ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FRANÇOIS MURAT

Compacité par compensation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 5, n° 3 (1978), p. 489-507

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_489_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compacité par compensation.

FRANÇOIS MURAT (*)

Soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$. On déduit du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov que si deux suites de fonctions u_n et v_n vérifient:

$$\begin{cases} u_n \text{ borné dans } (H^1(\Omega))^N;\ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}, \\ v_n \text{ borné dans } (L^2(\Omega))^N;\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}, \end{cases}$$

alors on a

$$\langle u_n, v_n \rangle \rightharpoonup \langle u, v \rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Le but de cette note est de montrer que l'on a encore convergence du produit $\langle u_n, v_n \rangle$ vers $\langle u, v \rangle$ si l'on remplace l'hypothèse « toutes les dérivées de u_n bornées dans $L^2(\Omega)$, aucune hypothèse sur les dérivées de v_n » par une hypothèse du type « certaines dérivées de u_n et certaines dérivées de v_n (en quelque sorte complémentaires) bornées dans $L^2(\Omega)$ ».

Ce type de résultat de continuité est notamment utile pour étudier des problèmes d'homogénéisation ou de G-convergence (convergence des solutions d'équations elliptiques quand les coefficients de celles-ci sont bornés dans $L^\infty(\Omega)$) (pour ces problèmes, cf. par exemple A. Bensoussan, J. L. Lions et G. Papanicolaou [1], [2], E. De Giorgi et S. Spagnolo [1], L. Tartar [1]).

Nous suivons le plan:

1) Le cas modèle: divergence et rotationnel dans L^2.

2) Divergence dans L^r, rotationnel dans L^q.

3) Généralisation à des opérateurs du premier ordre dans L^2.

4) Le cas du système de l'élasticité.

(*) Univ. Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55-65, 4 Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Pervenuto alla Redazione il 28 Ottobre 1976 ed in forma definitiva il 9 Febbraio 1977.

La démonstration du Théorème 1 a été obtenue en collaboration avec L. Tartar, que je remercie également pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

1. – Le cas modèle: divergence et rotationnel dans L^2.

Etant donnés un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^N$ et une distribution $u \in (\mathcal{D}'(\Omega))^N$ on note:

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

et on désigne par $\operatorname{rot} u$ l'élément de $(\mathcal{D}'(\Omega))^{N^2}$ de composantes:

$$(\operatorname{rot} u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant N).$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $|\cdot|$ le produit scalaire et la norme de $\boldsymbol{C}^N$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1} x_i \bar{y}_i, \qquad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

THÉORÈME 1. *Soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$ et soient $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ les espaces*:

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} X(\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^N, \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}, \\ Y(\Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^N, \operatorname{rot} v \in (L^2(\Omega))^{N^2}\}, \end{cases}$$

que l'on munit des normes:

$$\begin{cases} \|u\|_{X(\Omega)} = [\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div} u\|^2_{L^2(\Omega)}]^{\frac{1}{2}}, \\ \|v\|_{Y(\Omega)} = [\|v\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{rot} v\|^2_{(L^2(\Omega))^{N^2}}]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Si deux suites u_n et v_n vérifient:

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} u_n \text{ borné dans } X(\Omega);\ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}, \\ v_n \text{ borné dans } Y(\Omega);\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}, \end{cases}$$

alors on a

$$\text{(1.3)} \qquad \langle u_n, v_n \rangle \rightharpoonup \langle u, v \rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 1.1. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω, on déduit du Théorème 1 que la suite $\langle u_n, v_n\rangle$ converge vers $\langle u, v\rangle$ dans la topologie vague des mesures.

La question est ouverte de savoir si cette convergence a lieu dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ faible, c'est-à-dire de savoir si:

$$\begin{cases} \forall \varphi \in L^\infty(\Omega)\,, & \forall K \text{ compact}\,,\ K \subset \Omega\,, \\ \displaystyle\int_K \langle u_n, v_n\rangle \varphi\, dx \to \int_K \langle u, v\rangle \varphi\, dx\,. \end{cases}$$ ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. La démonstration utilise de façon essentielle la transformation de Fourier dans $L^2(\boldsymbol{R}^N)$, et notamment l'égalité de Plancherel-Parseval.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. On localise en choisissant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur le support de φ et en posant:

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{cases} w_n = (\varphi u_n)^\sim\,, & t_n = (\psi v_n)^\sim\,, \\ w = (\varphi u)^\sim\,, & t = (\psi v)^\sim\,, \end{cases}$$

où $(\phi)^\sim$ désigne le prolongement de ϕ par zéro en dehors de Ω.

La suite w_n (resp. t_n) est bornée dans $X(\boldsymbol{R}^N)$ (resp. $Y(\boldsymbol{R}^N)$) et converge vers w (resp. t) dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^N$ faible. De plus toutes ces fonctions sont à support dans un compact fixe ω et l'on a:

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \langle u_n, v_n\rangle \varphi\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle w_n, t_n\rangle\, dx\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \langle u, v\rangle \varphi\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle w, t\rangle\, dx\,. \end{cases}$$

Soient $\hat{w}_n$, $\hat{t}_n$, $\hat{w}$ et $\hat{t}$ les transformées de Fourier de w_n, t_n, w et t. Elles verifient:

