ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA CINQUINI-CIBRARIO

Ulteriori ricerche intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 13, n^o 4 (1959), p. 449-488

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_4_449_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ULTERIORI RICERCHE INTORNO AI SISTEMI DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI IN PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI

di MARIA CINQUINI-CIBRARIO (a Pavia)

In una Memoria [1], dedicata ai sistemi di tipo iperbolico di equazioni a derivate parziali del primo ordine in più di due variabili indipendenti, abbiamo dimostrato, sotto ampie ipotesi, teoremi di esistenza, di unicità e di dipendenza continua dai valori iniziali della soluzione del problema di CAUCHY (in senso generalizzato) per il sistema quasi-lineare

$$(I)\qquad \frac{\partial z_i(x,y_1,\dots,y_h)}{\partial x}+\sum_{r=1}^{h}\varrho_{ir}[x,y_1,\dots,y_h;\, z_1(x,y_1,\dots,y_h),\dots,z_m(x,y_1,\dots,y_h)]\,\frac{\partial z_i(x,y_1,\dots,y_h)}{\partial y_r}=$$

$$=f_i[x,y_1,\dots,y_h;\, z_1(x,y_1,\dots,y_h),\dots,z_m(x,y_1,\dots,y_h)],\quad (i=1,2,\dots,m),$$

nelle $h+1$ variabili indipendenti $x, y_1, \dots, y_h$ e nelle m funzioni incognite $z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)$; i coefficienti sono definiti per $0 \leq x \leq a_0$ e per tutti i valori reali di $y_1, \dots, y_h$; $z_1, \dots, z_m$; la soluzione è costruita in un campo

$$D_\infty:\qquad 0 \leq x \leq a\,,\ -\infty < y_1 < +\infty\,,\dots,-\infty < y_h < +\infty\,,$$

con $0 < a \leq a_0$.

In una successiva Memoria [2] abbiamo dimostrato teoremi di unicità e di dipendenza continua dai valori iniziali della soluzione del problema di

---

[1] M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Ann. di Mat. (IV), XLIV (1957), pp. 357-418. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_1).

[2] M. CINQUINI-CIBRARIO, *Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Ann. di Mat. (IV), XLVI (1959), p. 103-134. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_2).

CAUCHY (in senso generalizzato) per un sistema di tipo iperbolico di equazioni quasi-lineari dal primo ordine del tipo

$$(a)\quad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \left\{ \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} \right\} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

sotto ipotesi anche più ampie; in tale lavoro abbiamo considerato sia il caso, in cui la soluzione è definita in un campo D_∞, sia quello, in cui essa è definita in un opportuno campo limitato T (dello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h$), appartenente al semispazio $x \geq 0$ e avente come intersezione con l'iperpiano $x = 0$ il campo

$$-b_1 \leq y_1 \leq b_1, \dots, \quad -b_h \leq y_h \leq b_h,$$

dove $b_1, \dots, b_h$ sono costanti positive. Anche i coefficienti $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i, j = 1, 2, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots, h)$, possono essere supposti definiti in un campo limitato.

Il campo funzionale, nel quale sono dimostrati i teoremi contenuti nelle memorie (M_1) *e* (M_2) *è costituito dai sistemi di funzioni*

$$(II)\qquad z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

le quali sono definite in un campo illimitato D_∞ *(oppure in un campo limitato* T*), su ogni intersezione di* D_∞ *(o di* T*) con una retta* $y_1 = cost., \dots, y_h = cost.$ *sono funzioni assolutamente continue di* x*, e su ogni intersezione di* D_∞ *(o di* T*) con un iperpiano* $x = cost.$ *sono lipschitziane nel complesso delle variabili* $y_1, \dots, y_h$*, con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x*.*

Un tale sistema (II) *di funzioni costituisce in* D_∞ *(o in* T*) una soluzione del problema di* CAUCHY *in senso generalizzato per il sistema* (I) *o per il sistema* (a)*, se le funzioni stesse soddisfano quasi sempre nel campo* D_∞ *(o nel campo* T*) rispettivamente il sistema* (I) *o il sistema* (a)*, e inoltre soddisfano, in tutti i punti della intersezione del campo* D_∞ *(o del campo* T*) con l'iperpiano* $x = 0$*, le*

$$(III)\qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove le $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$ *sono funzioni assegnate, lipschitziane nel complesso delle variabili.*

Il presente lavoro, utilizzando anche i risultati di (M_2), porta alcuni complementi alle ricerche fatte in (M_1). In primo luogo, mentre in (M_1) si era dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di CAUCHY (in senso generalizzato) per il sistema (I), definita nel campo illimitato D_∞, nel presente lavoro si dimostra (cfr. § 1, n. 2, TEOREMA I) l'esistenza e l'unicità della soluzione di tale problema, definita in un campo limitato T (del tipo considerato nella memoria (M_2)). Nel § 1 sono inoltre date condizioni (cfr. n. 4, TEOREMA II) per l'esistenza delle derivate $\frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r}$, $(i = 1, 2, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots, h)$ in ogni punto del campo T, e anche (n. 5, *c*)), perchè la soluzione (II) risolva il problema di CAUCHY per il sistema (I) anche in senso classico.

In secondo luogo, nel § 2, si mostra come la trattazione relativa al sistema (I), fatta sia nella memoria (M_1), sia nel precedente § 1, si semplifichi, quando, in particolare, *il sistema è semilineare*, cioè ha la forma

$$(I') \qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)],\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

Se i coefficienti $\varrho_{ir}(x, y, \dots, y_h), f_i(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $(r=1,2,\dots,h;\ i=1,2,\dots,m)$, sono definiti per $0 \leq x \leq a_0$ e per tutti i valori reali di $y_1, \dots, y_h$, o, rispettivamente, di $y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m$, la soluzione (II) del problema di CAUCHY in senso generalizzato, relativa al sistema (I'), quando la varietà portante i dati sia l'intiero iperpiano $x = 0$, è costruita (cfr. § 2, n. 6, TEOREMA III) in tutto il campo

$$D_\infty^{(0)}: \qquad 0 \leq x \leq a_0,\ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

mentre per il sistema generale (I) la soluzione dello stesso problema è costruita nel campo D_∞ (con $a \leq a_0$) (3).

Anche nel caso, in cui le condizioni iniziali (III) devono essere soddisfatte soltanto nel campo limitato

$$-b_1 \leq y_1 \leq b_1, \dots, -b_h \leq y_h \leq b_h,$$

si trova (cfr. n. 8, TEOREMA IV) che il campo T limitato, nel quale è co-

(3) Cfr. (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, p. 380-395.

struita la soluzione del problema di CAUCHY in senso generalizzato per il sistema (I′) è, in generale, più ampio del campo limitato nel quale è costruita la soluzione dello stesso problema per il sistema generale (I).

§ 1.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN UN CAMPO LIMITATO.

1. Alcune definizioni.

Sia a^* un numero reale positivo qualunque, siano $M_r^*(x)$, $(r=1,2,\dots,h)$, funzioni definite nell'intervallo $0 \leq x \leq a^*$, ivi quasi continue, non negative e integrabili (4), e siano b_r^*, $(r=1,2,\dots,h)$, costanti positive, tali che

$$\int_0^{a^*} M_r^*(t)\,dt \leq b_r^*, \quad (r=1,2,\dots,h).$$

Introduciamo alcune definizioni, utili per semplificare gli enunciati dei teoremi, che dimostreremo.

DEFINIZIONE I. « *Una funzione* $z(x, y_1, \dots, y_h)$, *definita nel campo*

$$T^*: \quad 0 \leq x \leq a^*, \quad -b_r^* + \int_0^x M_r^*(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^* - \int_0^x M_r^*(t)\,dt, \quad (r=1,2,\dots,h),$$

si dice di classe G in T^*, *se essa è funzione assolutamente continua di* x *su ogni segmento* $y_1 = cost., \dots, y_h = cost.$ *tutto appartenente al campo* T^*, *e se inoltre esiste una costante* H^*, *tale che sia*

$$| z(x, y_1, \dots, y_h) - z(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) | \leq H^* \sum_{r=1}^{h} | y_r - \bar{y}_r | ,$$

comunque siano i punti $(x, y_1, \dots, y_h)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ *appartenenti al campo* T^* » (5).

---

(4) In tutto il lavoro l'integrabilità è intesa nel senso di LEBESGUE.

(5) In particolare, se è $M_r^*(x) \equiv 0$, $(r=1,2,\dots,h)$, identicamente in $(0, a^*)$, il campo T^* è definito dalle

La funzione $z(x, y_1, \dots, y_h)$ *è, evidentemente, continua nel campo chiuso* T^*, *e su ogni intersezione di* T^* *con un iperpiano* $x = \text{cost.}$ *è lipschitziana nel complesso delle variabili* $y_1, \dots, y_h$ *(con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x), *e quindi in quasi tutti i punti del campo* T^* *è differenziabile nel complesso delle variabili* $y_1, \dots, y_h$ (6).

DEFINIZIONE II « *Una funzione* $g(X;\ x, y_1, \dots, y_h)$, *definita nel campo*

$$0 \leq X \leq a^*,\ 0 \leq x \leq a^*,\ -b_r^* + \int_0^x M_r^*(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^* - \int_0^x M_r^*(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h),$$

si dice ivi di classe $G^{[1]}$, *se, per ogni punto fissato* $(x, y_1, \dots, y_h)$ *di* T^*, *è funzione assolutamente continua di* X *in* $(0, a^*)$, *e se, per ogni* X *fissato di* $(0, a^*)$, *è di classe* G *in* T^* » (7).

