu \in \lambda'(0)\} \cup \{[i_X(x) + \{f\}^0] \cap i_X(X) : f \in \mathfrak{C}(X)\},$$

die eine Filtersubbasis der Spur von $\mathfrak{F}_\zeta + i_X(x)$ auf $i_X(X)$ ist, werde mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

Es sei nun $\xi : \lambda(x) \to \mathfrak{P}(X)$ eine Auswahlfunktion und M_ξ das zugehörige lokale Überdeckungssystem von x. Für alle $y \in X \setminus \{x\}$ wähle man eine Umgebubg U_y von y in X_S, die x nicht enthält und abgeschlossen in X_S ist. Für alle $\mathfrak{U} \in \Lambda$ und alle $\varepsilon \in I$ setze man

$$\mu(\mathfrak{U}, \varepsilon) := \begin{cases} \xi(\mathfrak{U}) & \text{für } \mathfrak{U} \in \lambda(x), \\ U_y & \text{für } \mathfrak{U} \in \lambda(y), \end{cases} \qquad \text{falls } y \neq x \text{ ist}.$$

Damit gibt es Filter $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n \in \Lambda$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in I$, so daß

$$\{[\zeta(\varphi_\mu)]^0 + i_X(x)\} \cap i_X(X) = \left\{\left[\bigcap_{j=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_j, \varepsilon_j)}\right]^0 + i_X(x)\right\} \cap i_X(X)$$

ein Element von $\mathfrak{S}$ ist. Nach Lemma 12 gibt es ein $f \in \mathfrak{C}(X)$ mit

$$\{[\zeta(\varphi_\mu)]^0 + i_X(x)\} \cap [i_X(x) + \{f\}^0] \cap i_X(X) \subseteq i_X\left(\bigcup_{\nu=1}^{m} \overline{\xi(\mathfrak{U}_{j_\nu})}^S\right),$$

falls $j_1, \ldots, j_m$ die Indizes aus $\{1, \ldots, n\}$ sind mit $\mathfrak{U}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{U}_{j_m} \in \lambda(x)$. Gehört keiner der Filter $\mathfrak{U}_j$ für $j = 1, \ldots, n$ zu $\lambda(x)$, so ist

$$\{[\zeta(\varphi_\mu)]^0 + i_X(x)\} \cap i_X(X) = \{i_X(x)\}.$$

Entweder ist also $i_x^{-1}(\mathfrak{F}_\zeta + i_X(x))$ der von x erzeugte Ultrafilter, der gegen x konvergiert, oder es gibt zu jedem lokalen Überdeckungssystem M_ξ von x ein $U \in M_\xi$ mit $\overline{U}^S \in i_x^{-1}(\mathfrak{F}_\zeta + i_X(x))$. Nach Voraussetzung konvergiert dann $i_x^{-1}(i_X(x) + \mathfrak{F}_\zeta)$ gegen x, und damit ist i_x^{-1} stetig.

Es sei nun X ein c-einbettbarer Limesraum und $\mathfrak{F}$ ein Filter in X, so daß es zu jedem lokalen Überdeckungssystem M_ξ von x ein $U \in M_\xi$ gibt mit $\overline{U}^S \in \mathfrak{F}$. Es muß gezeigt werden, daß der Filter $i_X(\mathfrak{F}) - i_X(x)$ in $\mathfrak{L}_c\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 konvergiert, d.h.

(i) Zu jedem in $\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 konvergenten Filter $\varphi_\mu \in \lambda'(0)$ gibt es ein $V \in \varphi_\mu$ mit $V^0 \in i_X(\mathfrak{F}) - i_X(x)$.

(ii) Der Filter $i_X(\mathfrak{F}) - i_X(x)$ konvergiert bezüglich $\sigma(\mathfrak{L}\mathfrak{C}_c(X), \mathfrak{C}(X))$ gegen 0.

