ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIULIO MATTEI

Superfici di discontinuità in fisica dei plasmi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26, n^o 2 (1972), p. 437-461

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_2_437_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUPERFICI DI DISCONTINUITÀ IN FISICA DEI PLASMI (*)

GIULIO MATTEI (**)

RIASSUNTO - In questo lavoro si studiano le superfici di discontinuità nel caso non stazionario e nell'ambito delle equazioni non lineari: (*a*) in un plasma descritto nello schema del continuo dalle equazioni magnetofluidodinamiche, (*b*) in un plasma anisotropo privo di urti.

Nella Parte I vengono analizzate in dettaglio, traendone varie conclusioni, le « superfici di discontinuità debole » nel caso in cui sono fronti d'onda e in quello in cui sono superfici materiali.

Nella Parte II, studiando le « superfici di discontinuità forte », si introduce per i plasmi in questione la nozione di « soluzione debole » che, in particolare, si rivela utile per la determinazione delle condizioni di compatibilità dinamica.

SUMMARY - In this paper we study, within the framework of the non linear and non steady equations, the surfaces of discontinuity in: (i) a plasma considered as a continuous medium in the Magneto-fluid-dynamic description, (ii) a collisionless anisotropic plasma.

In Part I we give a detailed account of the « surfaces of weak discontinuity » whether they are wave fronts or material surfaces.

In Part II the definition of « weak solution » is introduced for the aforesaid plasmas. This definition is useful for the derivation of dynamical compatibility conditions appropriate to « surfaces of strong discontinuity ».

1. Introduzione.

Lo scopo di questa ricerca è stato lo studio delle superfici di discontinuità in Fisica dei plasmi nel caso non stazionario e nell'ambito delle equazioni non lineari.

Pervenuto alla Redazione il 10 Aprile 1971.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le applicazioni della Matematica alla Fisica ed all'Ingegneria.

(**) Istituto di Meccanica Razionale del Politecnico di Torino (Corso Duca degli Abruzzi 24).

Si esaminano due tipi di plasma: quello descritto nello schema del continuo dalle equazioni magnetofluidodinamiche (MFD) in assenza di dissipazione (in particolare nel caso barotropico) e quello anisotropo privo di urti descritto dalle equazioni di CHEW, GOLDBERGER e LOW (CGL).

Nei n.i 2 e 3 si richiamano, con qualche commento, le equazioni descriventi i due suddetti tipi di plasma.

Nel n.o 4, in analogia con denominazioni usate in altri campi della Fisica Matematica, si introducono per i plasmi in questione le nozioni di « superfici di discontinuità debole » e di « superfici di discontinuità forte », le prime quali superfici di discontinuità di ordine $m \geq 1$, le seconde di ordine zero, essendo del primo ordine il sistema di equazioni differenziali descriventi il plasma sia MFD che CGL. Una superficie di discontinuità di ordine generico viene poi detta « fronte d'onda » se ha velocità di propagazione non nulla, « superficie materiale » nel caso contrario.

Nei n.i 5-9 (Parte I) si esaminano le superfici di discontinuità debole, nei n.i 10-13 (Parte II) quelle di discontinuità forte.

Dopo aver richiamato risultati relativi alle superfici di discontinuità debole di ordine 1 nel caso MFD (n.o 5) e CGL (n.o 6), si osserva che, sia per il plasma MFD ideale (barotropico o non) che per quello CGL, le superfici di discontinuità debole (non materiali) di ordine generico: 1) hanno la stessa velocità di propagazione delle superfici di discontinuità debole di ordine uno; 2) sono caratteristiche per il problema di Cauchy nell'ambito delle soluzioni analitiche.

Nel n.o 7 si effettua la determinazione dei parametri di discontinuità.

Nel n.o 8 si studiano in dettaglio le superfici materiali di discontinuità giungendo a varie conclusioni.

Altre deduzioni tratte dalle condizioni di compatibilità dinamica vengono date al n.o 9.

Passando allo studio delle superfici di discontinuità forte, nel n.o 10 le equazioni MFD vengono espresse, con qualche commento, in opportuna forma di leggi di conservazione.

Nel n.o 11 viene conseguentemente introdotta e giustificata la nozione, relativa a funzioni discontinue, di « soluzioni MFD deboli » che soddisfano le equazioni MFD solo in un senso generalizzato. Tale nozione appare particolarmente adatta per ricavare le condizioni di compatibilità dinamica relative a superfici di discontinuità forte, condizioni che vengono esplicitamente ricavate nel caso MFD al n.o 12 e indicate per il caso CGL al n.o 13.

2. Plasma descritto nello schema del continuo dalle equazioni magneto-fluidodinamiche.

Consideriamo un plasma comprimibile di elevata densità, a bassa temperatura, in cui siano molto frequenti gli urti fra gli ioni e le particelle neutre. In tali condizioni (cfr. N. G. VAN KAMPEN, B. U. FELDERHOF [1] pag. 5) il plasma viene trattato come un fluido singolo elettroconduttore ed adeguatamente descritto dal ben noto sistema di equazioni magnetofluidodinamiche nello schema del continuo, che, in assenza di fenomeni dissipativi, assume la forma

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \nabla p + \frac{1}{4\pi\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.2}'$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \, \mathbf{v}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \tag{2.4}$$

$$p = p(\varrho, S). \tag{2.5}$$

Nelle (2.1)-(2.5) S indica l'entropia specifica e gli altri simboli hanno il significato abituale. La (2.2)′ ha il carattere di una condizione iniziale nel senso che, come si deduce da (2.2), essa è soddisfatta in ogni istante se lo è inizialmente. La (2.4) è la forma che assume nel caso non dissipativo l'equazione del trasporto del calore (cfr. L. LANDAU, E. LIFCHITZ [2] n. 51 Eq. (51.6)) (1).

Nel seguito chiameremo *plasma* MFD *ideale* un plasma descritto dalle equazioni (2.1)-(2.5) (ideale sta qui per non dissipativo).

Un plasma che sia completamente descritto dalle equazioni (2.1), (2.2), (2.2)′, (2.3) e dalla

$$p = p(\varrho) \tag{2.6}$$

---

(1) Per quanto riguarda questa equazione nel caso dei fluidi non conduttori si veda anche C. TRUESDELL [3] n. 6 e J. SERRIN [4] n. 34 e 63 dove essa è riferita come equazione dell'energia.

sarà, in anologia con la denominazione della Meccanica dei fluidi, chiamato *plasma* MFD *ideale barotropico* [2].

Per il plasma MFD ideale nel caso non barotropico il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali è costituito da otto equazioni scalari (la (2.3), la (2.4) e le sei provenienti da (2.1) e (2.2)) in otto funzioni incognite scalari (ϱ, S, le tre componenti di $\mathbf{v}$ e le tre componenti di $\mathbf{B}$; p è data da (2.5) una volta note ϱ e S); nel caso barotropico da sette equazioni differenziali scalari in sette funzioni incognite scalari. In ogni caso quindi si tratta di un sistema determinato che, inoltre, è del primo ordine e quasi lineare.

