ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA CIBRARIO

Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 3, n^o 3-4 (1934), p. 255-285

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_3-4_255_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INTORNO AD UNA EQUAZIONE LINEARE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO MISTO IPERBOLICO-ELLITTICA

di MARIA CIBRARIO (Torino).

In un lavoro precedente [1] si sono classificati i tipi distinti ai quali si può ridurre, con opportuni cambiamenti di variabili, una equazione lineare alle derivate parziali di tipo misto; una delle equazioni trovate, che si era detta iperbolico-ellittica del secondo tipo, è la seguente:

$$xz_{xx}+z_{yy}=0, \tag{A}$$

che ci proponiamo qui di studiare [2]. La (A) è di tipo iperbolico per $x<0$ e di tipo ellittico per $x>0$; l'asse y costituisce la *curva parabolica* della (A).

Le caratteristiche della (A), reali per $x\leqslant 0$, sono le parabole:

$$(y-y_0)^2+4x=0, \tag{1}$$

di cui la parte corrispondente a $y>y_0$ costituisce la caratteristica di un sistema per il punto $(0, y_0)$, mentre la parte corrispondente a $y<y_0$ costituisce quella del secondo sistema per il punto $(0, y_0)$; esse hanno come inviluppo l'asse y, cioè la curva parabolica dell'equazione.

Nel semipiano $x\leqslant 0$ il cambiamento di variabili:

$$\xi=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}, \qquad \eta=y+2(-x)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

muta la (A) nella:

$$z_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}(z_\xi-z_\eta)=0, \tag{3}$$

che è l'equazione di EULERO-POISSON: $z_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\xi-\eta}(z_\xi-z_\eta)=0$, per $\beta=-\frac{1}{2}$; la (3) nel lavoro citato sopra era detta ridotta iperbolica della (A). Però dalle

---

[1] M. CIBRARIO: *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto.* Rendic. del R. Istituto Lombardo, vol. LXV (1932).

[2] Alcuni dei risultati contenuti nel presente lavoro sono già stati pubblicati nella nota: *Alcuni teoremi di esistenza e di unicità per l'equazione*: $xz_{xx}+z_{yy}=0$. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 68 (1932-1933).

proprietà della (3) non si possono ricavare i teoremi di esistenza e di unicità per la (A) nel semipiano iperbolico; per $x=0$ il jacobiano del cambiamento di variabili (2), che è $2(-x)^{-\frac{1}{2}}$ diviene infinito. Si dovrà dunque studiare direttamente la (A), servendosi delle proprietà della (3) solo per $x<0$.

Nel semipiano $x\geqslant 0$ il cambiamento di variabili:

$$X=2x^{\frac{1}{2}}, \qquad Y=y \tag{4}$$

muta la (A) nella:

$$z_{XX}+z_{YY}-\frac{z_X}{X}=0, \tag{5}$$

che nel lavoro precedente si era chiamata ridotta ellittica della (A). Poichè: $\frac{dX}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}$, dallo studio della (5) si potranno ricavare proprietà analoghe per la (A) solo per $x>0$.

È molto notevole il fatto che i valori di una soluzione della (A), D^{II} [3] anche per $x=0$, sull'asse y *non possono essere arbitrari*; invero per $x=0$ la (A) si riduce a $z_{yy}=0$, da cui segue: $z(0,y)=my+n$, dove m ed n sono costanti.

Prendendo dunque come incognita $z(x,y)-my-n$, ci si riduce a supporre $z(0,y)=0$, e a ricercare in tutti i teoremi di esistenza gli integrali della (A) nulli sull'asse y. Tale circostanza lascia presumere fin d'ora che i teoremi di unicità e di esistenza per la (A) varranno sotto condizioni diverse da quelle che abitualmente si incontrano nel campo delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine.

Il dominio D in cui si studiano i teoremi di esistenza e di unicità per la (A) è limitato da una curva γ posta nel semipiano ellittico e terminata a due punti M e N dell'asse y, e dagli archi MR e NR di caratteristiche nel semipiano iperbolico (vedi fig. 1); D è dunque un dominio dello stesso tipo di quello considerato dal prof. TRICOMI [4] a proposito dell'equazione:

$$yz_{xx}+z_{yy}=0.$$

Nel seguito indicheremo sempre con D tale dominio, con C il dominio (posto nel semipiano $x\geqslant 0$) limitato da γ e dall'asse y, e con T il trilatero (posto nel semipiano $x\leqslant 0$) limitato dall'asse y e dagli archi MR e NR, così che D è costituito dalle due parti C e T.