2. Teorema di esistenza e di unicità.

TEOREMA I « *Siano* $M_r^{(0)}(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, *funzioni definite in un intervallo* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili; siano* $b_r^{(0)}$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, Ω_i, $(i = 1, 2, \dots, m)$ *costanti positive, e sia*

$$b_r^{(0)} \geq \int_0^{a_0} M_r^{(0)}(t)\,dt, \quad (r = 1, 2, \dots, h). \tag{1}$$

$$0 \leq x \leq a^*,\ -b_r^* \leq y_r \leq b_r^*,\ (r = 1, 2, \dots, h).$$

Se inoltre tutte le b_r^*, $(r = 1, 2, \dots, h)$, tendono a $+\infty$, il campo T^* tende al campo

$$0 \leq x \leq a^*,\ -\infty < y_r < +\infty,\ (r = 1, 2, \dots, h),$$

considerato in (M_1), § 1, n. 1, DEFINIZIONE I, p. 370-371; tale definizione è dunque un caso particolare della presente.

(6) Infatti in quasi tutti i punti di tutte le intersezioni del campo T^* con un iperpiano $x = \text{cost.}$ la funzione $z(x, y_1, \dots, y_h)$ è differenziabile nel complesso delle variabili $y_1, \dots, y_h$ (cfr. H. RADEMACHER, *Uber partielle und totale Differenzierberkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale*, Math. Ann. **79** (1919), 340-359; cfr. ivi in particolare Parte I, n. 3, TEOREMA I, p. 347).

(7) Vale una osservazione analoga a quella della precedente nota (5).

Siano

$$\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m),\ f_i(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m),\ (r = 1,2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$$

funzioni definite nel campo (8)

$$C: \begin{cases} 0 \leq x \leq a_0,\ -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h), \\ -\Omega_i \leq z_i \leq \Omega_i,\ (i = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Esistano $h + m + 1$ *funzioni* $M_r(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L(x)$, *definite in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili, tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$M_r^{(0)}(x) \leq M_r(x),\ (r = 1, 2, \dots, h), \tag{2}$$

e inoltre

$$|\ \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)\ | \leq M_r(x),\ (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m), \tag{3}$$

$$|\ f_i(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)\ | \leq N_i(x),\ (i = 1, 2, \dots, m), \tag{4}$$

per tutte le $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, *tali che il punto* $(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$ *appartenga al campo* C,

$$|\ \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - \varrho_{ir}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)\ | \leq L(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} |\, y_s - \bar{y}_s\,| + \sum_{j=1}^{m} |\, z_j - \bar{z}_j\,| \right\}, \tag{5}$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

---

(8) In particolare se in $(0, a_0)$ è identicamente $M_r^{(0)}(x) = 0$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, il campo C è definito dalle

$$0 \leq x \leq a_0,\ -b_r^{(0)} \leq y_r \leq b_r^{(0)},\ (r = 1, 3, \dots, h),\ -\Omega_i \leq z_i \leq \Omega_i,\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

D'altra parte il TEOREMA I è valido anche se, per un particolare indice s fissato (o per più indici s fissati) fra i numeri $1, 2, \dots, h$, è $M_s^{(0)}(x) = 0$ identicamente in $(0, a_0)$ e $b_s^{(0)} = \infty$, oppure se, per un indice j fissato (o per più indici j fissati) tra i numeri $1, 2, \dots, m$, è $\Omega_j = \infty$, cioè se al campo C appartengono punti per i quali $|\ y_s\ |$ oppure $|\ z_j\ |$ è grande a piacere. In particolare il TEOREMA I è valido anche quando il campo C è definito dalle

$$0 \leq x \leq a_0,\ -\infty < y_r < +\infty,\ (r = 1, 2, \dots, h),\ -\infty < z_i < +\infty,\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

$$(6)\quad |f_i(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-f_i(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h;\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)|\leq L(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar{y}_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar{z}_j|\right\},$$
$$(i=1,2,\dots,m),$$

per tutte le coppie di $(h+m)$*-ple reali* $(y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)$, $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h;\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)$, *tali che i punti* $(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)$, $(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h;\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)$ *appartengano al campo* C.

Siano b_r, $(r=1,2,\dots,h)$, *costanti positive, con*

$$(7)\qquad b_r\leq b_r^{(0)},\quad (r=1,2,\dots,h);$$

le funzioni $\Phi_i(y_1,\dots,y_h)$, $(i=1,2,\dots,m)$, *siano definite nel campo*

$$R:\qquad -b_r\leq y_r\leq b_r,\ (r=1,2,\dots,h),$$

e siano ivi lipschitziane nel complesso delle variabili; esistano cioè m *costanti* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, *tali che sia*

$$(8)\quad |\Phi_i(y_1,\dots,y_h)-\Phi_i(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h)|\leq\lambda_i\sum_{r=1}^{h}|y_r-\bar{y}_r|,\ (i=1,2,\dots,m)$$

per tutte le coppie di h*-ple reali* $(y_1,\dots,y_h)$, $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h)$ *appartenenti al campo* R; *sia inoltre in tutto* R

$$(9)\qquad |\Phi_i(y_1,\dots,y_h)|\leq\mu_i<\Omega_i,\ (i=1,2,\dots,m).$$

Posto

$$(10)\qquad K=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i,$$

sia a' *un numero positivo* $(\leq a_0)$, *soddisfacente la diseguaglianza* [9]

$$(11_1)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_0^{a'}L(t)\,dt<\frac{1}{m-h}\,lg\,\frac{h\,K+m}{h\,(K+1)}, & \text{se } m\neq h;\\ \displaystyle\int_0^{a'}L(t)\,dt<\frac{1}{m\,(K+1)}, & \text{se } m=h.\end{cases}$$

---

[9] La scelta del numero a' è precisata maggiormente nel corso della dimostrazione (cfr. il capoverso b)); si vedano anche le osservazioni fatte più avanti nella nota [11]). Per le (11_1) cfr. (M_1), § 1, n. 3, LEMMA IV, p. 364-368; cfr. ivi, in particolare, le formule (III) di p. 365; il numero, là indicato con a, è, al presente, indicato con a'.

e sia a il massimo numero ($\leq a'$), *soddisfacente tutte le disuguaglianze* ([10])

$$(11_2) \qquad \int_0^a N_i(t)\,dt \leq \Omega_i - \mu_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(11_3) \quad \int_0^a M_r(t)dt \leq b_r, \ (r=1,2,\dots,h), \ \textit{mentre} \int_0^x M_r(t)dt < b_r, \ (r=1,2,\dots,h), \ \textit{se} \ 0 \leq x < a.$$

Esiste allora uno e un solo sistema di funzioni

$$(II) \qquad z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

definite nel campo

$$T: \quad 0 \leq x \leq a, \ -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\,dt, \ (r = 1, 2, \dots, h),$$

le quali sono di classe G in T, in quasi tutto T soddisfano il sistema

$$(I) \quad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e inoltre soddisfano le

$$(III) \qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le h-ple reali appartenenti al campo R ».

a) Nel campo

$$C_\infty: \quad 0 \leq x \leq a_0, \ -\infty < y_r < +\infty, \ (r = 1, 2, \dots, h), \ -\infty < z_i < +\infty, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

([10]) Circa la condizione (11_2), si confronti anche quanto è detto più avanti nella nota ([15]).

definiamo le funzioni $R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$, come segue:

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m), \end{cases}$$

quando il punto $(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ appartiene al campo C [11];

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, b_1^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, y_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, b_1^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \quad b_1^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt < y_1,$$

$$-b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt, \quad (r = 2, 3, \dots, h),$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, -b_1^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, -b_1^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

---

[11] È evidente che, se il campo C è definito dalle

$$0 \leq x \leq a_0, \ -\infty < y_r < +\infty, \ (r = 1, 2, \dots, h), \ -\infty < z_i < +\infty, \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

non occorre l'introduzione delle funzioni $R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$; $F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$.

per

$$0 \leq x \leq a_0\,, \quad -b_1^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt > y_1\,,$$

$$-b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt,\ (r = 2, 3, \dots, h)\,;$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j,\ (j = 1, 2, \dots, m)\,;$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h\,;\, z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, b_h^{(0)} - \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,;\, z_1, \dots, z_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h\,;\, z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, b_h^{(0)} - \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,;\, z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0,\ -\infty < y_r < +\infty,\ (r = 1, 2, \dots, h-1),\ b_h^{(0)} - \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt < y_h\,;$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j,\ (j = 1, 2, \dots, m)\,;$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h\,;\, z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, -b_h^{(0)} + \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,;\, z_1, \dots, z_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h\,;\, z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, -b_h^{(0)} + \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,;\, z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0,\ -\infty < y_r < +\infty,\ (r = 1, 2, \dots, h-1),\ -b_h^{(0)} + \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt > y_h\,;$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j,\ (j = 1, 2, \dots, m)\,;$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; \Omega_1, z_2, \dots, z_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; \Omega_1, z_2, \dots, z_m), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_r < +\infty, \quad (r = 1, 2, \dots, h), \quad \Omega_1 < z_1,$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \quad (j = 2, 3, \dots, m);$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; -\Omega_1, z_2, \dots, z_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; y_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; -\Omega_1, z_2, \dots, z_m). \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_r < +\infty, \quad (r = 1, 2, \dots, h); \quad -\Omega_1 > z_1,$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \quad (j = 2, 3, \dots, m);$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{n-1}, \Omega_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{m-1}, \Omega_m), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_r < +\infty, \quad (r = 1, 2, \dots, h);$$

$$-\infty < z_j < +\infty, \quad (j = 1, 2, \dots, m-1), \quad \Omega_m < z_m,$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{m-1}, -\Omega_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{m-1}, -\Omega_m), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_r < +\infty, \quad (r = 1, 2, \dots, h);$$

$$-\infty < z_j < +\infty, \quad (j = 1, 2, \dots, m-1), \quad -\Omega_m < z_m \ (^{12}).$$