3. Plasma anisotropo privo di urti.

Il sistema di equazioni di tipo idromagnetico con pressione anisotropa stabilito, partendo dall'equazione di Vlasov, da G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER e F. LOW [5] per un plasma privo di urti sottoposto a un intenso campo magnetico è il seguente

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{4\pi\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.2'}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \, \mathbf{v}) = 0 \tag{3.3}$$

unitamente ai due invarianti adiabatici

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\text{II}} B^2}{\varrho^3}\right) = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{\varrho B}\right) = 0. \tag{3.5}$$

---

[2] La (2.6) può sorgere da circostanze speciali nel moto: per esempio se il plasma MFD ideale è in moto isentropico (entropia costante ovunque nel campo del moto), la (2.4) è identicamente soddisfatta e la (2.5) si riduce alla (2.6); oppure può ritenersi una caratteristica inerente a un dato tipo di plasma MFD. In questo ultimo caso, ancora in analogia con la nomenclatura della Meccanica dei fluidi (cfr. J. SERRIN [4] p. 150), si potrà chiamare *piezotropico* il plasma ideale MFD.

In esse $\mathbf{P}$ è il tensore delle pressioni avente la forma

$$\mathbf{P} = p_\perp \mathbf{I} + (p_\parallel - p_\perp)\, \hat{\mathbf{B}} \otimes \hat{\mathbf{B}}, \tag{3.6}$$

dove $\mathbf{I}$ è il tensore fondamentale, $\hat{\mathbf{B}}$ il versore del vettore induzione magnetica $\mathbf{B}$, gli scalari $p_\parallel$ e $p_\perp$ sono rispettivamente la pressione parallelamente e ortogonalmente a $\mathbf{B}$ e gli altri simboli hanno il significato abituale ($\otimes$ è simbolo di prodotto tensoriale).

Il sistema (3.1)(3.5) è costituito da nove equazioni differenziali alle derivate parziali nelle nove funzioni incognite scalari: $\varrho, p_\parallel, p_\perp$, le tre componenti di $\mathbf{v}$ e le tre componenti di $\mathbf{B}$. Esso è quindi un sistema determinato. Inoltre è del primo ordine e quasi lineare.

Nel seguito il plasma descritto dalle (3.1)-(3.6) sarà riferito quale plasma CGL.

Per una ampia Bibliografia su detto plasma si rimanda a [6].

4. Superfici di discontinuità e onde.

Sia $S(O; x_1\, x_2\, x_3)$ un sistema di riferimento inerziale cartesiano ortogonale a cui sono riferite le equazioni descriventi il plasma e $\Sigma = \Sigma(t)$ una superficie regolare mobile nella regione occupata dal plasma. Indichiamo con $\mathbf{n}$ il versore normale, in un dato istante, a Σ e con a la velocità di avanzamento di Σ (velocità, riferita a S, con cui Σ avanza, in ogni punto, nella direzione di $\mathbf{n}$).

Rappresentando Σ localmente con un'equazione della forma

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \tag{4.1}$$

dove la funzione Φ è di classe C^2, sussistono le ben note formule

$$a = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}}{|\nabla \Phi|}, \tag{4.2}$$

$$n_i = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}}{|\nabla \Phi|} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4.3}$$

Indicata con $f(x_1, x_2, x_3, t)$ la generica delle funzioni scalari (per es. una componente di $\mathbf{B}$) che compaiono nel sistema di equazioni differenziali descriventi il plasma e con m un intero ≥ 1, diremo che Σ è una *superficie di discontinuità di ordine m per f* se attraverso Σ è discontinua con discontinuità di prima specie almeno una derivata di f di ordine m e continue la f con tutte le sue derivate di ordine inferiore a m (si suppone che da entrambi i lati di Σ f sia di classe C^m).

Σ sarà detta *superficie di discontinuità di ordine zero* per f se attraverso essa f è discontinua (si suppone che da entrambi i lati di Σ f sia di classe C^1).

Nel seguito il salto attraverso Σ di una generica quantità sarà indicato col simbolo di detta quantità racchiuso fra parentisi quadre.

Poiché il sistema di equazioni difierenziali descriventi il plasma sia MFD che CGL è del primo ordine, adottando una denominazione ricorrente in altri campi della Fisica Matematica (cfr. W. PRAGER [7], P. CHADWICK, B. POWDRILL [8]), definiamo *superfici di discontinuità debole* quelle di ordine $m \geq 1$, *superfici di discontinuità forte* quelle di ordine zero.

Se Σ è per f una superficie di discontinuità debole di ordine 1, sussistono le ben note *condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche per le discontinuità*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = \lambda_f n_i, \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = -a\,\lambda_f, \tag{4.4}$$

dove λ_f è il parametro di discontinuità relativo ad f ed è dato dalla

$$\lambda_f = \left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]. \tag{4.5}$$

Dalle (4.4) si deduce per la discontinuità della derivata molecolare di f la

$$\left[\frac{df}{dt}\right] = -\lambda_f u, \tag{4.6}$$

dove

$$u = a - \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \tag{4.7}$$

è la velocità di propagazione di Σ (velocità di avanzamento di Σ relativa alle particelle istantaneamente situate su Σ stessa, cfr. J. SERRIN [4] p. 213).

Seguendo C. TRUESDELL, R. TOUPIN ([9] Sect. 183) definiamo *fronti d'onda* le superfici di discontinuità di ordine generico per le quali sia $u \neq 0$.

Una superficie di discontinuità Σ per la quale sia $u = 0$ si dirà invece *superficie materiale di discontinuità*. Tale denominazione è tratta dalla Meccanica dei sistemi continui dove essa è giustificata dal fatto che se è $u = 0$, Σ è costituita sempre dalle stesse particelle; infatti, avendosi per (4.2), (4.3) e (4.7)

$$\frac{d\Phi}{dt} = -u\,|\nabla\,\Phi|,$$

è ora $\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$ il che assicura (cfr. J. SERRIN [4] Sect. 8) quanto detto.

Per una superficie di discontinuità debole di ordine m le (4.4) si generalizzano nella

$$\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_i\, \partial x_j \dots \partial x_l\, \partial t^{m-s}}\right] = (-a)^{m-s}\, \lambda_f^{(m)}\, n_i\, n_j \dots n_l \qquad (0 \leq s \leq m) \tag{4.8}$$

dove l'insieme di indici $\{i, j \dots l\}$ ha s elementi e $\lambda_f^{(m)}$ è dato dalla

$$\lambda_f^{(m)} = \left[\frac{\partial^m f}{\partial n^m}\right]. \tag{4.9}$$

PARTE I

SUPERFICI DI DISCONTINUITÀ DEBOLE

Escludiamo per il momento le superfici materiali di discontinuità che saranno studiate separatamente al n. 8.

Nell'ipotesi quindi di $u \neq 0$ cominciamo a considerare le:

5. Superfici di discontinuità debole di ordine 1 nel plasma MFD ideale.

Essendo $u \neq 0$ queste superfici sono fronti d'onda del primo ordine. Lo studio di essi in MFD è stato fatto da diversi Autori ed ha dato origine a numerosi lavori in breve distanza di tempo. Per una bibliografia al riguardo cfr. [10]. (Nel caso stazionario le superfici di discontinuità in MFD sono state studiate da L. G. NAPOLITANO in [11]).