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{cases} \hat{w}_n \text{ borné dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N\,, \\ \hat{w}_n \rightharpoonup \hat{w} \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N \text{ faible}\,, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N \xi_i (\hat{w}_n)_i \text{ borné dans } L^2(\boldsymbol{R}^N)\,, \\ \hat{t}_n \text{ borné dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N\,, \\ \hat{t}_n \rightharpoonup \hat{t} \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N \text{ faible}\,, \\ \xi_j (\hat{t}_n)_i - \xi_i (\hat{t}_n)_j \text{ borné dans } L^2(\boldsymbol{R}^N)\,, \qquad 1 \leqslant i\,,\ j \leqslant N\,. \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'on a, pour $1 \leqslant k \leqslant N$, l'identité:

$$\begin{cases} \forall W \in \boldsymbol{C}^N, \qquad \forall T \in \boldsymbol{C}^N, \qquad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N, \\ \xi_k \langle W, T \rangle = \xi_k \sum_{i=1}^{N} W_i \overline{T}_i = \overline{T}_k \sum_{i=1}^{N} \xi_i W_i + \sum_{i=1}^{N} (\xi_k \overline{T}_i - \xi_i \overline{T}_k) W_i . \end{cases}$$

De cette identité et de (1.6), on déduit que:

$$\text{(1.7)} \qquad \begin{cases} |\xi| \langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle \text{ borné dans } L^1(\boldsymbol{R}^N), \\ |\xi| \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle \in L^1(\boldsymbol{R}^N) . \end{cases}$$

D'autre part, w_n étant à support dans le compact fixe ω, on a la majoration:

$$\|\hat{w}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^N} \leqslant \|w_n\|_{(L^1(\boldsymbol{R}^N))^N} = \|w_n\|_{(L^1(\omega))^N} \leqslant C_\omega \|w_n\|_{(L^2(\omega))^N} \leqslant C_\omega \|\boldsymbol{u}_n\|_{(L^2(\Omega))^N} \leqslant C ,$$

et pour tout $\xi \in \boldsymbol{R}^N$

$$\hat{w}_n(\xi) = \int_\omega w_n(x) \exp(-2i\pi \langle x, \xi \rangle) \, dx$$

converge vers

$$\int_\omega w(x) \exp(-2i\pi \langle x, \xi \rangle) \, dx = \hat{w}(\xi) .$$

De même $\|\hat{t}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^N} \leqslant C$ et $\hat{t}_n$ converge vers $\hat{t}$ en tout point ξ de $\boldsymbol{R}^N$. Le théorème de Lebesgue montre alors que:

$$\langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle \to \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle \qquad \text{dans } L^1(B) \text{ fort},$$

quel que soit B borné. Joint à (1.7), ce résultat entraine que:

$$\text{(1.8)} \qquad \langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle \to \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle \qquad \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort} .$$

On en déduit que

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} \langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle \, d\xi \to \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle \, d\xi ,$$

d'où par Plancherel-Parseval:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} \langle w_n, t_n \rangle \, dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle w, t \rangle \, dx ,$$

ce qui, joint à (1.5), achève la démonstration du Théorème 1. ∎

REMARQUE 1.2. Si l'on note

$$w(*)\,t = \sum_{i=1}^{N} w_i * t_i\,,$$

on déduit de (1.8) que l'on a, sous les hypothèses du Théorème 1, le résultat supplémentaire (un peu inattendu):

$$\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \\ (\varphi u_n)^{\sim}(*)(\psi v_n)^{\sim} \to (\varphi u)^{\sim}(*)(\psi v)^{\sim} \qquad \text{dans } C^0(\boldsymbol{R}^N)\,. \end{cases} \quad \blacksquare$$

2. – Divergence dans L^p, rotationnel dans L^q.

Nous adopterons dans ce paragraphe les mêmes notations qu'au paragraphe 1.

THÉORÈME 2. *Soient p et q tels que*

$$1 < p, q < +\infty \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{2.1}$$

et soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$. On définit les espaces $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$:

$$\begin{cases} X(\Omega) = \left\{u \in \left(L^p(\Omega)\right)^N,\ \operatorname{div} u \in L^p(\Omega)\right\}\,, \\ Y(\Omega) = \left\{v \in \left(L^q(\Omega)\right)^N,\ \operatorname{rot} v \in \left(L^q(\Omega)\right)^{N^2}\right\}\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

que l'on munit des normes:

$$\begin{cases} \|u\|_{X(\Omega)} = \|u\|_{(L^p(\Omega))^N} + \|div\, u\|_{L^p(\Omega)}\,, \\ \|v\|_{Y(\Omega)} = \|v\|_{(L^q(\Omega))^N} + \|\operatorname{rot} v\|_{(L^q(\Omega))^{N^2}}\,. \end{cases}$$

Si deux suites u_n et v_n vérifient:

$$\begin{cases} u_n \text{ borné dans } X(\Omega);\ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } \left(L^p(\Omega)\right)^N \text{ faible}\,, \\ v_n \text{ borné dans } Y(\Omega);\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } \left(L^q(\Omega)\right)^N \text{ faible}\,, \end{cases}$$

alors on a

$$\langle u_n, v_n\rangle \rightharpoonup \langle u, v\rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,. \tag{2.3}$$ $\blacksquare$

REMARQUE 2. Le Théorème 2 est une généralisation du Théorème 1. Nous allons cependant en donner une démonstration tout à fait différente: dans le cas où les fonctions v_n vérifient $\operatorname{rot} v_n = 0$ (c'est-à-dire sont des gradients), cette démonstration se résume à une intégration par parties. Pour se ramener à ce cas simple, on utilise un relèvement compact du rotationnel, dont l'existence est l'objet du Lemme 2. ∎

LEMME 2. *Soit ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^N$ ($N \geqslant 2$). Etant donné q tel que $1 < q < +\infty$, on choisit q_* tel que:*

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{N}{N-1} < q_* < +\infty & \text{si } q \geqslant N, \\ \dfrac{1}{q_*} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{N} & \text{si } q < N. \end{cases}$$

Alors à tout g qui vérifie:

$$\text{(2.5)} \qquad \begin{cases} g \in (L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}, \\ g = \operatorname{rot} t, \qquad \text{où } t \in (\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N))^N \text{ et où } t \text{ est à support compact dans } \omega, \end{cases}$$

on peut associer linéairement z tel que:

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{cases} z \in (L^{q_*}(R^N))^N, \qquad \dfrac{\partial z_i}{\partial x_l} \in L^q(\boldsymbol{R}^N) \qquad 1 \leqslant i, l \leqslant N, \\ \operatorname{rot} z = g \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N, \\ \|z\|_{(L^{q_*}(R^N))^N} + \displaystyle\sum_{i,l=1}^{N} \left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_l} \right\|_{L^q(R^N)} \leqslant C \|g\|_{(L^q(R^N))^{N^2}}, \end{cases}$$

où la constante C dépend uniquement de ω, q, q_* et N. ∎

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. La démonstration repose sur une solution explicite de l'équation en z

$$\operatorname{rot} z = g \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N$$

utilisant des noyaux singuliers.