---

(12) Se, per un particolare indice s fissato fra i numeri 1, 2,..., h (o per più indici s fissati tra tali numeri) è $M_s^{(0)}(x) = 0$ identicamente in $(0, a_0)$ e $b_s^{(0)} = \infty$, oppure se, per un

Definiamo infine le funzioni $\Psi_i(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, in tutto il campo

$$R_\infty: \quad -\infty < y_1 < +\infty, \ -\infty < y_2 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

mediante le

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h),$$

per

$$|y_r| \leq b_r, \ (r = 1, 2, \dots, h);$$

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(b_1, y_2, \dots, y_h),$$

per

$$b_1 < y_1; \ |y_r| \leq b_r, \ (r = 2, 3, \dots, h);$$

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(-b_1, y_2, \dots, y_h),$$

per

$$-b_1 > y_1, \ |y_r| \leq b_r, \ (r = 2, 3, \dots, h);$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(y_1, \dots, y_{h-1}, b_h),$$

per

$$-\infty < y_r < +\infty, \ (r = 1, 2, \dots, h-1), \ b_h < y_h;$$

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(y_1, \dots, y_{h-1}, -b_h),$$

per

$$-\infty < y_r < +\infty, \ (r = 1, 2, \dots, h-1), \ -b_h > y_h.$$

Allora per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ è

$$(12) \quad \begin{cases} |R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)| \leq M_r(x), \ (r = 1, 2, \dots, h; \ i = 1, 2, \dots, m), \\ |F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)| \leq N_i(x), \ (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

---

indice j fissato (o per più indici j fissati) tra i numeri $1, 2, \dots, m$, è $\Omega_j = \infty$, cioè se al campo C appartengono punti per i quali $|y_s|$ oppure $|z_j|$ è grande a piacere, la definizione delle funzioni $R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ si può semplificare in modo evidente.

per tutte le $(h+m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h, z_1, \dots, z_m)$, e

$$(13)\quad \begin{cases} |R_{ir}(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-R_{ir}(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h;\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)| \le L(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar{y}_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar{z}_j|\right\}, \\ \qquad\qquad (r=1,\dots,h;\ i=1,2,\dots,m), \\ |F_i(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-F_i(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h;\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)| \le L(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar{y}_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar{z}_j|\right\}, \\ \qquad\qquad (i=1,2,\dots,m), \end{cases}$$

per tutte le coppie di $(h+m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$.

Inoltre

$$(14)\qquad |\Psi_i(y_1, \dots, y_h)| \le \mu_i, \quad (i=1,2,\dots,m),$$

per tutte le h-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$,

$$(15)\qquad |\Psi_i(y_1, \dots, y_h) - \Psi_i(\bar{y}, \dots, \bar{y}_h)| \le \lambda_i \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|, \quad (i=1,2,\dots,m),$$

per tutte le coppie di h-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$.

b) Indicato per brevità con A il secondo membro delle disuguaglianze (11_1), cioè posto

$$A = \frac{1}{m-h} \lg \frac{hK+m}{h(K+1)}, \quad \text{se } m \neq h, \quad A = \frac{1}{m(K+1)}, \quad \text{se } m = h,$$

si scelga un numero a' come segue; se è

$$(16)\qquad \int_0^{a_0} L(t)\,dt < A,$$

si ponga

$$a' = a_0;$$

se invece

$$(17)\qquad \int_0^{a_0} L(t)\,dt \ge A,$$

e se α è il più piccolo numero positivo $(\le a_0)$ tale che

$$(18)\qquad \int_0^{\alpha} L(t)\,dt = A,$$

si può prendere come valore a' un qualsiasi numero positivo minore di α, e prossimo quanto si vuole ad α. È dunque, in ogni caso

$$\int_0^{a'} L(t)\,dt < A\,. \tag{19}$$

Per i risultati conseguiti in (M_1), esiste uno e un solo sistema [13] (II) di funzioni, le quali sono definite nel campo

$$D'_\infty: \quad 0 \leq x \leq a',\ -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, -\infty < y_h < +\infty\,,$$

sono ivi di classe G, soddisfano in quasi tutto D'_∞ il sistema

$$\frac{\partial z_i(x,y_1,\ldots,y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} R_{ir}[x,y_1,\ldots,y_h;\, z_1(x,y_1,\ldots,y_h),\ldots,z_m(x,y_1,\ldots,y_h)]\,\frac{\partial z_i(x,y_1,\ldots,y_h)}{\partial y_r} = \tag{20}$$

$$= F_i(x, y_1, \ldots, y_h;\ z_1(x, y_1, \ldots, y_h), \ldots, z_m(x, y_1, \ldots, y_h)],\ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

e inoltre soddisfano identicamente in $y_1, \ldots, y_h$ le

$$z_i(0, y_1, \ldots, y_h) = \Psi_i(y_1, \ldots, y_h),\ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{21}$$

---

[13] Cfr., per quanto riguarda l'esistenza delle funzioni (II), (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, pp. 380-395, e, per quanto riguarda l'unicità, (M_1), § 3, n. 2, TEOREMA IV, pp. 402-403. Se vale la (16), e quindi $a' = a_0$, il numero a' è determinato; se invece vale la (17), poichè si può scegliere a' prossimo quanto si vuole ad α, le funzioni (II) sono definite nel campo

$$0 \leq x < \alpha,\ -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, -\infty < y_h < +\infty\,,$$

e sono di classe G in ogni campo

$$0 \leq x \leq a',\ -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, -\infty < y_h < +\infty\,,$$

con $0 < a' < \alpha$. Può darsi che si sappia determinare direttamente (cfr. l'osservazione fatta in (M_1), § 2, n. 4, *c*), p. 397), un numero positivo $a^* (\leq a_0)$ in modo da assicurare la validità del procedimento tenuto nella dimostrazione del citato TEORREMA II di (M_1) in tutto il campo

$$0 < x \leq a^*,\ -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, -\infty < y_h < +\infty\,.$$

Si può allora prendere $a' = a^*$, senza preoccuparci della condizione (19).

c) Dalle (12) e (14) segue che in tutto D'_∞ è [14]

$$|\, z_i\,(x, y_1, \dots \cdot y_h)\,| \leq \mu_i + \int_0^x N_i\,(t)\,dt, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{22}$$

Sia a'' il massimo numero ($\leq a'$) soddisfacente tutte le disuguaglianze

$$\int_0^{a''} N_i\,(t)\,dt \leq \Omega_i - \mu_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{23}$$

Allora nel campo

$$D''_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a'', \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

è [15]

$$|\, z_i\,(x, y_1, \dots, y_h)\,| \leq \Omega_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{24}$$

d) Sia a il massimo numero positivo ($\leq a''$), soddisfacente tutte le disuguaglianze

$$\int_0^a M_r\,(t)\,dt \leq b_r, \quad (r = 1, 2, \dots, h), \tag{11_3}$$

---

[14] Le (22) seguono dalle formule (IV) e (V) di (M_1), § 2, n. 2, p. 372 (nelle quali si ponga $R_{ir}\,(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $F_i\,(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$ al posto di $\varrho_{ir}\,(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, e inoltre $\Psi_i\,(y_1, \dots, y_h)$ al posto di $\Phi_i\,(y_1, \dots, y_h)$), quando si tenga conto delle (12) e (14).