Applicando le (4.4) si ricavano le condizioni di compatibilità dinamica relative al sistema (2.1)-(2.5) che possiamo scrivere nella forma seguente [3] [4]

$$\varrho\, u\, \boldsymbol{\lambda}_v + \frac{1}{4\pi\, \mu}\, (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}_B) \times \mathbf{B} - \lambda_p\, \mathbf{n} = 0 \tag{5.1}$$

---

[3] Dalla (2.2)′ si deduce che in ogni caso il vettore caratterizzante le discontinuità dell'induzione magnetica è tangente al fronte d'onda: $\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \mathbf{n} = 0$ (discontinuità trasversali) il che peraltro, nell'ipotesi $u \neq 0$, discende anche dalla (5.2)

[4] Un generico vettore $\mathbf{W}$ viene espresso, quando ciò sia utile, come somma della sua parte normale $\mathbf{W}_n$ e dalla sua parte tangenziale $\mathbf{W}_t$ a Σ.

$$u\,\boldsymbol{\lambda}_B + B_n\,\boldsymbol{\lambda}_v - \lambda_{vn}\,\mathbf{B} = 0 \tag{5.2}$$

$$u\,\lambda_\varrho - \varrho\,\lambda_{vn} = 0 \tag{5.3}$$

$$u\,\lambda_S = 0 \tag{5.4}$$

$$\lambda_p = c_S^2\,\lambda_\varrho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\varrho \lambda_S\,. \tag{5.5}$$

Nelle (5.1)-(5.5) $\boldsymbol{\lambda}_v$, $\boldsymbol{\lambda}_B$, λ_p, λ_ϱ e λ_S sono i parametri caratterizzanti le discontinuità delle derivate prime nell'ordine di $\mathbf{v}, \mathbf{B}, p, \varrho, S$; c_S indica la velocità locale del suono. Per (4.5) sussiste la

$$\boldsymbol{\lambda}_v = \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}\right] \tag{5.6}$$

e analoghe.

Dalla (5.4), essendo, come abbiamo supposto, $u \neq 0$, si trae $\lambda_S = 0$; per conseguenza possiamo affermare che, per quanto riguarda le superfici di discontinuità debole non materiali, il comportamento del plasma MFD ideale non barotropico è lo stesso di quello barotropico.

Dalle (5.1)-(5.5) con $u \neq 0$ si possono poi eliminare $\boldsymbol{\lambda}_B$, λ_ϱ e λ_p ottenendo la seguente equazione in $\boldsymbol{\lambda}_v$:

$$(u^2 - A_n^2)\,\boldsymbol{\lambda}_v + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\lambda}_v)\frac{\mathbf{B}_n}{4\pi\,\mu\,\varrho} + \lambda_{vn}\left\{\frac{B_n}{4\pi\,\mu\varrho}\,\mathbf{B} - (A^2 + c_S^2)\,\mathbf{n}\right\} = 0 \tag{5.7}$$

dove

$$A = \sqrt{\frac{B^2}{4\pi\,\mu\,\varrho}} \tag{5.8}$$

indica la velocità di Alfvén e

$$A_n = \sqrt{\frac{B_n^2}{4\pi\,\mu\,\varrho}} \tag{5.8'}$$

la velocità di Alfvén relativa alla direzione individuata da $\mathbf{n}$. Dalla (5.7) si ricavano i valori possibili per la velocità di propagazione che risultano forniti dalla

$$(u^2 - A_n^2)\,\{(u^2 - c_S^2)\,(u^2 - A_n^2) - u^2\,(A^2 - A_n^2)\} = 0. \tag{5.9}$$

La (5 9) caratterizza i tre ben noti fronti d'onda MFD: quello di Alfvén puro e i due noti nella letteratura anglosassone come fronti d'onda

« slow » e « fast » (in quanto uno ha velocità di propagazione $\leq$ e l'altro $\geq$ di quella di Alfvén), e che anche qui nel seguito saranno riferiti come fronte d'onda « lento » e « rapido » ; indicate con u_s e u_f le velocità di propagazione di questi ultimi, da (5.9) si ricava

$$u^2_{s,f} = \frac{1}{2}\left\{(c_S^2 + A^2) \mp \sqrt{(c_S^2 + A^2)^2 - 4\, c_S^2\, A_n^2}\right\}. \tag{5.10}$$

Per le proprietà di tali fronti d'onda si rimanda ai lavori citati in [10].

6. Superfici di discontinuità debole di ordine 1 nel plasma CGL.

Con riferimento alle equazioni non lineari del n. 3 e considerando tutte le funzioni incognite dipendenti da tutte e tre le variabili spaziali e dal tempo, senza quindi introdurre approssimazioni né limitazioni, i fronti d'onda CGL del primo ordine sono stati studiati in [10] col metodo delle varietà caratteristiche (si veda anche Y. KATO, T. TAJIRI, T. TANIUTI [12] e B. ABRAHAM-SHRAUNER [13], dove però si considerano onde di piccola ampiezza e piane (tutte le funzioni incognite sono supposte dipendenti da una sola variabile spaziale e dal tempo)) (5).

Le condizioni di compatibilità dinamica relative al sistema (3.1)-(3.5) risultano (cfr. [10] n. 3)

$$\varrho\, u\, \boldsymbol{\lambda}_v + \frac{1}{4\pi\,\mu}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}_B) \times \mathbf{B} - \lambda_\perp \mathbf{n} + \frac{p_\perp - p_{II}}{B}\widehat{B}_n \{\boldsymbol{\lambda}_B - 2\,(\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \widehat{\mathbf{B}})\,\widehat{\mathbf{B}}\} + \tag{6.1}$$

$$+ (\lambda_\perp - \lambda_{II})\,\widehat{B}_n\,\widehat{\mathbf{B}} = 0$$

$$u\,\boldsymbol{\lambda}_B + B_n\,\boldsymbol{\lambda}_v - \lambda_{vn}\,\mathbf{B} = 0 \tag{6.2}$$

$$u\,\lambda_\varrho - \varrho\,\lambda_{vn} = 0 \tag{6.3}$$

$$\left(2\,p_{II}\,\widehat{\mathbf{B}}\cdot\boldsymbol{\lambda}_B + \lambda_{II}\,B - \frac{3\,p_{II}}{\varrho}\,B\,\lambda_\varrho\right) u = 0 \tag{6.4}$$

$$\left(\lambda_\perp - \frac{p_\perp}{\varrho}\,\lambda_\varrho - \frac{p_\perp}{B}\,\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \widehat{\mathbf{B}}\right) u = 0. \tag{6.5}$$

---

(5) Nell'ambito del modello macroscopico cosiddetto del « guiding center fluid », estensivamente elaborato da H. GRAD in [14] e [15] per i plasmi anisotropi, del metodo delle caratteristiche viene fatto opportuno uso in [14] n. 5 e [15] n. 6 per stabilire i criteri matematici locali di problema « ben posto » relativo al sistema di equazioni differenziali descriventi il plasma (cfr. al riguardo anche Y. M. LYNN [16]).

Nelle (6.1)-(6.5) λ_v, λ_B, λ_ϱ, λ_{II} e λ_{I} sono i parametri di discontinuità caratterizzanti le discontinuità delle derivate prime nell'ordine di $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$, ϱ, p_{II} e p_{I} (per la (3.2)′ cfr. nota [3]).