Ist φ_μ ein Filter aus $\lambda'(0)$, so wird durch $\xi(\mathfrak{U}) := \mu(\mathfrak{U}, \frac{1}{2})$ eine Auswahlfunktion von $\lambda(x)$ in $\mathfrak{P}(X)$ definiert. Nach Voraussetzung gibt es Filter $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ aus $\lambda(x)$ mit

$$U := \overline{\xi(\mathfrak{U}_1)}^s \cup \ldots \cup \overline{\xi(\mathfrak{U}_n)}^s = \overline{\mu(\mathfrak{U}_1, \tfrac{1}{2})}^s \cup \ldots \cup \overline{\mu(\mathfrak{U}_n, \tfrac{1}{2})}^s \in \mathfrak{F} .$$

und

$$V := F_{\mu(\mathfrak{U}_1, \frac{1}{2})} \cap \ldots \cap F_{\mu(\mathfrak{U}_n, \frac{1}{2})} \in \varphi_\mu .$$

Aus

$$i_X(U) = i_X(X) \cap \left[\left(\bigcap_{j=1}^{n} F_{\mu(\mathfrak{U}_j, \frac{1}{2})}\right)^0 + i_X(x)\right]$$

folgt, daß V^0 zu $i_X(\mathfrak{F}) - i_X(x)$ gehört. Der Filter $\mathfrak{F}$ konvergiert in X_S gegen x, da $\mathfrak{F}$ feiner als der Durchschnitt aller gegen x konvergenten Filter ist. Für alle $f \in \mathfrak{C}(X)$ konvergiert $f(\mathfrak{F})$ gegen $f(x)$, d.h. $[i_X(\mathfrak{F}) - i_X(x)](f)$ konvergiert gegen 0. Also konvergiert $i_X(\mathfrak{F})$ in $\mathfrak{Hom}_c\, \mathfrak{C}_c(X)$ gegen $i_X(x)$. Da i_X ein Homöomorphismus ist, konvergiert $\mathfrak{F}$ in X gegen x.

KOROLLAR. *Ein $\mathfrak{L}_c$-einbettbarer Limesvektorraum ist* c-*einbettbar.*

SATZ 5. *Ein Limesraum X mit Hauptideallimitierung, insbesondere ein topologischer Raum X, dessen Funktionenalgebra $\mathfrak{C}(X)$ die Punkte von X trennt, ist genau dann* c-*einbettbar, wenn für alle $x \in X$ der gröbste gegen x konvergente Filter eine Basis aus Mengen besitzt, die in X_S abgeschlossen sind.*

BEWEIS. Ist X ein c-einbettbarer Limesraum, so konvergiert nach Satz 4 mit jedem Filter $\mathfrak{U}$ auch der von $\{\overline{U}^s\colon U \in \mathfrak{U}\}$ erzeugte Filter gegen x.

Ist umgekehrt $\mathfrak{U}$ ein Filter, so daß es zu jedem lokalen Überdeckungssystem M_ξ von x ein $U \in M_\xi$ mit $\overline{U}^s \in \mathfrak{U}$ gibt, so ist $\mathfrak{U}$ feiner als der gröbste gegen x konvergente Filter $\mathfrak{U}(x)$, wenn $\mathfrak{U}(x)$ eine Filterbasis $\mathfrak{B}(x)$ aus Mengen besitzt, die in X_S abgeschlossen sind. Für alle $B \in \mathfrak{B}(x)$ ist nämlich $\{B\}$ ein lokales Überderckungssystem, und deshalb gehört $\overline{B}^s = B$ zu $\mathfrak{U}$.

SATZ 6. *Für alle Limesräume X ist $\mathfrak{C}_u(X)$ genau dann* c-*einbettbar, wenn $\mathfrak{C}_u(X) = \mathfrak{C}_c(X)$ ist.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{C}_c(X) \neq \mathfrak{C}_u(X)$, dann existiert ein Filter Φ, der in $\mathfrak{C}_c(X)$, aber nicht in $\mathfrak{C}_u(X)$ gegen 0 konvergiert. Deshalb gibt es ein $x \in X$ und einen gegen x konvergenten Filter θ, so daß für alle $W \in \theta$ gilt:

Es gibt ein $n_w \in \mathbb{N}$, so daß für alle $F \in \Phi$ gilt:

$$F(W) \not\subset \left[-\frac{1}{n_w}, \frac{1}{n_w}\right] .$$

Für alle $m \in \mathbf{N}$ sei $\mathfrak{U}_m$ ein System von Teilmengen von X mit

(i) Zu $U \in \mathfrak{U}_m$ gibt es ein $F \in \Phi$ mit $F(U) \subseteq [-1/m, 1/m]$.