[15] Se si riesce a determinare direttamente un valore a'' ($\leq a'$), tale che in tutto il campo D''_∞ siano soddisfatte le (24), non è necessario di preoccuparsi che il numero a'' soddisfi le (23). Così pure è evidente che, se le funzioni $\varrho_{ir}\,(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $f_i\,(x, y_1; \dots; z_1, \dots, z_m)$ sono definite nel campo

$$0 \leq x \leq a_0, \ -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}\,(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}\,(t)\,dt, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

$$-\infty < z_i < +\infty, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

le costanti μ_i possono essere grandi a piacere, non occorre introdurre le (23), ed è $a'' = a'$.

e inoltre le condizioni che sia

$$(25) \qquad \int_0^x M_r(t)\,dt < b_r\,,\ (r = 1, 2, \dots, h), \quad \text{per } 0 \leq x < a\,.$$

Il campo T (dello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h$), definito nell'enunciato del teorema, appartiene al campo D''_∞, e quindi, se il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, il punto [16]

$$(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h))$$

(nello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m$) appartiene al campo C, nel quale è identicamente

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1,\dots,y_h\,;\, z_1,\dots,z_m) = \varrho_{ir}(x, y_1,\dots,y_h\,;\, z_1,\dots,z_m), \ (r = 1, 2,\dots, h\,;\, i = 1, 2,\dots,m), \\ F_i(x, y_1,\dots,y_h\,;\, z_1,\dots,z_m) = f_i(x, y_1,\dots,y_h\,;\, z_1,\dots,z_m), \ (i = 1, 2,\dots, m). \end{cases}$$

Se dunque il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, il sistema (20) e le condizioni (21) coincidono con il sistema (I) e le condizioni (III) [17]. Le funzioni (II) soddisfano dunque quasi ovunque in T il sistema (I) e soddisfano le (III) per tutte le *h-ple* $(y_1, \dots, y_h)$ tali che sia

$$|\,y_r\,| \leq b_r,\ (r = 1, 2, \dots, h).$$

e) È così provata l'esistenza di almeno un sistema (II) di funzioni, definite nel campo T e soddisfacenti le condizioni del TEOREMA I. In quanto all'unicità di un tale sistema di funzioni, essa segue come caso molto particolare dei risultati contenuti in (M_2) [18].

---

[16] Si tenga presente che il campo T appartiene al campo

$$T^{(0)}: \quad 0 \leq x \leq a_0,\ -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h).$$

[17] Si tenga presente che per $|\,y_r\,| \leq b_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$ è

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h),\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

[18] Cfr. (M_2), § 1, n. 2, TEOREMA I, pp. 106-118; cfr. pure § 3, n. 11, TEOREMA V, pp. 128-131, e n. 13, *a*), pp. 131-132; l'unicità della soluzione è provata sotto ipotesi alquanto più ampie delle attuali.

3. Osservazioni.

a) Nel campo T la soluzione (II) *del problema di* CAUCHY (*in senso generalizzato*) *relativo al sistema* (I) *dipende con continuità dai dati;* ciò segue come caso particolare dei risultati ottenuti in (M_2) [19].

b) Il sistema di funzioni (II) *soddisfa in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo T con una retta* $y_1 = \text{cost.}, \dots, y_h = \text{cost.}$ *il sistema di equazioni integrali* [20]

$$(VI) \qquad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h) +$$

$$+ \int_0^x \Big\{ - \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}[X, y_1, \dots, y_h; z_1(X, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(X, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_i(X, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} +$$

$$+ f_i[X, y_1, \dots, y_h; z_1(X, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(X, y_1, \dots, y_h)] \Big\} dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

c) Siano $M_r^{(1)}(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i^{(1)}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L^{(1)}(x)$ funzioni definite in $(0, a_0)$, ivi quasi-continue, non negative e integrabili soddisfacenti in quasi tutto $(0, a_0)$ le

$$(26) \qquad \begin{cases} M_r^{(0)}(x) \leq M_r^{(1)}(x) \leq M_r(x), & (r = 1, 2, \dots, h), \\ N_i^{(1)}(x) \leq N_i(x), & (i = 1, 2, \dots, m), \\ L^{(1)}(x) \leq L(x); \end{cases}$$

e inoltre tali che per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia

$$(27) \qquad \begin{cases} |\, \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) \,| \leq M_r^{(1)}(x), & (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m), \\ |\, f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) \,| \leq N_i^{(1)}(x), & (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

per tutte le $(h + m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ tali che il punto

---

[19] Cfr. (M_2), § 2, n. 6, TEOREMA III, pp. 122-124; § 3, n. 12, TEOREMA III, p. 131, e n. 13, *a*), pp. 131-132. I risultati di (M_2) valgono sotto ipotesi alquanto più ampie delle attuali.

[20] Cfr. (M_1), § 2, n. 2, I), *a*), form. (VI), p. 373.

$(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots z_m)$ appartenga al campo C;

$$(27') \quad \begin{cases} |\varrho_{ir}(x,y_1,\dots,y_h; z_1,\dots,z_m) - \varrho_{ir}(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h; \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)| \leq L^{(1)}(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar{y}_s| + \sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar{z}_j|\right\}, \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m), \\ |f_i(x,y_1,\dots,y_h; z_1,\dots,z_m) - f_i(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h; \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)| \leq L^{(1)}(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar{y}_s| + \sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar{z}_j|\right\}, \\ \qquad\qquad (i = 1, \dots, m), \end{cases}$$

per tutte le coppie di $(h+m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$, tali che i punti $(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ appartengano al campo C.

Allora nell'enunciato del TEOREMA I si possono sostituire le funzioni $M_r^{(1)}(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i^{(1)}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L^{(1)}(x)$ alle funzioni $M_r(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L(x)$. Si giunge così a determinare un campo $T^{(1)}$ (al quale appartengono certamente tutti i punti del campo T)

$$T^{(1)}: \quad 0 \leq r \leq a^{(1)}, \quad -b_r + \int_0^x M_r^{(1)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r^{(1)}(t)\,dt, \ (r = 1, 2, \dots, h).$$

Il campo $T^{(1)}$ può riuscire più ampio del campo T.

Il TEOREMA I prova l'esistenza e l'unicità delle funzioni (II), definite nel campo $T^{(1)}$, soddisfacenti le (I) in quasi tutto $T^{(1)}$ e soddisfacenti le (III) per tutte le h-*ple* $(y_1, \dots, y_h)$ tali che $|y_r| \leq b_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$.

Quindi, supposto fissato il campo C e dati il sistema (I) e le condizioni iniziali (III), una scelta opportuna del sistema di funzioni $M_r^{(1)}(x)$, $(r=1,2,\dots,h)$, $N_i^{(1)}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L^{(1)}(x)$ può permettere di provare il teorema di esistenza e di unicità in un campo più ampio.

4. Condizioni sufficienti per l'esistenza e la continuità in ogni punto del campo T delle derivate $\dfrac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r}$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$.

TEOREMA II « *Valgano tutte le ipotesi del* TEOREMA I; *inoltre in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo C con gli iperpiani* $x = cost.$

le derivate

$$\frac{\partial \varrho_{ir}}{\partial y_l}, \frac{\partial \varrho_{ir}}{\partial z_j}, \frac{\partial f_i}{\partial y_l}, \frac{\partial f_i}{\partial z_j}, \quad (r, l = 1, 2, \dots, h;\ i, j = 1, 2, \dots, m)$$

esistano finite; in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo C con gli iperpiani $x = cost.$ *sia* [21]

$$(28)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)}{\partial y_l} \right| \leq L(x); \quad \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}(\dots)}{\partial z_j} \right| \leq L(x); \\ \left| \dfrac{\partial f_i(\dots)}{\partial y_l} \right| \leq L(x); \qquad \left| \dfrac{\partial f_i(\dots)}{\partial z_j} \right| \leq L(x), \\ (r, l = 1, 2, \dots, h;\ i, j = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Esista una funzione $\Lambda(x)$, *definita in* $(0, a_0)$, *ivi quasi continua, non negativa e integrabile, tale che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia* [22]

$$(29)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial y_l} - \dfrac{\partial \bar{\varrho}_{ir}}{\partial y_l} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j| \right\}, \\ \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial z_j} - \dfrac{\partial \bar{\varrho}_{ir}}{\partial z_j} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j| \right\}, \\ \left| \dfrac{\partial f_i}{\partial y_l} - \dfrac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_l} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j| \right\}, \\ \left| \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j} - \dfrac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_j} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j| \right\}, \\ (r, l = 1, 2, \dots, h;\ i, j = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

per tutte le coppie di $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h;\ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$, *tali che i punti* $(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h;\ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ *appartengano al campo C.*

---

[21] Le (28) sono conseguenza delle (5) e (6).

[22] Scriviamo $\dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial y_l}$ per $\dfrac{\partial \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_r;\ z_1, \dots, z_m)}{\partial y_l}$, e $\dfrac{\partial \bar{\varrho}_{ir}}{\partial y_l}$ per $\dfrac{\partial \varrho_{ir}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h;\ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)}{\partial y_l}$, e analogamente per le altre derivate $\dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_l}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}$.

Le funzioni $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ *in ogni punto del campo* R *ammettano derivate parziali prime finite, le quali nel campo* R *siano lipschitziane nel complesso delle variabili. In queste ipotesi le funzioni*

$$(II) \qquad z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

definite nel campo T *(indicato nel* TEOREMA I*), ivi di classe* G*, soddisfacenti le* (I) *in quasi tutto il campo* T *e le* (III) *per tutte le* h*-ple* $(y_1, \dots, y_h)$*, tali che* $|y_r| \leq b_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$*, funzioni delle quali il* TEOREMA I *assicura l'esistenza e l'unicità, ammettono in ogni punto del campo* T *derivate parziali prime finite* [23]

$$\frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, h\,;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

le quali sono di classe G *nel campo* T*; inoltre le funzioni* (III) *soddisfano le* (VI) *identicamente in* T*, e soddisfano le* (I) *in quasi tutti i punti di tutte le intersezioni del campo* T *con le rette* $y_1 = cost., \dots, y_h = cost.$ ».

a) Nella dimostrazione del TEOREMA I è stato costruito il sistema (II) di funzioni, definite nel campo D'_∞ e ivi di classe G, soddisfacenti in quasi tutto D'_∞ il sistema (20) e soddisfacenti identicamente le (21); a tale sistema (II) di funzioni si possono associare [24] m sistemi di funzioni

$$(30) \qquad g_{i1}(X\,;\ x, y_1, \dots, y_h), \dots, g_{ih}(X\,;\ x, y_1, \dots, y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

---

[23] Nei punti del contorno del campo T, *non* appartenenti all'iperpiano $x = a$, è senz'altro possibile definire le derivate $\frac{\partial z_i}{\partial y_l}$. Se inoltre, per tutti gli indici $r = 1, 2, \dots, h$, è $\int_0^a M_r(t)\,dt < b_r$, le derivate $\frac{\partial z_i}{\partial y_l}$ hanno significato anche nei punti della intersezione del campo T con l'iperpiano $x = a$; altrimenti si intende come valore di

$$\frac{\partial z_i(a, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})}{\partial y_l} \left(\text{con } -b_r + \int_0^a M_r(t)\,dt \leq y_r^{(0)} \leq b_r - \int_0^a M_r(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h) \right),$$

il limite a cui tende $\frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}$ quando il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ tende al punto $(a, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})$.