Nell'ipotesi $u \neq 0$, eliminando nelle (6.1)-(6.5) λ_B, λ_ϱ, λ_{II} e λ_{I} si ottiene la seguente equazione in λ_v

$$\xi\,\lambda_v + (\mathbf{B}\cdot\lambda_v)\,\mathbf{c} + \lambda_{vn}\,\mathbf{d} = 0 \tag{6.6}$$

dove

$$\xi = u^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\,\mu\varrho} + \frac{p_{\text{II}} - p_{\text{I}}}{B^2\,\varrho}\,B_n^2 \tag{6.7}$$

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{4\pi\,\mu\varrho} + \frac{p_{\text{I}}}{B^2\,\varrho}\right)\mathbf{B}_n - \frac{B_n^2}{B^4\,\varrho}\,(4\,p_{\text{II}} - p_{\text{I}})\,\mathbf{B} \tag{6.8}$$

$$\mathbf{d} = -\left(\frac{B^2}{4\pi\,\mu\varrho} + \frac{2\,p_{\text{I}}}{\varrho}\right)\mathbf{n} + \frac{B_n}{\varrho}\left(\frac{1}{4\pi\,\mu} + \frac{p_{\text{I}}}{B^2}\right)\mathbf{B}. \tag{6.9}$$

L'equazione che fornisce i possibili valori per u si ottiene uguagliando a zero il determinante dei coefficienti delle componenti λ_{v1}, λ_{v2}, λ_{v3} di λ_v nel sistema lineare omogeneo delle tre equazioni scalari corrispondenti alla (6.6). Essa risulta (cfr. [10] (4.5))

$$\xi\,\{\xi^2 + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{d})\,\xi + (\mathbf{B}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\} = 0.$$

Quest'ultima si spezza nelle due equazioni (cfr. [10] n. 5)

$$u^2 - \frac{B_n^2}{B^2\,\varrho}\,(2\,p_m + p_{\text{I}} - p_{\text{II}}) = 0 \tag{6.10}$$

$$u^4 - R\,u^2 + Q = 0, \tag{6.11}$$

dove

$$R = \frac{2\,p_m + p_{\text{I}}}{\varrho} + \frac{p_{\text{I}}\,B_t^2 + 2\,p_{\text{II}}\,B_n^2}{B^2\,\varrho} > 0 \tag{6.12}$$

$$Q = \frac{B_n^2}{B^2\,\varrho^2}\left\{3\,p_{\text{II}}\,(2\,p_m + p_{\text{I}} - p_{\text{II}}) + \frac{B_t^2}{B^2}\,(3\,p_{\text{II}}\,(p_{\text{II}} + p_{\text{I}}) - p_{\text{I}}^2)\right\} \tag{6.13}$$

nelle quali

$$p_m = \frac{B^2}{8\pi\,\mu} \tag{6.14}$$

indica la pressione magnetica.

Risultando $R^2 - 4Q$ sempre positivo le (6.10) e (6.11) indicano che il sistema CGL è totalmente iperbolico solo se sono verificate le due condizioni

$$2\,p_m + p_\perp - p_\parallel > 0 \tag{6.15}$$

$$Q > 0 \tag{6.16}$$

(Per una discussione al proposito e per ulteriori sviluppi cfr. [10] n. 5 e 7 e [6] App. I e II).

Nel dominio di totale iperbolicità del sistema CGL ci sono dunque tre fronti d'onda le cui velocità di propagazione, che indichiamo con u_A, $\tilde{u}_s$ e $\tilde{u}_f$, sono date da

$$\begin{cases} u_A^2 = A_n^2 + \dfrac{p_\perp - p_\parallel}{\varrho}\,\dfrac{B_n^2}{B^2} \\ \tilde{u}^2_{s,f} = \dfrac{R \mp \sqrt{R^2 - 4Q}}{2}\,. \end{cases} \tag{6.17}$$

La $(6.17)_1$ caratterizza il fronte d'onda di Alfvén modificato dalla anisotropia nel tensore delle pressioni; le $(6.17)_{2,3}$ caratterizzano i fronti d'onda CGL « lento » e « rapido » [6]: per le loro proprietà si rimanda a [10], [12] e [13].

OSSERVAZIONE I. *Superfici di discontinuità debole di ordine generico.*

Sia nel caso MFD che in quello CGL, applicando al sistema di equazioni differenziali scalari caratterizzante il plasma l'operatore

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_a \ldots \partial x_c} \qquad (m > 1),$$

dove l'insieme di indici $\{a \ldots c\}$ ha $m - 1$ elementi, e facendo successivamente uso della (4.8), si trova che le condizioni di compatibilità dinamica (e per conseguenza i possibili valori di u) relative alle superfici di discontinuità debole di ordine 1 coincidono con quelle relative alle superfici di discontinuità debole di ordine m generico, dove i parametri di discontinuità $\lambda_v^{(m)}$, $\lambda_B^{(m)}$, ... sono dati dalle (cfr. (4.9))

$$\lambda_v^{(m)} = \left[\frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial\, n^m}\right], \qquad \lambda_B^{(m)} = \left[\frac{\partial^m \mathbf{B}}{\partial\, n^m}\right], \ldots$$

---

[6] È da notare che, pur conservandosi questa terminologia, non sussiste più per il plasma CGL la $\tilde{u}_s^2 \leq u_A^2 \leq \tilde{u}_f^2$.

OSSERVAZIONE II. *Problema di Cauchy e constatazione che le superfici di discontinuità debole MFD e CGL sono caratteristiche.*

Studiando con procedimenti noti il problema di Cauchy nell'ambito delle soluzioni analitiche relativo al sistema di equazioni differenziali descriventi: 1) il plasma MFD ideale, 2) il plasma MFD ideale barotropico, 3) il plasma CGL, si constata che, in tutti e tre i casi, le superfici di discontinuità debole, non materiali, di ordine generico $m\,(m \geq 1)$ sono caratteristiche.

(Per una discussione sul legame fra superfici di discontinuità e caratteristiche indipendentemente dal particolare sistema fisico in esame, cfr. C. TRUESDELL, R. TOUPIN [9] Sect. 194 *A*).

7. Determinazione dei parametri di discontinuità.

Nel caso MFD ideale la determinazione dei parametri di discontinuità λ_v, λ_B etc. trovasi per es. in A. JEFFREY [17] n. 26.

In questo numero consideriamo il plasma CGL riferendoci al caso generale $B_t \neq 0$, $B_n \neq 0$ [7].

Esaminiamo il fronte d'onda di Alfvén modificato dall'anisotropia nel tensore delle pressioni (cfr. $(6.17)_1$). Indicato con γ un parametro adimensionale arbitrario, il sistema lineare omogeneo delle equazioni di compatibilità dinamica (6.1)-(6.5) fornisce la seguente soluzione

$$(7.1)\qquad \begin{cases} \lambda_v = \gamma \dfrac{u_A}{B_n}\, \mathbf{B} \times \mathbf{n} \\ \lambda_B = \gamma\, \mathbf{n} \times \mathbf{B} \\ \lambda_\varrho = 0 \\ \lambda_{\text{II}} = 0 \\ \lambda_{\text{I}} = 0 \end{cases}$$

con u_A dato dalla $(6.17)_1$.

Tenendo poi conto che, in ogni caso, sussiste, come si può facilmente verificare, la

$$(7.2)\qquad [V\, p_m] = \frac{1}{4\pi\,\mu}\, \{B_n\, \lambda_B + \mathbf{B} \times (\mathbf{n} \times \lambda_B)\},$$

---

[7] Nei casi particolari $B_t = 0$ e $B_n = 0$ la determinazione completa dei parametri di discontinuità per il plasma CGL è stata fatta in [10] al n. 6.

facendo uso della $(7.1)_2$ discende che attraverso il fronte d'onda in esame è

$$[V\, p_m] = 0. \tag{7.3}$$

Le (7.1) e (7.3) indicano che attraverso il fronte d'onda CGL di Alfvén sono continue le derivate della densità, della pressione « parallela », della pressione « ortogonale » e della pressione magnetica; inoltre i vettori caratterizzanti le discontinuità nelle derivate della velocità e dell'induzione magnetica **B** sono entrambi trasversali e normali a **B**.