(ii) Jedes $U \in \mathfrak{U}_m$ ist abgeschlossen in X_S.

(iii) Jeder in X konvergente Filter $\mathfrak{B}$ enthält ein $U \in \mathfrak{U}_m$.

Da Φ in $\mathfrak{C}_c(X)$ gegen 0 konvergiert, gibt es zu jedem $m \in \mathbf{N}$ ein solches System $\mathfrak{U}_m$.

Aus Eigenschaft (iii) folgt, daß der von der Subbasis

$$\{F_{U,\varepsilon}\colon U \in \mathfrak{U}_m,\ \varepsilon > 0\}$$

erzeugte Filter Φ_m in $\mathfrak{C}_u(X)$ gegen 0 konvergiert.

Es sei ξ eine Auswahlfunktion von $\lambda(0)$, der Familie aller in $\mathfrak{C}_u(X)$ gegen 0 konvergenten Filter, in $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}(X))$, und es sei $\mathfrak{T}$ die Menge aller Auswahlfunktionen.

Zu $\xi(\Phi_1)$ gibt es $U_1, \ldots, U_s \in \mathfrak{U}_1$ und positive Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$, so daß $\xi(\Phi_1)$ das Basiselement $F_\xi := F_{U_1,\varepsilon_1} \cap \ldots \cap F_{U_s,\varepsilon_s}$ enthält.

Man wähle $m_\xi \in \mathbf{N}$ so, daß $1/m_\xi < \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s\}$ ist. Zu $\xi(\Phi_{m_\xi})$ gibt es es $V_1, \ldots, V_t \in \mathfrak{U}_{m_\xi}$ und positive Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_t$, so daß $G_\xi := F_{V_1,\zeta_1} \cap \ldots$ $\ldots \cap F_{V_t,\zeta_t}$ eine Teilmenge von $\xi(\Phi_{m_\xi})$ ist. Wäre $\mathfrak{C}_u(X)$ ein c-einbettbarer Limesraum, so müßte der von $\{\xi(\Phi_1) \cup \xi(\Phi_{m_\xi})\colon \xi \in \mathfrak{T}\}$ erzeugte Filter ψ in $\mathfrak{C}_u(X)$ gegen 0 konvergieren. Für je endlich viele $\xi_1, \ldots, \xi_r \in \mathfrak{T}$ und für alle $W \in \theta$ werden wir jedoch zeigen

$$\left[\bigcap_{i=1}^{r} (F_{\xi_i} \cup G_{\xi_i})\right](W) \not\subseteq \left[-\frac{1}{n_w}, \frac{1}{n_w}\right].$$

Für $i = 1, \ldots, r$ seien dabei

$$F_{\xi_i} = F_{U_{1,i},\varepsilon_{1,i}} \cap \ldots \cap F_{U_{s_i,i},\varepsilon_{s_i,i}}, \qquad G_{\xi_i} = F_{V_{1,i},\zeta_{1,i}} \cap \ldots \cap F_{V_{t_i,i},\zeta_{t_i,i}}$$

und $\delta_i := \min\{\varepsilon_{1,i}, \ldots, \varepsilon_{s_i,i}\}$.

Ist $\zeta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_r\} > 1/n_w$, so gehört ζe zu $F_{\xi_1} \cap \ldots \cap F_{\xi_r}$, wobei $e \in \mathfrak{C}(X)$ definiert ist durch $e(x) = 1$ für alle $x \in X$, und es gilt

$$\zeta e(W) \not\subseteq \left[-\frac{1}{n_w}, \frac{1}{n_w}\right].$$

Es gebe nun ein $q \in \{1, \ldots, r\}$, so daß $\delta_1 \leqslant \ldots \leqslant \delta_q \leqslant 1/n_w < \delta_{q+1} \leqslant \ldots \leqslant \delta_r$ ist. Man setze nun $V_i := V_{1,i} \cup \ldots \cup V_{t_i,i}$ und $V := V_1 \cup \ldots \cup V_q$. Da es zu jedem $V_{j,i}$ mit $i = 1, \ldots, q$ und $j = 1, \ldots, t_i$ ein $F_{j,i} \in \Phi$ gibt mit $F_{j,i}(V_{j,i}) \subseteq [-1/n_w,$