Scopo principale del presente lavoro è di dimostrare che esiste ed è unica nel dominio D la funzione $z(x,y)$, che all'interno del dominio stesso è funzione D^{II} e soddisfa la (A), e che assume valori assegnati *soltanto sulla curva* γ; però

---

[3] Con funzioni D^n intendiamo, qui e in seguito, le funzioni finite e continue con tutte le loro derivate continue, fino a quelle di ordine n incluse.

[4] F. TRICOMI: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto*. Memorie della R. Acc. dei Lincei, S. 5ª, vol. XIV, fasc. VII, 1923.

nel corso del lavoro sono dimostrati parecchi altri risultati relativi agli integrali della (A).

Precisamente nel § 1 si studia l'equazione nel semipiano iperbolico, dimostrando, anzi tutto, che esiste ed è unico nel trilatero T l'integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti sul segmento MN:

$$z(0, y) = 0, \qquad z_x(0, y) = \nu(y),$$

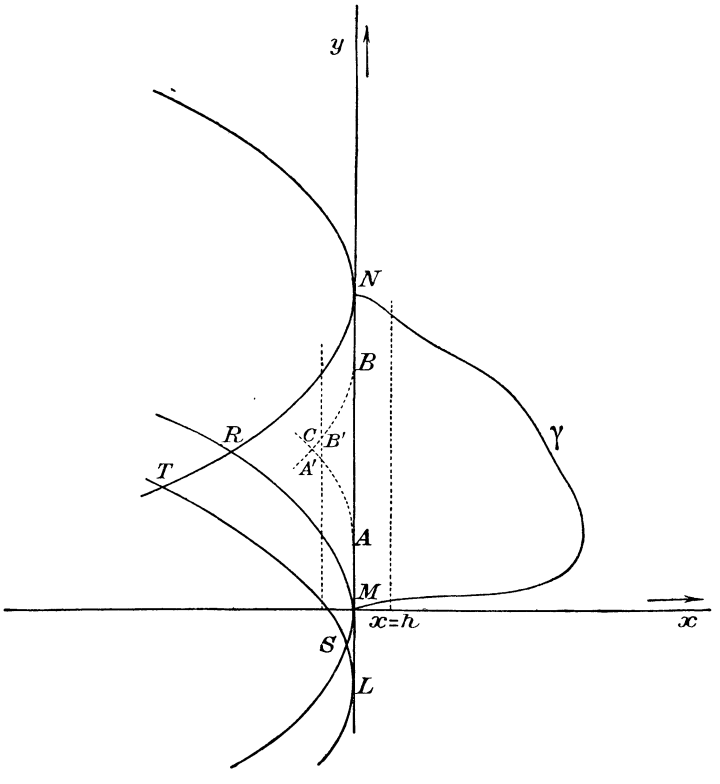

Fig. 1.

dove $\nu(y)$ è una funzione assegnata; si dimostra pure che nel trilatero T esiste ed è unico l'integrale della (A), che si riduce ad una funzione assegnata su *uno solo* degli archi di caratteristiche MR o NR (vedi fig. 1), e se ne ricava subito una conseguenza notevole.

Nel § 2 si inizia lo studio dell'intiero dominio D, si dimostra che *in tutto* D (e non solo nel dominio C) è unico l'integrale della (A), che assume valori dati su γ; si dimostra poi il teorema di esistenza di un integrale della (A), che è definito in un dominio posto nel semipiano ellittico, e si riduce ad una funzione assegnata sul contorno del dominio stesso, prima quando tale dominio non ha

punti a comune coll'asse y e poi per il dominio C, limitato da una curva γ e dall'asse y, caso in cui basta che la funzione sia data su γ soltanto.