Per quanto riguarda poi i fronti d'onda CGL « lento » e « rapido » i calcoli relativi alla determinazione dei parametri di discontinuità (che qui non si riportano per brevità) indicano che $\lambda_{vn} \neq 0$, $\boldsymbol{\lambda}_{vt} \neq 0$, $\boldsymbol{\lambda}_B \neq 0$, $\lambda_\varrho \neq 0$, $\lambda_{II} \neq 0$ e $\lambda_1 \neq 0$.

Notiamo infine che, essendo

$$[\mathrm{rot}\, \mathbf{v}] = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}_v\,, \tag{7.4}$$

attraverso tutti e tre i fronti CGL sopra visti rot **v** è discontinuo nel caso generale $B_n \neq 0$, $B_t \neq 0$. Nei casi: 1^0 $B_n = 0$, 2^0 $B_t = 0$, si ha, cfr. [10] n. 6, $\boldsymbol{\lambda}_{vt} = 0$ sul fronte d'onda di tipo magnetoacustico ($B_n = 0$) e su quello di tipo acustico ($B_t = 0$). Su questi due fronti d'onda quindi rot **v** è continuo come indica la (7.4).

8. Superfici materiali di discontinuità.

Ci proponiamo di studiare in questo n.o le superfici materiali di discontinuità. Per esse (cfr. n. 4) è

$$u = 0. \tag{8.1}$$

Cominciamo ad esaminare il caso del

(*a*) *Plasma MFD ideale.*

Per (8.1) la (5.4) resta soddisfatta con λ_S arbitraria; la (5.3) implica

$$\lambda_{vn} = 0, \tag{8.2}$$

e la (5.2)

$$B_n\, \boldsymbol{\lambda}_{vt} = 0. \tag{8.3}$$

Si presentano perciò due casi:

1^0 *Caso:* $B_n = 0$.

La (8.3) resta soddisfatta e la (5.1) fornisce

$$\lambda_p = -\frac{\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \mathbf{B}}{4\pi\mu}\,. \tag{8.4}$$

Dalla (8.4), facendo uso della (7.2), discende la

$$[V(p + p_m)] = 0. \tag{8.5}$$

Si conclude perciò che nel caso MFD ideale non barotropico possono esistere delle superfici materiali di discontinuità debole tangenti al vettore induzione magnetica. Su di esse le derivate della entropia presentano discontinuità del tutto arbitrarie e le eventuali discontinuità nelle derivate della velocità hanno necessariamente carattere trasversale; le eventuali discontinuità nelle derivate della pressione e della induzione magnetica devono soddisfare la condizione (8.4) che assicura la continuità del gradiente della pressione totale e le discontinuità nella densità infine sono caratterizzate dalla (5.5).

2^0 *Caso:* $B_n \neq 0$.

Da (8.3) discende $\boldsymbol{\lambda}_{vt} = 0$ e quindi, per (8.2),

$$\boldsymbol{\lambda}_v = 0. \tag{8.6}$$

La (5.1) diventa ora

$$-\frac{1}{4\pi\mu} B_n \boldsymbol{\lambda}_B + \left(\frac{1}{4\pi\mu}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\lambda}_B + \lambda_p\right)\mathbf{n} = 0$$

e quindi, essendo sempre $\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \mathbf{n} = 0$ (cfr. nota (3)), deve essere

$$\boldsymbol{\lambda}_B = 0, \qquad \lambda_p = 0. \tag{8.7}$$

Da (5.5) infine si ha

$$\lambda_\varrho = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\varrho}{c_S^2}\,\lambda_S\,. \tag{8.8}$$

Quindi nel caso MFD ideale non barotropico possono esistere delle superfici materiali di discontinuità debole non tangenti al vettore induzione

magnetica. Su di esse sono continue le derivate della velocità, dell'induzione magnetica e della pressione, mentre presentano discontinuità del tutto arbitrarie le derivate della entropia; le discontinuità nelle derivate della densità sono caratterizzate dalla (8.8). Poiché la velocità e la pressione attraverso tali superfici sono continue, si tratta di superfici di contatto (cfr. A. JEFFREY [17] n. 26 (*c*)).

Passiamo ora ad esaminare il caso del

(*b*) *Plasma MFD ideale barotropico.*

Dall'analisi svolta in (*a*) ponendo ovunque $\lambda_S = 0$ deduciamo che per un plasma MFD ideale barotropico possono esistere delle superfici materiali di discontinuità debole solo se tangenti al vettore induzione magnetica (nel caso $B_n \neq 0$ infatti è $\lambda_v = \lambda_B = \lambda_\varrho = \lambda_p = \lambda_S = 0$ e quindi non c'è superficie di discontinuità di sorta).

Attraverso tali superfici è continuo il gradiente della pressione totale, mentre le eventuali discontinuità nelle derivate della velocità devono avere carattere trasversale.

Possono poi verificarsi le circostanze particolari:

(i) $\lambda_p = 0$ (e quindi $\lambda_\varrho = 0$), $\lambda_B = 0$ con $\lambda_{vt} \neq 0$, cioè superfici attraverso cui sono continue le derivate della pressione (e quindi della densità) e della induzione magnetica, ma discontinue quelle della velocità;

(ii) $\lambda_p \neq 0$ (e quindi $\lambda_\varrho \neq 0$), $\lambda_B \neq 0$, $\lambda_v = 0$, cioè superfici attraverso cui sono continue le derivate della velocità, ma discontinue le derivate della pressione (e quindi della densità) e della induzione magnetica, legate fra loro dalla (8.4).

Esaminiamo infine il caso del

(*c*) *Plasma CGL.*

L'esame procede in modo analogo a quello svolto in (*a*) e (*b*). Riportiamo qui qualche conclusione relativa al caso $B_n = 0$.

Per (8.1) le (6.4) e (6.5) sono soddisfatte qualunque siano λ_B, λ_ϱ, λ_{II}, $\lambda_\perp$; le (6.2) e (6.3) restano soddisfatte dalla (8.2) e dalla (6.1) discende la

$$\lambda_\perp = -\frac{\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \mathbb{B}}{4\pi\mu} \tag{8.9}$$

(analoga alla (8.4)) che implica

$$[\nabla (p_m + p_\perp)] = 0. \tag{8.10}$$

Si conclude perciò intanto che anche nel plasma CGL possono esistere delle superfici materiali di discontinuità debole tangenti al vettore induzione magnetica. Su di esse le derivate della densità e della pressione « parallela »

possono presentare discontinuità del tutto arbitrarie, mentre le eventuali discontinuità nelle derivate della velocità hanno necessariamente carattere trasversale; le eventuali discontinuità nelle derivate della pressione « ortogonale » e della induzione magnetica devono soddisfare la condizione (8.9) che assicura la continuità del gradiente della somma della pressione magnetica e della pressione « ortogonale ». Si osservi poi che nel caso in esame possono verificarsi varie circostanze particolari; per esempio $\lambda_\varrho = 0$, $\lambda_{II} = 0$, $\lambda_{vt} \neq 0$ arbitraria con λ_B e $\lambda_\perp$ legati dalla (8.9), etc.