Dans le cours de la démonstration $*$ et $\partial/\partial x_j$ désigneront toujours la convolution et la dérivation au sens des distributions. On remarquera que dans les convolutions, la condition des supports est toujours satisfaite. (L'hypothèse que t est à support compact est essentielle pour vérifier cette condition).

Définissons les noyaux E_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ par:

$$\begin{cases} E_j(x) = \dfrac{1}{S_N}\dfrac{x_j}{|x|^N} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(-\dfrac{1}{N-2}\dfrac{1}{S_N}\dfrac{1}{|x|^{N-2}}\right) & \text{si } N \geqslant 3\,, \\ E_j(x) = \dfrac{1}{S_2}\dfrac{x_j}{|x|^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(-\dfrac{1}{S_2}\operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)\right) & \text{si } N = 2\,, \end{cases}$$

où S_N désigne l'aire de la sphère unité de $\boldsymbol{R}^N$. Soit q_1 donné par:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{q_*} + \dfrac{1}{N} & \text{si } q \geqslant N\,, \\ q_1 = q & \text{si } q < N\,. \end{cases}$$

On vérifie que $q_1 \leqslant q$, et puisque $g \in (L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}$ est à support compact dans ω, on a donc:

$$g \in (L^{q_1}(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}\,, \qquad \|g\|_{(L^{q_1})^{N^2}} \leqslant C\|g\|_{(L^q)^{N^2}}\,.$$

Considérons alors la distribution $z \in (\mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^N))^N$ définie par:

$$z_i = \sum_{j=1}^{N} g_{ij} * E_j\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N\,. \tag{2.7}$$

Les noyaux E_j appartiennent à l'espace de Marcinkiewicz $M^{N/(N-1)}$ et les fonctions g_{ij} appartiennent à $L^{q_1}(\boldsymbol{R}^N)$ $(1 < q_1 < N)$. On a donc pour tout $1 \leqslant i,\ j \leqslant N$:

$$\begin{cases} g_{ij} * E_j \in L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N)\,, \qquad \dfrac{1}{q_*} = \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{N/(N-1)} - 1\,, \\ \|g_{ij} * E_j\|_{L^{q_*}} \leqslant C\|g_{ij}\|_{L^{q_1}}\|E_j\|_{M^{N/N-1}}\,. \end{cases}$$

On en déduit que $z \in (L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N$ et que:

$$\|z\|_{(L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N} \leqslant C\|g\|_{L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}}\,. \tag{2.8}$$

Les dérivées partielles $\partial z_i/\partial x_l$ $(1 \leqslant i,\ l \leqslant N)$ sont données par:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^{N} g_{ij} * \frac{\partial E_j}{\partial x_l}\,.$$

On vérifie que pour tout $1 \leqslant j,\ l \leqslant N$, on a:

$$\begin{cases} \text{si } j \neq l & \dfrac{\partial E_j}{\partial x_l} = \text{v.p.}\left(-N\dfrac{x_j x_l}{|x|^{N+2}}\right), \\ \text{si } j = l & \dfrac{\partial E_j}{\partial x_j} = \text{v.p.}\left(\dfrac{1}{|x|^N} - \dfrac{N x_j^2}{|x|^{N+2}}\right) + \dfrac{S_N}{N}\delta\,, \end{cases}$$

où v.p. désigne la valeur principale. Les fonctions

$$\frac{x_j x_l}{|x|^{N+2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|x|^N} - \frac{N x_j^2}{|x|^{N+2}}$$

vérifient les hypothèses du théorème de Calderon-Zygmund (homogénéité d'ordre $-N$, intégrale nulle sur la sphère, régularité pour $x \neq 0$) et donc pour tout $1 \leqslant i,\ j, l \leqslant N$:

$$\begin{cases} g_{ij} * \dfrac{\partial E_j}{\partial x_l} \in L^q(\boldsymbol{R}^N)\,, \\ \left\| g_{ij} * \dfrac{\partial E_j}{\partial x_l} \right\|_{L^q} \leqslant C \|g_{ij}\|_{L^q}\,. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $1 \leqslant i,\ l \leqslant N$, $\partial z_i / \partial x_l \in L^q(\boldsymbol{R}^N)$ et que:

$$\left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_l} \right\|_{L^q(\boldsymbol{R}^N)} \leqslant C \|g\|_{(L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}}\,. \tag{2.9}$$

Calculons maintenant $\operatorname{rot} z$:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} z)_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\sum_{k=1}^N g_{ik} * E_k\right\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{k=1}^N g_{jk} * E_k\right\} = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{\partial t_i}{\partial x_k} - \frac{\partial t_k}{\partial x_i}\right) * E_k\right\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\frac{\partial t_j}{\partial x_k} - \frac{\partial t_k}{\partial x_j}\right) * E_k\right\} = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial t_i}{\partial x_k} * E_k\right\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial t_j}{\partial x_k} * E_k\right\} = \\ &= \left(\frac{\partial t_i}{\partial x_j} - \frac{\partial t_j}{\partial x_i}\right) * \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\right). \end{aligned}$$