[24] Cfr. (M_1) § 2, n. 2, TEOREMA I, pp. 371-380.

definite nel campo

$$\Delta'_\infty: \quad 0 \leq X \leq a', \; 0 \leq x \leq a', \; -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, -\infty < y_h < +\infty,$$

ivi di classe $G^{[1]}$, tali che in tutto D'_∞ siano soddisfatte le ([25])

$$(31) \quad g_{ir}(X; x, y_1, \ldots, y_h) = y_r - \int_X^x R_{ir}[t, g_{is}(t; x, y_1, \ldots, y_h); z_j(t, g_{is}(t; x, y_1, \ldots, y_h))]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \ldots, h; \; i = 1, 2, \ldots, m),$$

identicamente in Δ'_∞; e

$$(32) \quad z_i(x, y_1, \ldots, y_h) = \Psi_i(g_{is}(0; x, y_1, \ldots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x F_i[X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h); z_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))]\, dX, \; (i = 1, 2, \ldots, m),$$

identicamente in D'_∞.

In (M_1) le funzioni (II) e (30) sono state costruite a partire da successioni di funzioni ([26])

$$(33) \quad g^{(n)}_{ir}(X; x, y_1, \ldots, y_h) = y_r - \int_0^x R_{ir}[t, g^{(n)}_{is}(t; x, y_1, \ldots, y_h); z^{(n)}_j(t - \delta, g^{(n)}_{is}(t; x, y_1, \ldots, y_h))]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \ldots, h; \; i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(34) \quad z^{(n)}_i(x, y_1, \ldots, y_h) = \Psi_i(g^{(n)}_{is}(0; x, y_1, \ldots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x F_i[X, g^{(n)}_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h); z^{(n)}_j(X - \delta, g^{(n)}_{is}(X; x, y_1, \ldots y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

([25]) Scriviamo, qui e in seguito, $R_{ir}(x, y_s; z_j)$, $F_i(x, y_s; z_j)$, $\varrho_{ir}(x, y_s; z_j)$, $f_i(x, y_s; z_j)$ al posto di $R_{ir}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$, ecc. Scriviamo inoltre spesso, per brevità, $\Psi_i(y_s)$, $\Phi_i(y_s)$, $z_j(x, y_s)$ al posto di $\Psi_i(y_1, \ldots, y_h)$, $\Phi_i(y_1, \ldots, y_h)$, $z_j(x, y_1, \ldots, y_h)$.

([26]) Cfr. (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, pp. 380-395; cfr. ivi in particolare capoverso *b*), pp. 381-385, form. (33) e (34); vi è qui qualche differenza di notazioni.

dove è $n = 2, 3, \dots$, si è posto $\delta = \frac{a'}{n}$, e si è posto, inoltre, per definizione

$$z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(y_1, \dots y_h), \quad \text{per} \quad -\frac{a'}{2} \leq x \leq 0, \ (i = 1, 2, \dots, m).$$

b) Sia ora $(x, y_1, \dots, y_h)$ *un punto fissato, appartenente al campo* T; per $0 \leq X \leq x$ è [27]

$$(35) \qquad -b_r + \int_0^X M_r(t)\,dt \leq g_{ir}(X;\ x, y, \dots, y_h) \leq b_r - \int_0^X M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(36) \qquad -b_r + \int_0^X M_r(t)\,dt \leq g_{ir}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) \leq b_r - \int_0^X M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m).$$

---

[27] Infatti dalle (3), (31), (33) segue per $0 \leq X \leq x$

$$|g_{ir}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) - y_r| \leq \int_X^x M_r(t)\,dt;\ |g_{ir}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) - y_r| \leq \int_X^x M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

cioè

$$(\alpha) \quad y_r - \int_X^x M_r(t)\,dt \leq g_{ir}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) \leq y_r + \int_X^x M_r(t)\,dt, \ (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(\beta) \quad y_r - \int_X^x M_r(t)\,dt \leq g_{ir}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) \leq y_r + \int_X^x M_r(t)\,dt, \ (r=1, 2, \dots, h;\ i=1, 2, \dots, m).$$

Per ipotesi il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, e quindi è

$$0 \leq x \leq a, \ -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\,dt, \ (r = 1, 2, \dots, h).$$

Da queste ultime disuguaglianze e dalle (α) e (β) seguono le (35) e (36) (cfr. anche (M_2), § 1, n. 2, *c*), pp. 111-112).

Allora *se i è uno fissato tra i numeri* 1, 2, ... m, e se dalle curve definite (nello spazio delle variabili $(X, Y_1, \dots, Y_h)$) dalle

$$Y_r = g_{ir}(X;\ x, y_1, \dots, y_h),\quad (r = 1, 2, \dots, h), \tag{37}$$

$$Y_r = g_{ir}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h),\quad (r = 1, 2, \dots, h), \tag{38}$$

si considerano gli archi corrispondenti a $0 \leq X \leq x$, si vede che tutti i punti di tali archi appartengono al campo

$$0 \leq X \leq x,\quad -b_r + \int_0^X M_r(t)\,dt \leq Y_r \leq b_r - \int_0^X M_r(t)\,dt,\quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

cioè appartengono al campo T considerato nello spazio delle variabili $(X, Y_1, \dots Y_h)$. In particolare è

$$\begin{cases} |\ g_{ir}(0, x, y_1, \dots, y_h\ | \leq b_r, \quad (r = 1, 2, \dots, h), \\ |\ g_{ir}^{(n)}(0; x, y_1, \dots, y_h)\ | \leq b_r, \quad (r = 1, 2, \dots, h). \end{cases} \tag{39}$$

Inoltre se è $0 \leq x \leq a$, dalle (32) e (34), tenuto conto delle (11_2), (12), (14), (15), segue, come nel n. 2, *c*)

$$|\ z_i(x, y_1, \dots, y_h)\ | \leq \mu_i + \int_0^x \left[\lambda_i \sum_{r=1}^{h} M_r(t) + N_i(t)\right] dt \leq \Omega_i,\quad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{40}$$

$$|\ z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)\ | \leq \mu_i + \int_0^x \left[\lambda_i \sum_{r=1}^{h} M_r(t) + N_i(t)\right] dt \leq \Omega_i,\quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{41}$$

Dalle considerazioni fatte segue che, se il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, è per $0 \leq t \leq x$, $0 \leq X \leq x$.

$$\begin{cases} R_{ir}[t, g_{is}(t,\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j(t, g_{is}(t;\ x, y_1, \dots, y_h))] = \varrho_{ir}[\dots] \\ F_i[X, g_{is}(X;\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j(X, g_{is}(X;\ x, y_1, \dots, y_h))] = f_i\ [\dots] \\ R_{ir}[t, g_{is}^{(n)}(t;\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j^{(n)}(t - \delta, g_{ir}^{(n)}(t;\ x, y_1, \dots, y_h))] = \varrho_{ir}[\dots] \\ F_i[X, g_{is}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j^{(n)}(X - \delta, g_{is}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h))] = f_i[\dots] \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

e inoltre

$$\begin{cases} \Psi_i(g_{is}(0;\ x, y_1, \dots, y_h)) = \Phi_i(g_{is}(0;\ x, y_1, \dots, y_h)), \\ \Psi_i(g_{is}^{(n)}(0;\ x, y_1, \dots, y_h)) = \Phi_i(g_{is}^{(n)}(0;\ x, y_1, \dots, y_h)), \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Se dunque il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, le (31), (32), (33), (34) diventano rispettivamente [28]

$$\text{(IV)} \quad g_{ir}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) = y_r - \int_X^x \varrho_{ir}[t, g_{is}(t;\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j(t, g_{is}(t;\ x, y_1, \dots, y_h))]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\text{(V)} \quad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(g_{is}(0;\ x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{is}(X;\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j(X, g_{is}(X;\ x, y_1, \dots, y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\text{(42)} \quad g_{ir}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) = y_h - \int_X^x \varrho_{ir}[t, g_{is}^{(n)}(t;\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j^{(n)}(t-\delta, g_{is}^{(n)}(t;\ x, y_1, \dots, y_h))]\, dt$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\text{(43)} \quad z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(g_{is}^{(n)}(0;\ x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{is}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h);\ z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}^{(n)}(X;\ x, y_1, \dots, y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

c) Se per tutti i valori di r, con $r = 1, 2, \dots, h$, è

$$\int_0^a M_r(t)\, dt < b_r,$$

---

[28] Per le formule (IV) e (V) cfr. anche (M_1), § 2, n. 2, TEOREMA I, p. 372, e per le (42) e (43), (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, *b*), form. (33), (34), p. 382.

nel campo T dello spazio $(x, y_1, \dots, y_h)$ e nel campo

$$0 \leq X \leq x,\ 0 \leq x \leq a,\ -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h),$$

dello spazio $(X, x, y_1, \dots, y_h)$ si possono ripetere con poche modificazioni le considerazioni mediante le quali è stato dimostrato il Teorema V di (M_1) [29]; si prova così che in tutto il campo T esistono le derivate

$$\frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m), \tag{44}$$

e che esse sono di classe G nel campo T.