Sempre nel caso $B_n = 0$ vale la pena di confrontare le proprietà ora viste delle superfici materiali di discontinuità debole con quelle delle superfici non materiali (fronti d'onda).

Dalla (6.1) discende che su un fronte d'onda ($u \neq 0$) deve essere necessariamente

$$\lambda_{vt} = 0 ; \tag{8.11}$$

inoltre non può essere anche $\lambda_{vn} = 0$ in quanto che, in tale eventualità, per (6.2)-(6.5) risulterebbe anche $\lambda_B = 0$, $\lambda_\varrho = 0$, $\lambda_{II} = 0$ e $\lambda_\perp = 0$.

Possiamo perciò intanto concludere che:

(*a*) mentre attraverso un fronte d'onda le derivate della velocità devono essere necessariamente discontinue, attraverso una superficie di discontinuità materiale invece possono essere continue;

(*b*) su un fronte d'onda le discontinuità nelle derivate della velocità devono avere necessariamente carattere longitudinale ($\lambda_{vt} = 0$), mentre su una superficie materiale le eventuali discontinuità nelle derivate della velocità devono avere necessariamente carattere trasversale ($\lambda_{vn} = 0$);

(*c*) attraverso un fronte d'onda il gradiente della somma della pressione magnetica e della pressione « ortogonale » è necessariamente discontinuo, al contrario di quanto accade per una superficie materiale, come si deduce dalla (6.1) scrivendola nella forma

$$[\nabla (p_m + p_\perp)] = \varrho u \, \lambda_{vn} \mathbf{n} .$$

Sempre nel caso $B_n = 0$, la (6.1) infine, nella ipotesi $u \neq 0$, facendo uso delle (6.2), (6.3) e (6.5), assume la forma

$$\left\{u^2 - \left(A^2 + \frac{2 p_\perp}{\varrho}\right)\right\} \lambda_{vn} = 0. \tag{8.12}$$

La (8.12) indica che di fronti d'onda tangenti al vettore induzione magnetica ne esiste sempre uno ed uno solo, di tipo magnetoacustico, la cui

velocità di propagazione è data da

$$u^2 = A^2 + \frac{2\,p_\perp}{\varrho} \qquad \text{(cfr. [10] n. 6).} \tag{8.13}$$

9. Ulteriori deduzioni dalle condizioni di compatibilità dinamica.

Relativamente al plasma MFD ideale barotropico e al plasma CGL dalle condizioni di compatibilità dinamica si deducono anche le seguenti conclusioni.

1) Se si cercano tutte le possibili superfici di discontinuità, materiali o non, che siano normali al vettore induzione magnetica e attraverso le quali siano discontinue le derivate della velocità e della induzione magnetica, ma continue quelle della densità, si trova che di tali superfici ne esiste uno ed un solo tipo, non materiale, sia per il plasma MFD ideale barotropico che per il plasma CGL: nel primo caso si tratta del fronte d'onda di Alfvén puro, nel secondo del fronte d'onda di Alfvén modificato dall'anisotropia nel tensore delle pressioni.

Infatti, nel caso del plasma MFD ideale barotropico, le condizioni di compatibilità dinamica assumono la forma

$$\varrho\, u\, \lambda_v + \frac{B_n}{4\pi\,\mu}\,\lambda_B = 0$$

$$u\,\lambda_B + B_n\,\lambda_v = 0$$

$$\lambda_{vn} = 0$$

dalle quali si deduce: $(u^2 - A^2)\,\lambda_v = 0$ da cui

$$u^2 = A^2\,; \tag{9.1}$$

nel caso del plasma CGL dalle condizioni di compatibilità dinamica si deduce corrispondentemente la

$$u^2 = A^2 + \frac{p_\perp - p_{\text{II}}}{\varrho}$$

e che attraverso questo fronte d'onda devono essere continue le derivate della pressione « parallela » e della pressione « ortogonale ».

2) Se si ricercano tutte le possibili superfici di discontinuità debole, materiali e non, che siano normali al vettore induzione magnetica e attra-

verso le quali siano discontinue le derivate della velocità e della densità, ma continue quelle del vettore induzione magnetica, si trova che di tali superfici ne esiste uno ed un solo tipo, non materiale, sia nel plasma MFD ideale barotropico che nel plasma CGL: nel primo caso si tratta del fronte-d'onda acustico puro, nel secondo ancora di un fronte d'onda di tipo acustico con velocità di propagazione data da

$$u^2 = 3\, p_{II}/\varrho. \tag{9.2}$$

Infatti, nel caso del plasma MFD ideale barotropico, la (5.3) resta inalterata, la (5 1) fornisce le $\lambda_{vt} = 0$, $\varrho\, u\, \lambda_{vn} - c_S^2\, \lambda_\varrho = 0$ e la (5.2) è per conseguenza soddisfatta. Si ha quindi: $(u^2 - c_S^2)\, \lambda_{vn} = 0$ e perciò $u^2 = c_S^2$; nel caso del plasma CGL dalle condizioni di compatibilità dinamica si deduce corrispondentemente la (9.2).

PARTE II

SUPERFICI DI DISCONTINUITÀ FORTE

Per lo studio delle superfici di discontinuità forte è utile esprimere le equazioni descriventi il plasma sotto forma di opportune leggi di conservazione. Cominciamo perciò a scrivere le

10. Equazioni descriventi un plasma MFD ideale in forma di leggi di conservazione.

L'equazione (2.1) può scriversi nella seguente forma esprimente la conservazione della quantità di moto (cfr. L. LANDAU, E. LIFCHITZ [2] Eq. (51.7)-(51.8)) [8]

$$\frac{\partial\, (\varrho\, \mathbf{v})}{\partial\, t} + \nabla \cdot \mathit{\Pi} = 0 \tag{10.1}$$

dove $\mathit{\Pi}$ è il tensore doppio simmetrico di componenti cartesiane date dalla

$$\mathit{\Pi}_{ij} = p\, \delta_{ij} + \varrho\, v_i\, v_j - \frac{1}{4\pi\, \mu}\left(B_i\, B_j - \frac{1}{2}\, B^2\, \delta_{ij}\right). \tag{10.2}$$

---

[8] Se $\mathbf{T}$ è un generico tensore doppio (simmetrico o non) con $\nabla.\mathbf{T}$ intendiamo, per definizione, il vettore di componenti cartesiane $\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$.

Le (10.1) (10.2) indicano che si passa dall'equazione idrodinamica esprimente la legge di conservazione della quantità di moto alla corrispondente MFD semplicemente aggiungendo al tensore densità di flusso di quantità di moto $(p\,\delta_{ij} + \varrho\, v_i\, v_j)$ il tensore degli sforzi magnetici di Maxwell.

Per quanto riguarda l'equazione (2.2) del campo magnetico si verifica facilmente che essa può scriversi nella seguente forma di legge di conservazione

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{L} = 0, \tag{10.3}$$

dove $\mathbb{L}$ è il tensore doppio emisimmetrico di componenti cartesiane date dalla

$$L_{ij} = B_i\, v_j - B_j\, v_i\,. \tag{10.4}$$

L'equazione (2.3), esprimente in forma locale il principio di conservazione della massa, è già scritta in forma di legge di conservazione.