En notant que:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^N \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \Delta\left(-\frac{1}{N-2}\frac{1}{S_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}\right) = \delta & \text{si } N \geqslant 3\,, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^N \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \Delta\left(-\frac{1}{S_2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) = \delta & \text{si } N = 2\,, \end{cases}$$

on en déduit que:

$$\operatorname{rot} z = g \tag{2.10}$$

ce qui, avec (2.8) et (2.9), achève la démonstration du Lemme 2. ∎

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Dans le cas où $N = 1$, le théorème résulte immédiatement du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov. Nous supposerons donc dans la démonstration que $N \geqslant 2$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. On localise en choisissant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur le support de φ et en posant:

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} w_n = (\varphi u_n)^{\sim}, & t_n = (\psi v_n)^{\sim}, \\ w = (\varphi u)^{\sim}, & t = (\psi v)^{\sim}, \end{cases}$$

où $(\phi)^{\sim}$ désigne le prolongement de ϕ par zéro en dehors de Ω.

La suite w_n (resp. t_n) est bornée dans $X(\boldsymbol{R}^N)$ (resp. $Y(\boldsymbol{R}^N)$) et converge vers w (resp. t) dans $(L^p(\boldsymbol{R}^N))^N$ faible. Soit ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^N$ tel que support $\psi \subset \omega$; toutes ces fonctions sont à support compact dans ω et l'on a:

$$\text{(2.12)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \langle u_n, v_n \rangle \varphi \, dx = \int_\omega \langle w_n, t_n \rangle \, dx, \\ \displaystyle\int_\Omega \langle u, v \rangle \varphi \, dx = \int_\omega \langle w, t \rangle \, dx. \end{cases}$$

Si on fixe q_* vérifiant (2.4), il existe, d'aprés le Lemme 2, des fonctions z_n telles que:

$$\begin{cases} z_n \in (L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N, \quad \dfrac{\partial (z_n)_i}{\partial x_l} \in L^q(\boldsymbol{R}^N) \qquad 1 \leqslant i, \ l \leqslant N, \\ \operatorname{rot} z_n = \operatorname{rot} t_n \quad \text{dans } \boldsymbol{R}^N, \\ \|z_n\|_{(L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial (z_n)_i}{\partial x_l} \right\|_{L^q(\boldsymbol{R}^N)} \leqslant C \|\operatorname{rot} t_n\|_{(L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}} \leqslant C. \end{cases}$$

Du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov, on déduit qu'il existe une sous-suite (notée avec l'indice $p \in \boldsymbol{N}$) et un $z \in (L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N$ tels que:

$$\begin{cases} z_p \to z & \text{dans } (L^q(\omega))^N \text{ fort}, \\ \operatorname{rot} z = \operatorname{rot} t & \text{dans } \boldsymbol{R}^N. \end{cases}$$

On a donc, quand $p \to + \infty$

$$\text{(2.13)} \qquad \int_\omega \langle w_p, z_p \rangle \, dx \to \int_\omega \langle w, z \rangle \, dx.$$

D'autre part

$$\operatorname{rot} (t_n - z_n) = 0 \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N, \qquad t_n - z_n \in (L^q_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^N))^N.$$

Il existe donc des fonctions y_n (cf. par exemple L. Schwartz [1], Théorème VI, p. 59 et Théorème XV, p. 181) telles que:

$$\begin{cases} y_n \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^N)\,, \\ \operatorname{grad} y_n = t_n - z_n \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N\,, \\ \int_\omega y_n\,dx = 0\,, \end{cases}$$

et l'on a, puisque y_n est de moyenne nulle sur ω:

$$\|y_n\|_{W^{1,q}(\omega)} \leqslant C \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\omega)} \leqslant C\{\|t_n\|_{(L^q(\omega))^N} + \|z_n\|_{(L^q(\omega))^N}\} \leqslant C\,.$$

Quitte à extraire une nouvelle sous-suite (encore notée avec l'indice $p \in \boldsymbol{N}$), on peut supposer qu'il existe $y \in W^{1,q}(\omega)$ tel que:

$$\begin{cases} y_p \to y & \text{dans } L^q(\omega) \text{ fort}\,, \\ \operatorname{grad} y = t - z & \text{dans } \omega\,. \end{cases}$$

Alors, puisque w_p et w sont à support compact dans ω, on a quand $p \to +\infty$

$$\text{(2.14)} \qquad \begin{cases} \int_\omega \langle w_p, t_p - z_p\rangle\,dx = \int_\omega \langle w_p, \operatorname{grad} y_p\rangle\,dx = -\int_\omega (\operatorname{div} w_p) y_p\,dx \\ \to -\int_\omega (\operatorname{div} w) y\,dx = \int_\omega \langle w, \operatorname{grad} y\rangle\,dx = \int_\omega \langle w, t - z\rangle\,dx\,. \end{cases}$$

De (2.13) et (2.14) on déduit que, quand $p \to +\infty$

$$\int_\omega \langle w_p, t_p\rangle\,dx \to \int_\omega \langle w, t\rangle\,dx\,,$$

c'est-à-dire d'après (2.12) que:

$$\int_\omega \langle u_p, v_p\rangle \varphi\,dx \to \int_\omega \langle u, v\rangle \varphi\,dx\,.$$

L'unicité de la limite assure alors que la suite tout entière converge, ce qui achève la démonstration du Théorème 2. ∎

3. – Généralisation à des opérateurs du premier ordre dans L^2.

Dans ce paragraphe, nous allons donner une généralisation du Théorème 1 à un espace défini comme domaine d'un opérateur du premier ordre à coefficients constants, opérant dans L^2.