Se invece tra i numeri $1, 2, \dots, h$ *esiste* almeno un indice r_0, per il quale

$$\int_0^a M_{r_0}(t)\,dt = b_{r_0}. \tag{45}$$

sia ε un numero positivo $(< a)$, arbitrariamente piccolo, e si consideri il campo

$$T_\varepsilon:\ 0 \leq x \leq a - \varepsilon,\ -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h),$$

dello spazio $(x, y_1, \dots, y_h)$ e il campo

$$0 \leq X \leq x,\ 0 \leq x \leq a - \varepsilon,\ -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h),$$

dello spazio $(X; x, y_1, \dots, y_h)$. In tali campi si possono ripetere le considerazioni, alle quali abbiamo accennato or ora; si prova così che in tutto T_ε le derivate (44) esistono finite e sono di classe G.

---

[29] Cfr. (M_1), § 4, n. 1, TEOREMA V, pp. 403-415.

Poichè ε è positivo arbitrario, riesce provata l'esistenza delle derivate (44) in ogni punto del campo T, per il quale sia $0 \leq x < a$. Tenendo poi conto di alcune disuguaglianze dimostrate in (M_1) [30], si prova che quando il punto $(x, y_1, \ldots, y_h)$ appartiene al campo T e tende ad un punto $(a, y_1^{(0)}, \ldots, y_h^{(0)})$ pure appartenente al campo T [31], ognuna delle derivate (44) tende ad un limite determinato e finito. Tali derivate possono dunque essere definite anche nel punto $(a, y_1^{(0)}, \ldots, y_h^{(0)})$; utilizzando di nuovo le disuguaglianze citate in [30], si può dimostrare che le derivate (44) sono di classe G in tutto il campo T.

d) Poichè le derivate (44) esistono e sono continue e anzi di classe G in tutto T, si verifica facilmente che il secondo membro di ognuna delle (VI) è funzione continua nel complesso delle variabili in ogni punto del campo T, e poichè tale è anche il primo membro, segue che le (VI) valgono identicamente in T, e le (I) valgono in quasi tutti i punti di tutte le intersezioni del campo T con una retta $y_1 = \text{cost.}, \ldots, y_h = \text{cost.}$

5. Osservazioni.

a) Valgano le ipotesi dei TEOREMI I e II circa le funzioni

$$\varrho_{ir}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m),\ f_i(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m),\ (r = 1, 2, \ldots, h;\ i = 1, 2, \ldots, m);$$

siano a^*, b_r^*, $(r = 1, 2, \ldots, h)$, costanti soddisfacenti le

$$0 < a^* \leq a_0;\ 0 < b_r^* \leq b_r^{(0)};\ \int_0^{a^*} M_r(t)\, dt \leq b_r^*,\ (r = 1, 2, \ldots, h).$$

Si consideri il campo

$$T^*:\ 0 \leq x \leq a^*,\ -b_r^* + \int_0^x M(t)\, dt \leq y_r \leq b_r^* - \int_0^x M_r(t)\, dt,\ (r = 1, 2, \ldots, h),$$

---

[30] Cfr. (M_1), § 4, n. 1, *d*), form. (35) p. 413, *g*) form. (40), p. 414, nelle quali (cfr anche ivi le osservazioni fatte nel capoverso *h*) pp. 414-415) si sopprima l'indice n.

[31] E' cioè

$$-b_r + \int_0^a M_r(t)\, dt \leq y_r^{(0)} \leq b_r - \int_0^a M_r(t)\, dt,\quad (r = 1, 2, \ldots, h).$$

Per l'ipotesi fatta (45) esiste almeno un indice r_0, per il quale è $y_{r_0} = 0$.

e sia noto il sistema di funzioni

$$z_i = z_i^*(x, y_1, \dots, y_h), \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

definite in T^*, ivi di classe G e soddisfacenti quasi ovunque in T^* il sistema (I); allora se in tutto il campo

$$R^*: \qquad -b_r \leq y_r \leq b_r^*, \ (r = 1, 2, \dots, h),$$

le funzioni

$$z_i^*(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i^*(y_1, \dots y_h), \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

ammettono derivate $\dfrac{\partial \Phi_i^*}{\partial y_l}$, $(l = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$ le quali sono lipschitziane nel complesso delle variabili $y_1, \dots, y_h$ in tutto R^*, le funzioni $z_i = z_i^*(x, y_1, \dots y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, ammettono in ogni punto di T^* finite le derivate

$$\frac{\partial z_i^*(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

le quali sono di classe G in T^*, e le funzioni stesse soddisfano le (VI) identicamente in T^* [32].

b) Se valgono le ipotesi dei TEOREMI I e II e se inoltre le funzioni $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$ sono continue nel complesso delle variabili nel campo C, allora, analogamente a quanto si è osservato in (M_1) [33], in ogni punto del campo T esistono finite anche le derivate $\dfrac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x}$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, e tali derivate sono continue in T; le funzioni (II) soddisfano allora il sistema (I) identicamente in T, e risolvono il problema di CAUCHY anche nel senso classico.

Anche in questo caso vale, in particolare, l'osservazione fatta or ora in *a*).

---

[32] La dimostrazione di questo risultato è simile a quella sviluppata in (M_1), § 4, n. 2, *b*, pp. 415-416 (cfr. ivi la nota [40]).

[33] Cfr. (M_1), § 4, n. 3, TEOREMA VI, pp. 416-417.

§ 2.

SISTEMI SEMILINEARI

6. Teorema di esistenza e di unicità.

TEOREMA III « *Le funzioni* $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$ *siano definite per ogni* x *dell'intervallo* $(0, a_0)$ *e, rispettivamente, per tutti i valori reali di* $y_1, \dots, y_h$ *e di* $y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m$. *Esistano* $m(h+1)+2$ *funzioni* $M_{ir}(x)$, $N_i(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$, $L(x)$, $L_1(x)$, *definite in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili, tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *valgano le*

$$|\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h)| \leq M_{ir}(x),\ (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m) \tag{46}$$

per tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$,

$$|\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) - \varrho_{ir}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)| \leq L(x) \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|, \tag{47}$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$,

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)| \leq N_i(x),\ (i = 1, 2, \dots, m), \tag{48}$$

per tutte $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$,

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq \tag{49}$$

$$\leq L(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{j=1}^{m} |z_j - \bar{z}_j| \right\},\quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$. *Le funzioni* $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, *siano definite per tutti i valori reali delle variabili e siano lipschitziane nel complesso delle variabili. In queste ipotesi esiste uno e un solo sistema di funzioni*

$$z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h), \tag{II}$$

definite in tutto il campo

$$D_\infty^{(0)}: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \ -\infty < y_1 < +\infty, \ \dots, \ -\infty < y_h < +\infty,$$

le quali sono di classe G in $D_\infty^{(0)}$, soddisfano in quasi tutto $D_\infty^{(0)}$ il sistema semilineare

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h; \ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

e soddisfano identicamente le

$$(\mathrm{III}) \qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \ (i = 1, 2, \dots, m)\,\text{»}.$$

a) L'unicità della soluzione (II) del problema di CAUCHY (in senso generalizzato) relativo al sistema (I') segue come caso particolare del teorema di unicità dimostrato in (M_1) [34]. L'esistenza di tale soluzione è provata [35], quando si siano costruiti m sistemi di funzioni

$$(50) \qquad g_{i1}(X; x, y_1, \dots, y_h), \dots, g_{ih}(X; x, y_1, \dots, y_h), \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

definite nel campo

$$\Delta_\infty^{(0)}: \ 0 \leq X \leq a_0, \ 0 \leq x \leq a_0, \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

e ivi di classe $G^{[1]}$, e un sistema (II) di funzioni definite nel campo $D_\infty^{(0)}$ e ivi di classe G, in modo che le equazioni

$$(\mathrm{IV}') \qquad g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h) = y_r - \int_X^x \varrho_{ir}[t, g_{is}(t; x, y_1, \dots, y_h)]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h; \ i = 1, 2, \dots, m),$$

---

[34] Cfr. (M_1), § 3, n. 2, TEOREMA IV, pp. 402-403.