All'equazione (2.4), esprimente, come si disse, l'equazione del trasporto del calore nel caso non dissipativo, è opportuno dare una forma equivalente nel modo che segue. Facendo uso della (2.3) e della legge termodinamica

$$T\,dS = d\varepsilon + p\,d\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{10.5}$$

dove T è la temperatura assoluta e ε l'energia interna per unità di massa del fluido, la (2.4) può intanto mettersi nella forma

$$\varrho\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varrho\,\mathbf{v}\cdot\nabla\,\varepsilon + p\,\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{10.6}$$

Introduciamo ora la densità d'energia e (energia totale per unità di volume)

$$e = \frac{1}{2}\,\varrho\,v^2 + \frac{B^2}{8\pi\,\mu} + \varrho\,\varepsilon. \tag{10.7}$$

Nella (10.7) il primo termine a secondo membro è la densità d'energia cinetica, il secondo la densità d'energia magnetica e il terzo la densità d'energia interna del fluido. Dalla (10.7) si ha

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{v^2}{2}\,\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\,\mu}\,\frac{\partial B^2}{\partial t} + \varrho\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\,\frac{\partial \varrho}{\partial t}, \tag{10.8}$$

mentre dalla (2.1)

$$\varrho\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\varrho\,\mathbf{v}\cdot\nabla\frac{v^2}{2}-\mathbf{v}\cdot\nabla p+\mathbf{v}\cdot\frac{1}{4\pi\mu}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}, \tag{10.9}$$

e dalla (2.2)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})-\nabla\cdot\{\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\}. \tag{10.10}$$

Facendo uso delle (2.3), (10.6), (10.9) e (10.10), la (10.8) assume la forma

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{q}=0, \tag{10.11}$$

dove

$$\mathbf{q}=\varrho\left(i+\frac{v^2}{2}\right)\mathbf{v}+\frac{1}{4\pi\mu}\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{10.12}$$

è il vettore densità di flusso dell'energia nella cui espressione si è introdotta l'entalpia i per unità di massa del fluido

$$i=\varepsilon+\frac{p}{\varrho}. \tag{10.13}$$

La (10.11) esprimente l'equazione di conservazione della energia per un plasma MFD ideale, è la cercata forma equivalente della (2.4). Nell'ultimo termine a secondo membro della (10.12) tenendo presente che, per un fluido, come quello in esame, perfetto conduttore della elettricità è $\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}=0$, si riconosce il vettore di Poynting $\frac{c}{4\pi\mu}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. La (10.11) quindi esprime il seguente fatto di preciso significato fisico: si passa dall'equazione esprimente la conservazione dell'energia in idrodinamica a quella MFD aggiungendo alla densità d'energia e al vettore densità di flusso d'energia idrodinamici, la densità d'energia magnetica e il vettore di Poynting rispettivamente (si ricordi al riguardo il significato fisico di tale vettore).

Ciò continua a valere anche in presenza di dissipazione (cfr. L. LANDAU, E. LIFCHITZ [2] Sect. 51).

Quanto sopra appare fisicamente consistente col metodo col quale vengono introdotte le equazioni MFD, metodo basato sulla associazione delle equazioni del campo elettromagnetico (tenendo conto del legame fra il vettore densità di corrente e il campo per i conduttori in movimento) a quelle

idrodinamiche con l'aggiunta della forza di Lorentz alle forze di massa di origine non elettromagnetica [9], adottando quindi un procedimento di additività.

In definitiva le equazioni descriventi un plasma MFD ideale in forma di leggi di conservazione sono la (10.1), la (10.3), la (2.3) e la (10.11).

11. Soluzioni MFD deboli.

Il sistema delle equazioni di conservazione MFD (10.1), (10.3), (2.3), (10.11) è un sistema non lineare di otto equazioni differenziali scalari alle derivate parziali in otto funzioni incognite: le tre componenti di $\mathbf{v}$, le tre componenti di $\mathbf{B}$ e due variabili di stato termodinamiche indipendenti.

Indichiamo il complesso delle funzioni incognite con la funzione vettoriale $w = (w_1, w_2, \ldots, w_8)$ e riferiamoci dapprima al caso, unidimensionale, in cui tutte le funzioni incognite dipendono, oltreché dal tempo, da una sola variabile spaziale, x.

Proiettando la (10.3) sull'asse x e tenendo conto della (2.2)′ si ha intanto $B_x = \text{cost}$; si verifica poi che le rimanenti sette equazioni scalari del sistema (10.1), (10.3), (2.3), (10.11) possono esprimersi compattamente nella forma:

$$\frac{\partial M(x, t, w)}{\partial t} + \frac{\partial N(x, t, w)}{\partial x} = 0 , \tag{11.1}$$

dove M ed N sono due matrici date da

$$M = \begin{Vmatrix} \varrho \\ \varrho\, v_x \\ \varrho\, v_y \\ \varrho\, v_z \\ B_y \\ B_z \\ e \end{Vmatrix} \qquad N = \begin{Vmatrix} \varrho\, v_x \\ \widehat{p} + \varrho\, v_x^2 \\ \varrho v_x\, v_y - \dfrac{B_x\, B_y}{4\pi\,\mu} \\ \varrho v_x\, v_z - \dfrac{B_x\, B_z}{4\pi\,\mu} \\ v_x\, B_y - B_x\, v_y \\ v_x\, B_z - v_z\, B_x \\ v_x (e + \widehat{p}) - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}}{4\pi\,\mu} B_x \end{Vmatrix}$$

dove $\widehat{p} = p + p_m$ è la pressione totale.

---

[9] Una diretta conseguenza di ciò appare confrontando la (10.1) con la corrispondente idrodinamica.

Indicata con $\mathcal{D}$ la regione del piano (x, t) dominio di variabilità delle variabili indipendenti x e t e detto $C_0^\infty(\mathcal{D})$ l'insieme delle funzioni vettoriali di classe C^∞ in $\mathcal{D}$ e a supporto compatto, poniamo la seguente:

DEFINIZIONE. Una funzione w che può presentare discontinuità attraverso una generica curva regolare $\mathcal{C}: \Phi(x, t) = 0$ del piano (x, t) intersecante $\mathcal{D}$, è detta «*soluzione debole*» del sistema di equazioni MFD unidimensionali (11.1) in $\mathcal{D}$, se, per tutte le possibili funzioni $\chi(x, t) \in C_0^\infty(\mathcal{D})$, è soddisfatta la

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(M \frac{\partial \chi}{\partial t} + N \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) dx\, dt = 0. \tag{11.2}$$

Se, per riscontro, chiamiamo «*soluzione MFD forte*» una funzione w di classe C^1 che soddisfi la (11.1) in un qualche dominio, a giustificazione della precedente definizione è facile provare che:

(a) una soluzione MFD forte è anche soluzione debole.

(b) una soluzione MFD debole di classe C^1 è soluzione forte.