Soient $A_1 \dots A_N$ des matrices appartenant à $\mathfrak{L}(\boldsymbol{C}^m, \boldsymbol{C}^{m'})$ et soit Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^N$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par:

$$\mathcal{A}f = \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^{m'} \qquad \forall f \in (\mathcal{D}'(\Omega))^m . \tag{3.1}$$

Le symbole $A(\xi)$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par:

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j A_j \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{C}^m, \boldsymbol{C}^{m'}) \qquad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N . \tag{3.2}$$

Soit enfin une matrice M telle que:

$$M \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{C}^m, \boldsymbol{C}^m) . \tag{3.3}$$

On désigne par $\operatorname{Ker} A$ le noyau de l'opérateur A et par $\langle , \rangle$ le produit scalaire dans $\boldsymbol{C}^m$.

THÉORÈME 3. *Soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$ et soit $Z(\Omega)$ l'espace*:

$$Z(\Omega) = \{ f \in (L^2(\Omega))^m, \ \mathcal{A}f \in (L^2(\Omega))^{m'} \} , \tag{3.4}$$

que l'on munit de la norme:

$$\|f\|_{Z(\Omega)} = [\|f\|^2_{(L^2(\Omega))^m} + \|\mathcal{A}f\|^2_{(L^2(\Omega))^{m'}}]^{\frac{1}{2}} .$$

On suppose que:

$$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^N , \ \xi \neq 0 , \ \forall F \in \boldsymbol{C}^m \text{ tel que } F \in \operatorname{Ker} A(\xi), \text{ alors } \langle MF, F \rangle = 0 , \tag{3.5}$$

$$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^N , \ \xi \neq 0 , \text{ le rang de } A(\xi) \text{ est constant} . \tag{3.6}$$

Si deux suites f_n et g_n vérifient:

$$\begin{cases} f_n \text{ borné dans } Z(\Omega); \ f_n \rightharpoonup f \text{ dans } (L^2(\Omega))^m \text{ faible} , \\ g_n \text{ borné dans } Z(\Omega); \ g_n \rightharpoonup g \text{ dans } (L^2(\Omega))^m \text{ faible} , \end{cases} \tag{3.7}$$

alors on a

$$\langle Mf_n, g_n\rangle \rightharpoonup \langle Mf, g\rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,. \tag{3.8}$$

■

REMARQUE 3.1. Le Théorème 3 est une généralisation du Théorème 1. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $m = 2N$, $m' = 1 + N^2$ et de considérer l'espace

$$Z(\Omega) = \{f \in (L^2(\Omega))^{2N},\ f = (u, v) | u \in (L^2(\Omega))^N,\ v \in (L^2(\Omega))^N,$$
$$\mathcal{A}f \in (L^2(\Omega))^{1+N^2},\ \mathcal{A}f = (\operatorname{div} u, \operatorname{rot} v)\}$$

et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité de $\boldsymbol{C}^N$.

On a alors $\langle Mf, f\rangle_{\boldsymbol{C}^m} = \langle u, v\rangle_{\boldsymbol{C}^N}$, et des calculs simples (mais fastidieux) montrent que les hypothèses (3.5) et (3.6) sont satisfaites. Le Théorème 3 redonne donc le Théorème 1. ■

REMARQUE 3.2. L'hypothèse (3.5) est nécessaire pour obtenir la convergence (3.8). En effet soient $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, $\xi \neq 0$, et $F \in \operatorname{Ker} A(\xi)$; considérons les suites de fonctions f_n et g_n définies par:

$$f_n(x) = g_n(x) = \varphi(x) \exp\left(in\langle x, \xi\rangle\right) F$$

où φ est donnée dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Ces suites vérifient l'hypothèse (3.7) avec $f = g = 0$. Or $\langle Mf_n, f_n\rangle = \varphi^2 \langle MF, F\rangle$ ne converge vers $\langle M0, 0\rangle = 0$ que si $\langle MF, F\rangle = 0$.

Par contre l'hypothèse (3.6) a un caractère technique qui tient à la méthode utilisée pour démontrer le Théorème 3. Cette méthode repose sur la transformée de Fourier dans L^2 et est voisine, par certains aspects, de la méthode de démonstration du Théorème 1. Elle reprend l'idée d'une démonstration de L. Sarason [1] qui généralisait un résultat de J. R. Schulenberger et C. H. Wilcox [1], [2], tout en en simplifiant la démonstration. Ce résultat, qui éclaire le Théorème 3, est le suivant:

THÉORÈME. *Si un opérateur $\mathcal{A}$ donné par* (3.1) *est tel que son symbole $A(\xi)$ soit de rang constant pour tout $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, $\xi \neq 0$, alors pour tout $u \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ tel que $u \in (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$ et $\mathcal{A}u \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^{m'}$ on a:*

$$\begin{cases} u \in (H^1(\boldsymbol{R}^N))^m , \\ \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m} \leqslant C \| \mathcal{A}u \|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^{m'}} \quad 1 \leqslant j \leqslant N . \end{cases} \blacksquare$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. On localise en choisissant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur le support de φ et en posant:

$$\begin{cases} h_n = (\varphi f_n)^\sim , & k_n = (\psi g_n)^\sim , \\ h = (\varphi f)^\sim , & k = (\psi g)^\sim , \end{cases}$$

où $(\phi)^\sim$ désigne le prolongement de ϕ par zéro en dehors de Ω.