[35] Cfr. (M_1), § 2, n. 2, TEOREMA I, pp. 371-380, e inoltre § 2, n. 3, TEOREMA II, pp. 380-395, e in particolare capoverso *a*), p. 381.

siano soddisfatte identicamenta in $\Delta_\infty^{(0)}$, e le

$$(V) \qquad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(g_{is}(0\,;\ x, y_1, \dots, y_h) +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{is}(X\,;\ x, y_1, \dots, y_h)\,;\ z_j(X\,;\ g_{is}(X\,;\ x, y_1, \dots, y_h)]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

identicamente in $D_\infty^{(0)}$.

b) *Per ogni indice i fissato tra i numeri* 1, 2, ... , *m le* (IV′) *costituiscono un sistema di h equazioni differenziali ordinarie* (*scritte in forma integrale*) *nelle funzioni incognite* (50); le (46) e (47) assicurano che a tale sistema si possono applicare i teoremi di esistenza e di unicità di CARATHÉODORY ([36]). Risultano così determinati gli *m* sistemi di funzioni (50), soddisfacenti le (IV′) nel campo $\Delta_\infty^{(0)}$.

c) Per costruire le funzioni (II), definite in $D_\infty^{(0)}$, ivi di classe G e soddisfacenti le (V), si segue un procedimento simile a quello tenuto in (M_1) § 2, n. 3, nella dimostrazione del TEOREMA II ([37]).

Sia n un intiero ≥ 2, e si ponga

$$\delta = \frac{a_0}{n}.$$

Per x appartenente all'intervallo $\left(-\frac{a_0}{2},\ 0\right)$ e per ogni h-*pla* reale $(y_1, \dots, y_h)$ si definiscano le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, mediante le

$$(51) \qquad z_i(x\,;\ y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e in tutto $D_\infty^{(0)}$ si definiscano le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, mediante le

$$(52) \qquad z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(g_{is}(0\,;\ x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{is}(X\,;\ x, y_1, \dots, y_h)\,;\ z_j^{(n)}(X - \delta, g_{is}(X\,;\ x, y_1, \dots, y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

([36]) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Fünktionen*, Teubner, Leipzig, 1918; cfr. Kap. XI, pp. 665-688, e in particolare ivi n. 582, p. 672, n. 583, p. 674.

([37]) Cfr. ivi in particolare capoverso *b*), pp. 381-385. Nel caso attuale il procedimento riesce notevolmente più semplice, perchè le funzioni (50) sono già note.

d) Le funzioni delle m successioni (ottenute per $i = 1, 2, \dots, m$)

$$z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \quad (n = 2, 3, \dots), \tag{53}$$

sono equilimitate nel campo $D_\infty^{(0)}$.

Infatti per ipotesi esistono m costanti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, tali che

$$| \Phi_i(y_1, \dots, y_h) - \Phi_i(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) | \leq \lambda_i \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{54}$$

per tutte le coppie di *h-ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$; dalle (46), (48), (52), (54), tenuto conto anche delle (IV′), segue

$$| z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - \Phi_i(y_1, \dots, y_h) | \leq \int_0^x \left[\lambda_i \sum_{r=1}^{h} M_{ir}(t) + N_i(t) \right] dt \leq \tag{55}$$

$$\leq \int_0^{a_0} \left[\lambda_i \sum_{r=1}^{h} M_{ir}(t) + N_i(t) \right] dt, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

in tutto $D_\infty^{(0)}$ e per qualsiasi intiero $n \geq 2$.

e) Per ogni n fissato, le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, sono lipschitziane in $y_1, \dots, y_h$ con costante di LIPSCHITZ indipendente da x. Infatti se $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ sono due distinte h-ple reali, dalle (49), (52), (54) segue che per ogni x di $(0, a_0)$ è

$$\frac{| z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |} \leq \tag{56}$$

$$\leq \lambda_i \frac{\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h) - g_{is}(0; x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |} +$$

$$+ \int_0^x L_1(X) \frac{\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |} \cdot \left[1 + \right.$$

$$+\frac{\sum_{j=1}^{m}\left|z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)) - z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x, \bar{y}, \dots, \bar{y}))\right|}{\sum_{s=1}^{h}\left|g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)\right|}\Bigg] dX,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Ma ([38])

$$(57)\qquad \frac{\sum_{s=1}^{h}\left|g_{is}(X; x; y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)\right|}{\sum_{s=1}^{h}\left|y_s - \bar{y}_s\right|} \leq$$

$$\leq e^{h\left|\int_X^x L(t)\,dt\right|} \leq e^{h\int_0^{a_0} L(t)\,dt}, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Sostituendo nelle (56) si ottengono le

$$(58)\qquad \frac{\left|z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y})\right|}{\sum_{s=1}^{h}\left|y_s - \bar{y}_s\right|} \leq \lambda_i\, e^{h\int_0^x L(t)\,dt} +$$

$$+\int_0^x L_1(X)\, e^{h\int_X^x L(t)\,dt}\left(1 + \frac{\sum_{j=1}^{m}\left|z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)) - z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h))\right|}{\sum_{s=1}^{h}\left|g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)\right|}\right) dX,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Per $0 \leq x \leq \delta$, tenendo conto delle (51) e (54), e posto

$$(59)\qquad K = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i,$$

([38]) Cfr. (M_1), § 1, n. 1, *a*) LEMMA I, pp. 360-362 form. (4); nel caso attuale si tenga conto delle (IV'), (46), (47).

le (58) divengono

$$\frac{|z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)|}{\sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|} \leq \lambda_i e^{h\int_0^x L(t)\,dt} +$$

$$+ (1 + K)\int_0^x L_1(X) e^{h\int_X^x L(t)\,dt}\, dX \leq e^{h\int_0^\delta L(t)\,dt}\left[\lambda_i + (1 + K)\int_0^\delta L_1(X)\,dX\right],$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Dimostrato così che le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, \dots, m)$, sono lipschitziane rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_h$ nel campo

$$0 \leq x \leq \delta, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

con ragionamento analogo si prova successivamente che tali funzioni sono lipschitziane rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_h$ nel campo

$$\delta \leq x \leq 2\delta, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

. . . . . .

e infine nel campo

$$(n - 1)\,\delta \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty.$$

Si possono dunque determinare m costanti $\lambda_i^{(n)}$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, tali che per ogni x di $(0, a_0)$ e per tutte le coppie di h-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ sia

$$(58') \quad |z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y})| \leq \lambda_i^{(n)} \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

f) *Le funzioni delle* m *successioni* (53) *per ogni* x *fissato di* $(0, a_0)$ *sono equilipschitziane in* $y_1, \dots, y_h$ (*con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x).

Si indichi infatti con $U^{(n)}(x)$ il limite superiore (che, per le (58′), è certo finito) dell'espressione

$$(60) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{m} | z_i^{(n)}(X, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(X, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |}$$

nel campo ([39])

$$0 \leq X \leq x, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty.$$

La funzione $U^{(n)}(x)$ è in $(0, a_0)$ limitata, non negativa e non decrescente; dalle (58) seguono le

$$(61) \qquad \frac{| z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |} \leq \lambda_i e^{h\int_0^x L(t)\,dt} +$$

$$+ \int_0^x L_1(X)\, e^{h\int_X^x L(t)\,dt} (1 + U^{(n)}(X))\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Sommando le m relazioni (61) e tenendo conto della (59), si ottiene la

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} | z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |} \leq K e^{h\int_0^x L(t)\,dt} +$$

$$+ m \int_0^x L_1(X)\, e^{h\int_X^x L(t)\,dt} (1 + U^{(n)}(X))\, dX,$$

dalla quale, tenendo conto del modo, in cui è stata definita la funzione

---

([39]) Non ha importanza il fatto che l'espressione (60) sia indeterminata per $y_1 = \bar{y}_1, \dots, y_h = \bar{y}_h$.

$U^{(n)}(x)$, segue la

$$U^{(n)}(x) \leq K\, e^{h\int_0^x L(t)\,dt} + m\int_0^x L_1(X)\, e^{h\int_X^x L(t)\,dt}\,(1 + U^{(n)}(X))\,dX,$$

che si può anche scrivere

$$e^{-h\int_0^x L(t)\,dt}\, U^{(n)}(x) \leq K + m\int_0^x L_1(X)\, e^{-h\int_0^X L(t)\,dt}\,(1 + U^{(n)}(X))\,dX.$$

Posto

$$V^{(n)}(x) = e^{-h\int_0^x L(t)\,dt}\, U^{(n)}(x), \tag{62}$$

si ottiene la disuguaglianza

$$0 \leq V^{(n)}(x) \leq K + m\int_0^x L_1(X)\, e^{-h\int_0^X L(t)\,dt}\,dX + m\int_0^x L_1(X)\, V^{(n)}(X)\,dX.$$

Da questa, per una nota estensione del LEMMA di GRONWALL ([40]), segue

$$0 \leq V^{(n)}(x) \leq K\, e^{m\int_0^x L_1(t)\,dt} + m\int_0^x e^{m\int_X^x L_1(t)\,dt}\, L_1(X)\, e^{-h\int_0^X L(t)\,dt}\,dX,$$

Tenuto conto della (62) e posto

$$U(x) = K\, e^{\int_0^x [mL_1(t) + h\,L(t)]\,dt} + m\int_0^x L_1(X)\, e^{\int_X^x [mL_1(t) + h\,L(t)]\,dt}\,dX,$$

([40]) Cfr. G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Monografie matematiche del C. N. R., Ediz. Cremonese, Roma 1956, Cap. I, § 2, n. 1, pp. 15-16. Nel caso presente il LEMMA di GRONWALL si può applicare, senza preoccuparsi se la funzione $V^{(n)}(x)$ sia o no continua in $(0, a_0)$.