12. Determinazione delle condizioni di compatibilità dinamica con l'uso delle soluzioni MFD deboli.

Sia w una soluzione MFD debole in $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}: \Phi(x, t) = 0$ una curva (regolare) di discontinuità per w intersecante $\mathcal{D}$. Posto $\Sigma = \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$ siano $\mathcal{D}^+$ e $\mathcal{D}^-$ i due sottoinsiemi disgiunti e aperti tali che $\mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^- = \mathcal{D} \setminus \Sigma$. Assumiamo che la restrizione di w a $\mathcal{D}^+$ sia di classe C^1 e prolungabile con continuità a $\mathcal{D}^+ \cup \Sigma$ e, analogamente, che la restrizione di w a $\mathcal{D}^-$ sia di classe C^1 e prolungabile con continuità a $\mathcal{D}^- \cup \Sigma$. Sia poi $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{D})$ con

$$\operatorname{supp} \chi \cap \mathcal{D}^+ = \mathcal{S}^+ \neq \varnothing \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} \chi \cap \mathcal{D}^- = \mathcal{S}^- \neq \varnothing.$$

Posto $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-$, poiché w è soluzione MFD debole in $\mathcal{D}$ e forte in $\mathcal{D}^+$ e $\mathcal{D}^-$, abbiamo per (11.1) e (11.2):

$$0 = \iint_{\mathcal{S}^*} \left\{ \chi \left(\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \left(M \frac{\partial \chi}{\partial t} + N \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \right\} dx\, dt =$$

$$= \iint_{\mathcal{S}^*} \left\{ \frac{\partial (M\chi)}{\partial t} + \frac{\partial (N\chi)}{\partial x} \right\} dx\, dt.$$

Posto poi $\Sigma \cap \operatorname{supp} \chi = \sigma$, applicando il teorema di Gauss all'ultimo integrale si ricava

$$\int_\sigma \chi \, (\alpha \, [M] + \beta \, [N]) \, ds = 0,$$

essendo α e β i coseni direttori della normale a Σ, ds l'arco di linea su Σ e $[M]$ e $[N]$ i salti di M e N attraverso Σ.

Dalla precedente, per la continuità dell'integrando su Σ, si ricava infine la

$$-a \, [M] + [N] = 0, \tag{12.1}$$

essendo $a = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \Big/ \left| \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \right|$ la velocità di avanzamento di Σ (cfr. (4.2)).

Facendo uso delle espressioni esplicite di M e N che compaiono nella (11.1), dalla (12.1) si ricavano subito le cercate condizioni dl compatibilità dinamica per il caso in esame:

$$\begin{cases} [\varrho \, (v_x - a)] = 0 & [B_y \, (v_x - a) - B_x \, v_y] = 0 \\ [\varrho \, v_x \, (v_x - a) + \widehat{p}] = 0 & [B_z \, (v_x - a) - B_x \, v_z] = 0 \\ \left[\varrho \, v_y \, (v_x - a) - \dfrac{B_x \, B_y}{4\pi \, \mu}\right] = 0 & \left[e \, (v_x - a) + \widehat{p} \, v_x - \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}}{4\pi \, \mu} \, B_x\right] = 0. \\ \left[\varrho \, v_z \, (v_x - a) - \dfrac{B_x \, B_z}{4\pi \, \mu}\right] = 0 \end{cases} \tag{12.2}$$

Procedendo in modo analogo può trattarsi il caso tridimensionale (in cui tutte le funzioni incognite dipendono oltreché dal tempo, da tutte e tre le variabili spaziali). In tal caso si giunge al seguente sistema (corrispondente a (12.2)) di condizioni di compatibilità dinamica

$$\begin{cases} [\varrho \, (v_n - a)] = 0 \\ \left[\varrho \, (v_n - a) \, \mathbf{v} + \widehat{p} \, \mathbf{n} - \dfrac{B_n \, \mathbf{B}}{4\pi \, \mu}\right] = 0 \\ [(v_n - a) \, \mathbf{B} - B_n \, \mathbf{v}] = 0 \\ \left[e \, (v_n - a) + v_n \, \widehat{p} - \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}}{4\pi \, \mu} \, B_n\right] = 0. \end{cases} \tag{12.3}$$

Le precedenti, che costituiscono le relazioni di base per lo studio delle onde d'urto MFD, possono ricavarsi, come abitualmente vien fatto (cfr. per esempio [17] n. 39), senza far uso delle soluzione deboli, applicando alla MFD il classico procedimento della gasdinamica; è sembrato di interesse il ricavarle qui con l'uso delle suddette soluzioni, prendendo spunto dalla impostazione analitica di R. COURANT, D. HILBERT [18] Cap. V n. 9 (già applicata per esempio alle equazioni della termoelasticità linearizzata da P. CHADWICK, B. POWDRILL in [8]).

13. Plasma CGL.

Se, seguendo B. ABRAHAM SHRAUNER [13], si assume la equivalenza delle (3.4)-(3.5), esprimenti i due invarianti adiabatici, alle due equazioni

$$\frac{\partial e_{\text{II}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{II}} = 0, \qquad \frac{\partial e_{\perp}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{\perp} = 0,$$

per il significato delle quali si rimanda a [13] pp. 364-65, si vede che tutte le equazioni del sistema CGL possono mettersi sotto forma di leggi di conservazione del tipo visto al n. 10 e conseguentemente possono applicarsi direttamente gli sviluppi dei n.i 11 e 12.

Politecnico di Torino

BIBLIOGRAFIA

[1] N. G. VAN KAMPEN, B. U. FELDERHOF, *Theoretical Methods in Plasma Physics,* North. Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

[2] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Électrodynamique des milieux continus,* Ed. Mir, Moscou, 1969.

[3] C. TRUESDELL, *Vorticity and the thermodynamic state in a gas flow,* Mém. Sc. Math. n. 119, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[4] J. SERRIN, *Mathematical principles of classical fluid mechanics,* Hand. der Phys., VIII/1, 1959.

[5] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW, *The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions,* Proc. Roy. Soc., A, 236, 1956, 112-118.

[6] G. MATTEI, *Wave propagation and instabilities in a rotating anisotropic plasma,* Meccanica, 3, 1968, 214-230.

[7] W. PRAGER, *Proc. 2nd U.S Cong. Appl. Mech.,* Ann Arbor, Michigan, 1954, 21-32.

[8] P. CHADWICK, B. POWDRILL, *Singular surfaces in linear Thermoelasticity,* Int. J. Eng. Sci., 3, 1965, 561-595.

[9] C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The classical field theories,* Hand. der Phys., III/1, 1960.

[10] G. MATTEI, *Varietà caratteristiche e propagazione ondosa in un plasma magnetizzato privo di urti,* Annali Scuola Normale Superiore Pisa, 21, 1967, 745-763.

[11] L. G. NAPOLITANO, *Superfici di discontinuità in magnetofluidodinamica,* L'Aerotecnica, 38, 1958, 210-220.

[12] Y. KATO, M. TAJIRI, T. TANIUTI, *Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma,* I, J. Phys. Soc. Japan, 21, 1966, 765-777.

[13] B. ABRAHAM SHRAUNER, *Propagation of hydromagnetic waves through an anisotropic plasma,* J. Plasma Phys., 1, 1967, 361-378.

[14] H. GRAD, *Microscopic and macroscopic models in Plasma Physics, Proceedings of the Symposium on Electromagnetic and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma,* New York, April 1961, Polytechnic Press, Brooklyn, 1962, 37-64

[15] H. GRAD, *Magnetofluid and Plasma Dynamics,* Ed. H. Grad, Am. Math. Soc. Providence, 1967, 162.

[16] Y. M. LYNN, *Well-posedness criteria for one-dimensional unsteady flow of an anisotropic plasma,* Phys. Fluids, 13, 1970, 1762-1765.

[17] A. JEFFREY, *Magnetohydrodynamics,* Oliver and Boyd, London, 1966.

[18] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. II, Interscience Publishers, New York, 1962.