Les suites h_n et k_n sont bornées dans $Z(\boldsymbol{R}^N)$ et convergent respectivement vers h et k dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ faible. De plus toutes ces fonctions sont à support dans un compact fixe ω et l'on a:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \langle Mf_n, g_n \rangle \varphi \, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle Mh_n, k_n \rangle \, dx , \\ \displaystyle\int_\Omega \langle Mf, g \rangle \varphi \, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle Mh, k \rangle \, dx . \end{cases}$$

Compte-tenu de l'identité

$$4\langle Mh, k \rangle = \langle M(h+k), (h+k) \rangle - \langle M(h-k), (h-k) \rangle + \\ + i\langle M(h+ik), (h+ik) \rangle - i\langle M(h-ik), (h-ik) \rangle ,$$

il suffit donc pour démontrer le Théorème 3 d'établir le Lemme 3 que nous énonçons ci-dessous. $\blacksquare$

LEMME 3. *Si une suite H_n vérifie*:

$$\begin{cases} H_n \text{ borné dans } Z(\boldsymbol{R}^N) , \\ H_n \text{ à support dans un compact fixe } \omega , \\ H_n \rightharpoonup H \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m \text{ faible} , \end{cases} \tag{3.9}$$

alors on a

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} \langle MH_n, H_n \rangle \, dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle MH, H \rangle \, dx . \tag{3.10}$$ $\blacksquare$

REMARQUE 3.3. Avant de démontrer le Lemme 3, énonçons deux résultats (cf. L. Sarason [1]).

On montre facilement que si $f \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$

$$(3.11)\qquad \begin{cases} f \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \iff \hat{f}(\xi) \in \operatorname{Ker} A(\xi) & \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N . \\ f \in (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp \iff \hat{f}(\xi) \in (\operatorname{Ker} A(\xi))^\perp & \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N . \end{cases}$$

D'autre part, il existe $c > 0$ tel que:

$$(3.12)\qquad \begin{cases} \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N , \quad |\xi|_{\boldsymbol{R}^N} = 1 , \quad \forall L \in (\operatorname{Ker} A(\xi))^\perp , \quad |L|_{\boldsymbol{C}^m} = 1 , \\ |A(\xi) L|_{\boldsymbol{C}^m} \geqslant c . \end{cases}$$

En effet si (3.12) n'était pas vérifié, il existerait deux suites ξ_n et L_n telles que:

$$\begin{cases} |\xi_n|_{\boldsymbol{R}^N} = 1 , \quad |L_n|_{\boldsymbol{C}^m} = 1 , \quad L_n \in (\operatorname{Ker} A(\xi_n))^\perp , \\ A(\xi_n) L_n \to 0 , \end{cases}$$

d'où l'on déduit qu'il existerait ξ_0 et L_0 tels que:

$$|\xi_0| = 1 , \quad |L_0| = 1 , \quad L_0 \in (\operatorname{Ker} A(\xi_0))^\perp , \quad A(\xi_0) L_0 = 0 ,$$

ce qui est contradictoire. [Pour passer à la limite dans $L_n \in (\operatorname{Ker} A(\xi_n))^\perp$, on utilise de façon essentielle l'hypothèse que $A(\xi)$ est de rang constant, ce qui implique la continuité de l'application

$$\xi \to \text{Projection sur } \operatorname{Ker} A(\xi)] . \qquad \blacksquare$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Soient K_n et K (resp. L_n et L) les projections dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ de H_n et H sur Ker $\mathcal{A}$ (resp. $(\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$). Les suites K_n et L_n sont bornées dans $Z(\boldsymbol{R}^N)$. Désignons par $\hat{H}_n$, $\hat{K}_n$, $\hat{L}_n$ et $\hat{H}$, $\hat{K}$, $\hat{L}$ les transformées de Fourier de H_n, K_n, L_n et H, K, L.

En raison de l'hypothèse (3.5) et de (3.11), on a:

$$(3.13)\qquad \begin{cases} \langle M \hat{K}_n(\xi), \hat{K}_n(\xi) \rangle = 0 \\ \langle M \hat{K}(\xi), \hat{K}(\xi) \rangle = 0 \end{cases} \qquad \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N .$$

D'autre part on déduit de (3.11) et de (3.12) (par homogénéité en L et ξ) que:

$$\begin{cases} c|\xi| \, |\hat{L}_n(\xi)| \leqslant |A(\xi) \hat{L}_n(\xi)| \\ c|\xi| \, |\hat{L}(\xi)| \leqslant |A(\xi) \hat{L}(\xi)| \end{cases} \qquad \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N .$$

On a donc:

$$\text{(3.14)} \qquad \begin{cases} |\xi|\hat{L}_n \text{ borné dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m, \\ |\xi|\hat{L} \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m. \end{cases}$$

Les fonctions H_n étant à support dans un compact fixe ω, leurs transformées de Fourier $\hat{H}_n$ vérifient:

$$\|\hat{H}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^m} \leqslant \|H_n\|_{(L^1(\boldsymbol{R}^N))^m} \leqslant C_\omega \|H_n\|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m} \leqslant C,$$

et pour tout $\xi \in \boldsymbol{R}^N$,

$$\hat{H}_n(\xi) = \int_\omega H_n(x) \exp\left(-2i\pi\langle x, \xi\rangle\right) dx$$

converge vers

$$\int_\omega H(x) \exp\left(-2i\pi\langle x, \xi\rangle\right) dx = \hat{H}(\xi).$$

Puisque d'après (3.11) $\hat{K}_n(\xi)$ et $\hat{L}_n(\xi)$ sont, p.p. en $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, les projections de $\hat{H}_n(\xi)$ sur $\operatorname{Ker} A(\xi)$ et $(\operatorname{Ker} A(\xi))^\perp$, on en déduit que:

$$\begin{cases} \|\hat{K}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^m} \leqslant C, & \|\hat{L}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^m} \leqslant C, \\ \hat{K}_n(\xi) \to K(\xi) & \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N, \\ \hat{L}_n(\xi) \to L(\xi) & \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N. \end{cases}$$