si trova che in tutto $(0, a_0)$ è

$$0 \leq U^{(n)}(x) \leq U(x)$$

Dalle (61) seguono allora le

$$(63)\qquad \frac{|z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)|}{\sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|} \leq \lambda_i\, e^{\int_0^x L(t)\,dt} +$$

$$+\int_0^x L_1(X)\, e^{\int_X^x L(t)\,dt}\,(1 + U(X))\,dX \leq e^{\int_0^{a_0} L(t)\,dt}\left[\lambda_i + \int_0^{a_0} L_1(X)\,(1 + U(X))\,dX\right] = H_i,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Le (63) provano quanto abbiamo asserito al principio del presente capoverso.

g) Le funzioni delle m successioni (53), *per ogni h-pla reale fissata* $(y_1, \dots, y_h)$, *sono equiassolutamente continue in x nell'intervallo* $(0, a_0)$. Se x', x'' sono due punti di $(0, a_0)$ ed è p. es., $x' < x''$, dalle (48), (49), (52), (54) con calcoli evidenti seguono le

$$|z_i^{(n)}(x', y_1,\dots,y_h) - z_i^{(n)}(x'', y_1,\dots,y_h)| \leq \lambda_i \sum_{s=1}^{h} |g_{is}(0; x', y_1,\dots,y_h) - g_{is}(0; x'', y_1,\dots,y_h)| +$$

$$+\int_{x'}^{x''} N_i(t)\,dt + \int_0^{a^0} L_1(X)\cdot\left[\sum_{s=1}^{h} |g_{is}(X; x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x'', y_1, \dots, y_h)|\right]\times$$

$$\times\left[1 + \frac{\sum_{j=1}^{m} |z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x', y_1, \dots, y_h)) - z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x'', y_1,\dots,y_h))|}{\sum_{s=1}^{h} |g_{is}(X; x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x'', y_1, \dots, y_h)|}\right] dX,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

cioè, tenuto conto delle (63),

$$(64)\qquad |z_i^{(n)}(x', y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x'', y_1, \dots, y_h)| \leq$$

$$\leq \lambda_i \sum_{s=1}^{h} | g_{is}(0\,;\, x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(0\,;\, x'', y_1, \dots, y_h) | + \int_{x'}^{x''} N_i(t)\, dt +$$

$$+ \left(1 + \sum_{j=1}^{m} H_j\right) \cdot \int_0^{a_0} L_1(X) \cdot \left[\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(X\,;\, x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X\,;\, x'', y_1, \dots, y_h) | \right] dX,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Tenuto conto delle (46) e (47) è [41]

$$\sum_{r=1}^{h} | g_{is}(X\,;\, x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X\,;\, x'', y_1, \dots, y_h) | \leq e^{h\int_0^{a_0} L(t)\, dt} \sum_{s=1}^{h} \int_{x'}^{x''} M_{is}(t)\, dt,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Da queste e dalle (64) seguono le

$$| z_i^{(n)}(x', y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x'', y_1, \dots, y_h) | \leq \int_{x'}^{x''} N_i(t)\, dt +$$

$$+ \left[\lambda_i + \left(1 + \sum_{j=1}^{m} H_j\right) \int_0^{a''} L_1(t)\, dt \right] e^{h\int_0^{a_0} L(t)\, dt} \sum_{s=1}^{h} \int_{x'}^{x''} M_{is}(t)\, dt, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Da queste ultime disuguaglianze e dalla definizione di assoluta continuità segue quanto è asserito al principio del presente capoverso.

h) Dai risultati dei capoversi *d*), *f*), *g*) segue che *le m successioni* (53) *sono costituite di funzioni equilimitate ed equicontinue nel campo* $D_\infty^{(0)}$. In modo noto [42] si prova l'esistenza delle funzioni (II), che sono definite nel campo $D_\infty^{(0)}$, sono ivi di classe G, e soddisfano identicamente le (V) nel campo $D_\infty^{(0)}$. Ne segue che le funzioni (II) soddisfano il sistema (I') in quasi tutto $D_\infty^{(0)}$ e le (III) identicamente in $y_1, \dots, y_h$ [43].

---

[41] Cfr. (M_1), § 1, n. 1, *b*), LEMMA II, pp. 362-363, form. (9).

[42] Cfr. anche (M_1), § 2, n. 3, *h*), pp. 393-395.

[43] Cfr. (M_1), § 2, n. 2, TEOREMA I, parte II), p. 373 e pp. 377-380.

7. Osservazioni.

a) La soluzione (II) del problema di CAUCHY (inteso in senso generalizzato) relativo al sistema (I'), della quale nel TEOREMA III sono state dimostrate l'esistenza e l'unicità, dipende con continuità dai valori iniziali in tutto $D_{\infty}^{(0)}$ (44).

b) Le funzioni (II), per quasi tutte le *h-ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$, soddisfano per ogni x di $(0, a_0)$ il sistema

$$(\text{VI}') \quad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h) + \int_0^x \Big[- \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}(X, y_1, \dots, y_h) \frac{\partial z_i(X, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} +$$

$$+ f_i(X, y_1, \dots, y_h; z_1(X, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(X, y_1, \dots, y_h)) \Big] dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

8. Un ulteriore teorema.

TEOREMA IV « *Le costanti* a_0, $b_r^{(0)}$, b_r, $(r = 1, 2, \dots, h)$, Ω_i, $(i = 1, 2, \dots, m)$, *e le funzioni* $M_r^{(0)}(x)$, $M_r(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L(x)$ *siano quelle stesse introdotte nel* TEOREMA I, *e soddisfino le condizioni* (1), (2), (7); *sia inoltre* $L_1(x)$ *una ulteriore funzione, definita in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continua, non negativa e integrabile. Le funzioni* $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(r = 1, 2, \dots, h;$ $i = 1, 2, \dots, m)$ *sono definite nel campo*

$$T^{(0)} : \; 0 \leq x \leq a_0, \; -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt, \; (r = 1, 2, \dots, h),$$

e le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ *siano definite nel campo* C, *indicato nel* TEOREMA I. *Per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$(3') \qquad | \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) | \leq M_r(x), \; (r = 1, 2, \dots, h; \; i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$, *tali che il punto* $(x, y_1, \dots, y_h)$ *appartenga*

---

(44) Cfr. (M_1), § 3, n. 1, TEOREMA III, pp. 397-402.

al campo $T^{(0)}$,

$$(5') \qquad | \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) - \varrho_{ir}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) | \leq L(x) \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s | ,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h\,;\ i = 1, 2, \dots, m).$$

per tutte le coppie di h*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$, *tali che i punti* $(x, y_1, \dots, y_h)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ *appartengano al campo* $T^{(0)}$,

$$(4) \qquad | f_i(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m) | \leq N_i(x),\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le $(h + m)$*-ple reali, tali che il punto* $(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m)$ *appartenga al campo* C,

$$(6') \qquad | f_i(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h\,;\ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) | \leq$$

$$\leq L_1(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s | + \sum_{j=1}^{m} | z_j - \bar{z}_j | \right\};$$

per tutte le coppie di $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h\,;\ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$, *tali che i punti* $(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h\,;\ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ *appartengano al campo* C.

Le funzioni $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$ *siano definite nel campo*

$$R: \qquad -b_r \leq y_r \leq b_r,\ (r = 1, 2, \dots, h),$$

siano ivi lipschitziane nel complesso delle variabili e soddisfino le (8) *e* (9).

Sia allora a *il massimo numero* $(\leq a_0)$ *soddisfacente tutte le disuguaglianze* [45]

$$(11_2) \qquad \int_0^a N_i(t)\, dt \leq \Omega_i - \mu_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(11_3) \qquad \int_0^a M_r(t)\, dt \leq b_r, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

---

[45] Confrontando l'enunciato del presente TEOREMA IV con quello del TEOREMA I si vede che nel caso attuale, in cui il sistema è semilineare, non interviene la condizione (11_1) e ciò perchè dal TEOREMA III segue che per il sistema semilineare (I') è $a' = a_0$. Si tengano presenti anche le osservazioni fatte nella nota [15].

mentre

$$\int_0^x M_r(t)\,dt < b_r\,, \quad (r = 1, 2, \dots, h), \text{ per } 0 \leq x < a.$$

Esiste allora uno e un solo sistema di funzioni (II), *definite nel campo*

$$T: \quad 0 \leq x \leq a, \; -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M(t)\,dt, \; (r = 1, 2, \dots, h),$$

ivi di classe G, soddisfacenti il sistema (I') *in quasi tutto T, e soddisfacenti le* (III) *per tutte le h-ple reali* $(y_1, \dots, y_h)$, *appartenenti al campo R* ».

La dimostrazione del presente TEOREMA IV è simile a quello del TEOREMA I ; nel caso attuale si utilizza il risultato del precedente TEOREMA III, mentre nella dimostrazione del TEOREMA I si erano utilizzati i risultati conseguiti in (M_1). Anche nel caso attuale valgono, in particolare, le osservazioni fatte nel n. 3, *a*), *b*) ; in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo T con una retta $y_1 = \text{cost.}, \dots, y_h = \text{cost.}$ le funzioni (II) soddisfano il sistema (VI'). Si possono pure sviluppare considerazioni del tipo di quelle fatte nel n. 3, *c*).