$1/n_w]$, gibt es auch ein $F \in \Phi$, so daß

$$F(V) \subseteq \left[-\frac{1}{n_w}, \frac{1}{n_w}\right] \text{ gilt .}$$

Also kann W keine Teilmenge von V sein. Man wähle nun ein $z \in W \setminus V$. Dann gibt es ein $h \in \mathfrak{C}(X)$ mit $h(z) = 2/n_w$ und $h(V) = \{0\}$, da V abgeschlossen in X_S ist. Falls $q = r$ ist, so gehört h zu $G_{\xi_1} \cap \ldots \cap G_{\xi_r}$. Ist $q < r$, se setze man $\eta := \min\{\delta_{q+1}, \ldots, \delta_r\}$. Dann ist $\eta > 1/n_w$, $f := (h \wedge \eta e) \vee (-\eta e)$ gehört zu

$$G_{\xi_1} \cap \ldots \cap G_{\xi_q} \cap F_{\xi_{q+1}} \cap \ldots \cap F_{\xi_r}, \text{ und es ist } f(z) > \frac{1}{n_w} .$$

Also konvergiert ψ in $\mathfrak{C}_u(X)$ nicht gegen 0.

Es soll nun ein topologischer Raum P angegeben werden, so daß $\mathfrak{C}_u(P)$ und $\mathfrak{C}_c(P)$ verschieden sind. Dann ist $\mathfrak{C}_u(P)$ ein Beispiel eines Limesraumes, der nicht c-einbettbar ist, obwohl mit jedem Filter φ auch der von $\{\overline{V}^S : V \in \varphi\}$ erzeugte Filter konvergiert. Dazu sei J das Intervall $[0, 1)$, $J_n := J \times \{n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, Q die topologische Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} J_n$ und $P := Q \cup \{a\}$, wobei $a \notin Q$ ist. Die Topologie auf P werde folgendermaßen definiert: Eine Umgebungsbasis eines Punktes $x \in Q$ sei durch den Umgebungsfilter von x in Q gegeben, und eine Umgebungsbasis von a durch $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $U_n := \bigcup_{\nu \geqslant n} J_\nu \cup \{a\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Zu jedem $x \in Q$ wähle man eine kompakte Umgebung U_x, so daß kein J_n schon durch endlich viele U_x überdeckt wird. Der von

$$\{F_{U_x, \varepsilon} : x \in Q, \varepsilon > 0\} \cup \{F_{U_n, 1/n} : n \in \mathbb{N}\}$$

erzeugte Filter konvergiert in $\mathfrak{C}_c(P)$, aber nicht in $\mathfrak{C}_u(P)$ gegen 0.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. Binz, *Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren*, Math. Annalen, **175** (1968), S. 169-184.

[2] E. Binz, *Zu den Beziehungen zwischen c-einbettbaren Limesräumen und ihren limitierten Funktionenalgebren*, Math. Annalen, **181** (1969), S. 45-52.

[3] E. Binz - W. Feldman, *On a Marinescu Structure on* $\mathfrak{C}(X)$, Comment. Math. Helv., **46** (1971), S. 436-450.

[4] H. P. BUTZMANN, *Über die* c-*Reflexivität von* $\mathfrak{C}_c(X)$, Comment. Math. Helv., **47** (1972), S. 92-101.

[5] H. P. BUTZMANN, *Dualitäten in* $\mathfrak{C}_c(X)$, Dissertation, Universität Mannheim (1971).

[6] C. H. COOK - H. R. FISCHER, *On Equicontinuity and Continuous Convergence*, Math. Annalen, **159** (1965), S. 94-104.

[7] H. JARCHOW, *Duale Charakterisierung der Schwartz-Räume*, Math. Annalen, **196** (1972), S. 85-90.

[8] M. KATĚTOV, *Convergence Structures, General Topology and its Relation to Modern Analysis and Algebra*, Proceedings of the Second Prague Topological Symposium, 1966.