Le théorème de Lebesgue montre alors que:

$$\begin{cases} \langle M\hat{L}_n, \hat{K}_n\rangle \to \langle M\hat{L}, \hat{K}\rangle & \text{dans } L^1(B) \text{ fort}, \\ \langle M\hat{K}_n, \hat{L}_n\rangle \to \langle M\hat{K}, \hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(B) \text{ fort}, \\ \langle M\hat{L}_n, \hat{L}_n\rangle \to \langle M\hat{L}, \hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(B) \text{ fort}, \end{cases}$$

quel que soit B borné, ce qui joint à (3.14) et au fait que $\hat{K}_n$ et $\hat{L}_n$ sont bornées dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ implique que:

$$\text{(3.15)} \qquad \begin{cases} \langle M\hat{L}_n, \hat{K}_n\rangle \to \langle M\hat{L}, \hat{K}\rangle & \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort}, \\ \langle M\hat{K}_n, \hat{L}_n\rangle \to \langle M\hat{K}, \hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort}, \\ \langle M\hat{L}_n, \hat{L}_n\rangle \to \langle M\hat{L}, \hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort}. \end{cases}$$

La formule de Plancherel-Parseval:

$$\int_{R^N} \langle MH_n, H_n\rangle\, dx = \int_{R^N} \langle M\hat{H}_n, \hat{H}_n\rangle\, d\xi =$$
$$= \int_{R^N} \langle M\hat{K}_n, \hat{K}_n\rangle\, d\xi + \int_{R^N} \langle M\hat{L}_n, \hat{K}_n\rangle\, d\xi + \int_{R^N} \langle M\hat{K}_n, \hat{L}_n\rangle\, d\xi + \int_{R^N} \langle M\hat{L}_n, \hat{L}_n\rangle\, d\xi$$

avec (3.13) et (3.15) permet alors d'achever la démonstration du Lemme 3. ∎

4. – Le cas du système de l'élasticité.

Dans ce paragraphe, nous allons donner un résultat analogue au Théorème 1, relatif au système de l'élasticité.

On note $\overline{\overline{m}}$ les tenseurs $(N \times N)$

$$\overline{\overline{m}} = \{m_{ij} | 1 \leqslant i, j \leqslant N\}$$

et « , » le produit scalaire dans R^{N^2}

$$\langle\langle \sigma, \varepsilon \rangle\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} .$$

Etant donnée une distribution $u \in (\mathcal{D}'(R^N))^N$, on désigne par $\overline{\overline{\varepsilon}}(u)$ le tenseur (des déformations)

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(u) = \left\{\varepsilon_{ij}(u) | \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad 1 \leqslant i\,,\ j \leqslant N\right\}.$$

THÉORÈME 4. *Soient X et Y les espaces*:

$$(4.1) \quad \begin{cases} X = \left\{\overline{\overline{\sigma}} | \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ \overline{\overline{\sigma}} \in (L^2(R^N))^N,\ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \in L^2(R^N),\ 1 \leqslant i \leqslant N\right\}, \\ Y = \left\{\overline{\overline{\varepsilon}} | \exists u \in (L^2(R^N))^N,\ \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}(u),\ \overline{\overline{\varepsilon}} \in (L^2(R^N))^{N^2}\right\}, \end{cases}$$

que l'on munit des normes:

$$\begin{cases} \|\overline{\overline{\sigma}}\|_X = \left[\|\sigma\|^2_{(L^2(R^N))^{N^2}} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(R^N)}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \|\overline{\overline{\varepsilon}}\|_Y = \|\overline{\overline{\varepsilon}}\|_{(L^2(R^N))^{N^2}} . \end{cases}$$

Si deux suites $\overline{\overline{\sigma}}^n$ *et* $\overline{\overline{\varepsilon}}^n$ *vérifient*:

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \overline{\overline{\sigma}}^n \text{ borné dans } X;\ \overline{\overline{\sigma}}^n \rightharpoonup \sigma \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^{N^2} \text{ faible}, \\ \overline{\overline{\varepsilon}}^n \text{ borné dans } Y;\ \overline{\overline{\varepsilon}}^n \rightharpoonup \varepsilon \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^{N^2} \text{ faible}, \end{cases}$$

alors on a

$$(4.3)\qquad \langle\!\langle\, \overline{\overline{\sigma}}^n, \overline{\overline{\varepsilon}}^n \,\rangle\!\rangle \rightharpoonup \langle\!\langle\, \overline{\overline{\sigma}}, \overline{\overline{\varepsilon}} \,\rangle\!\rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N). \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 4. Remarquons que l'espace Y n'est pas localisable au sens suivant: si $\overline{\overline{\varepsilon}} \in Y$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$, $\varphi\overline{\overline{\varepsilon}}$ n'appartient pas nécessairement à Y. D'autre part, on montre facilement que Y n'est pas le noyau d'un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients constants.

Nous allons donner une démonstration du Théorème 4 analogue à la démonstration utilisée au Théorème 2. Elle repose sur une intégration par parties et sur des conséquences de l'inégalité de Korn.

Rappelons brièvement celles-ci (pour les démonstrations on pourra par exemple consulter G. Duvaut et J. L. Lions [1], Chap. 3).

Si $\overline{\overline{\varepsilon}} \in Y$, il existe un unique $u \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N$ tel que $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}(u)$; de plus $u \in (H^1(\boldsymbol{R}^N))^N$.

Etant donnée ω une boule de $\boldsymbol{R}^N$, on désigne par $\mathcal{R}_\omega$ l'ensemble des déplacements rigides sur ω:

$$\mathcal{R}_\omega = \{u | u(x) = Ax + b,\ \forall x \in \omega \text{ où } A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^N, \boldsymbol{R}^N),\ A + {}^tA = 0,\ b \in \boldsymbol{R}^N\},$$

et par P_ω la projection dans $(L^2(\omega))^N$ sur $\mathcal{R}_\omega$.

Alors si $\overline{\overline{\varepsilon}} \in Y$, $\overline{\overline{\varepsilon}}(u - P_\omega u) = \overline{\overline{\varepsilon}}(u)$ dans ω et

$$(4.4)\qquad \|u - P_\omega u\|_{(H^1(\omega))^N} \leqslant C \|\overline{\overline{\varepsilon}}\|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}}$$

où C est une constante donnée (inégalité de Korn). $\blacksquare$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$ une fonction test et soit ω une boule telle que support $\varphi \subset \omega$. Alors:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} \langle\!\langle\, \overline{\overline{\sigma}}^n, \overline{\overline{\varepsilon}}^n \,\rangle\!\rangle \varphi\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle\!\langle\, \overline{\overline{\sigma}}^n, \overline{\overline{\varepsilon}}^n(u^n) \,\rangle\!\rangle \varphi\, dx = \int_\omega \langle\!\langle\, \overline{\overline{\sigma}}^n, \overline{\overline{\varepsilon}}(u^n - P_\omega u^n) \,\rangle\!\rangle \varphi\, dx =$$

$$= \int_\omega \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}(u^n - P_\omega u^n)_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(u^n - P_\omega u^n)_j \right\} \varphi\, dx.$$

En intégrant par parties, il vient:

$$
(4.5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{R^N} \langle\!\langle\, \bar{\bar{\sigma}}^n, \bar{\bar{\varepsilon}}^n \,\rangle\!\rangle \varphi \, dx = \\
&\quad = -\int_\omega \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}^n \left\{ (u^n - P_\omega u^n)_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + (u^n - P_\omega u^n)_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\} dx - \\
&\qquad - \int_\omega \frac{1}{2} \varphi \left\{ \sum_{i=1}^N (u^n - P_\omega u^n)_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N (u^n - P_\omega u^n)_j \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_i} \right\} dx \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Les tenseurs $\bar{\bar{\sigma}}^n$ sont symétriques, bornés dans X, et convergent faiblement vers $\bar{\bar{\sigma}}$; on a donc:

$$
(4.6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sigma_{ij}^n \rightharpoonup \sigma_{ij} && \text{dans } L^2(\boldsymbol{R}^N) \text{ faible}\,, \\
&\sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_j} \rightharpoonup \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} && \text{dans } L^2(\boldsymbol{R}^N) \text{ faible}\,, \\
&\sum_{i=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_{i=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} && \text{dans } L^2(\boldsymbol{R}^N) \text{ faible}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

D'autre part, de (4.4) et du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov, on déduit qu'il existe une sous-suite (notée avec l'indice $p \in \boldsymbol{N}$) et $v \in (H^1(\omega))^N$ tels que:

$$
u^p - P_\omega u^p \to v \qquad \text{dans } (L^2(\omega))^N \text{ fort}\,.
$$

Or

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\bar{\bar{\varepsilon}}(u^p - P_\omega u^p) = \bar{\bar{\varepsilon}}(u^p) = \bar{\bar{\varepsilon}}^p && \text{dans } \omega\,, \\
&P_\omega(u^p - P_\omega u^p) = 0 && \text{dans } \omega\,,
\end{aligned}
\right.
$$

et donc en passant à la limite

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\bar{\bar{\varepsilon}}(v) = \bar{\bar{\varepsilon}} && \text{dans } \omega\,, \\
&P_\omega(v) = 0 && \text{dans } \omega\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme il existe $u \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N$, unique, tel que $\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}(u)$, on a donc

$$
v = u - P_\omega u \qquad \text{dans } \omega\,.
$$

L'unicité de la limite montre que la suite toute entière converge, c'est-à-dire que

$$u^n - P_\omega u^n \to u - P_\omega u \qquad \text{dans } (L^2(\omega))^N \text{ fort}. \tag{4.7}$$

Grâce à (4.6) et à (4.7), on peut passer à la limite dans le deuxième membre de (4.5), et une intégration par parties permet d'achever la démonstration du Théorème 4. ∎

Ajouté lors de la correction des épreuves.

Depuis l'envoi de cet article, nous avons amélioré et généralisé plusieurs résultats en collaboration avec Luc Tartar. En particulier, le théorème 3 reste vrai si l'on ne fait pas l'hypothèse (3.6) de rang constant. Ces résultats ont été exposés par Luc Tartar lors de conférences données en mars 1977 au Collège de France dans le cadre des cours de la Fondation Peccot. Ils feront l'objet d'une prochaine publication.

BIBLIOGRAPHIE

A. Bensoussan - J. L. Lions - G. Papanicolaou:

[1] – *Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **281** (1975), pp. 89-94.

– *Sur quelques phénomènes asymptotiques d'évolution*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **281** (1975), pp. 317-322.

– *Sur de nouveaux problèmes asymptotiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **282** (1976), pp. 143-147.

– *Homogénéisation, correcteurs et problèmes non linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, **282** (1976), pp. 1277-1282.

[2] *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

E. De Giorgi - S. Spagnolo:

[1] *Sulla convergenza degli integrali della energia per operatori ellittici del secondo ordine*, Boll. U.M.I., **8** (1973), pp. 391-411.

G. Duvaut - J. L. Lions:

[1] *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

L. Sarason:

[1] *Remarks on an inequality of Schulenberger and Wilcox*, Ann. Mat. pura appl., **92** (1972), pp. 23-28.

J. R. Schulenberger - C. H. Wilcox:

[1] *Coerciveness inequalities for non elliptic systems of partial differential equations*, Ann. Mat. pura appl., **88** (1971), pp. 229-306.

[2] *A coerciveness inequality for a class of non elliptic operators of constant deficit*, Ann. Mat. pura appl., **92** (1972), pp. 77-84.

L. Schwartz:

[1] *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

L. Tartar:

[1] *Convergence d'opérateurs. Oeuvres complètes* (à paraître).