Per estendere il teorema di esistenza a quest'ultimo caso è seguito un metodo dovuto al prof. ASCOLI (5), metodo che si rivela molto conveniente in questo tipo di problemi; non si presenta nessuna particolare difficoltà per dimostrare che la funzione $z(x, y)$ costruita con tale metodo soddisfa la (A) e si riduce ai valori assegnati su γ; invece si è dovuto tenere un procedimento nuovo per dimostrare che la $z(x, y)$ si annulla sull'asse y (come si è visto in principio ci si riduce sempre al caso $z(0, y)=0$).

Per provare che, data $z(x, y)$ su γ, essa è determinata in tutto D, basta provare che la $z_x(0, y)$ esiste ed è funzione D^{II} nei punti del segmento MN, perchè note $z(0, y)$ e $z_x(0, y)$, la $z(x, y)$ è determinata nel trilatero T. La dimostrazione che $z_x(0, y)$ esiste ed è funzione D^{II} costituisce una delle difficoltà della presente ricerca.

A tale scopo nel § 3 si introducono delle soluzioni particolari della (A), in cui compaiono le funzioni sferiche generalizzate del GEGENBAUER, già utilizzate dal prof. TRICOMI nel suo lavoro (6).

Si dimostra poi nel § 4 il teorema più generale di esistenza, prima nel caso in cui la curva γ ha una forma particolare, è cioè quella che diremo *una curva normale per la* (A), e poi in generale. L'integrale della (A) di cui si è dimostrata così l'esistenza è funzione analitica di x, y nei punti interni a D, sia nel semipiano iperbolico, che nel semipiano ellittico. Si ottiene pure il risultato notevole che ogni integrale della (A), definito in un dominio attraversato dall'asse y, è analitico.

Si dimostra anche che all'interno del dominio limitato da una curva normale c nel semipiano $x \geqslant 0$ e dalle caratteristiche per gli estremi di questa nel semipiano $x \leqslant 0$, esiste ed è unico l'integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0, y)=0, \qquad z_x(0, y)=\nu(y),$$

dove $\nu(y)$ è una funzione analitica, risolvendo così il problema di CAUCHY anche nel semipiano ellittico, e si ricavano di qui alcune conseguenze interessanti, che permettono di estendere al semipiano ellittico i risultati trovati alla fine del § 1 per il semipiano iperbolico.

---

(5) G. ASCOLI: *Sull'equazione di Laplace nello spazio iperbolico.* Math. Zeitschrift, B. 31, H. 1, pp. 45-96; vedi per questo metodo pp. 76-81.

(6) F. TRICOMI, l. c., pp. 172-175. Pare dunque che gli sviluppi in serie di funzioni di GEGENBAUER abbiano una notevole importanza in questo tipo di problemi.

§ 1.

Iniziamo lo studio della (A) nel semipiano iperbolico, e diamo, anzi tutto, la formula di RIEMANN direttamente per la (A) in un caso che ci servirà nel seguito del presente paragrafo. L'equazione aggiunta della (A) è, indicando con X, Y le coordinate correnti:

(1) $$Xu_{XX}+u_{YY}+2u_X=0.$$

Si vede subito che:

(2) $$u(Xz_{XX}+z_{YY})-z(Xu_{XX}+u_{YY}+2u_X)= \\ =\frac{\partial}{\partial X}(Xuz_X-Xzu_X-uz)+\frac{\partial}{\partial Y}(uz_Y-zu_Y)=0.$$

Sia $C(x, y)$ un punto del semipiano iperbolico ($x<0$); le caratteristiche per C hanno equazioni:

(3) $$Y-2(-X)^{\frac{1}{2}}=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}=a; \qquad Y+2(-X)^{\frac{1}{2}}=y+2(-x)^{\frac{1}{2}}=b;$$

a e b risultano essere le ordinate delle intersezioni A e B (vedi fig. 1) delle due caratteristiche per C coll'asse Y. Intersechiamo tali caratteristiche colla retta:

$$X=-\lambda^2, \qquad (0<\lambda^2<-x).$$

Le ordinate dei punti A' e B' di intersezione saranno:

(4) $$a'=a+2\lambda; \qquad b'=b-2\lambda.$$

Se z è un integrale della (A) e u un integrale della (1), per la (2) risulta:

$$\iint_{A'B'C}\left\{\frac{\partial}{\partial X}(Xuz_X-Xzu_X-uz)+\frac{\partial}{\partial Y}(uz_Y-zu_Y)\right\}dXdY=0,$$

dove l'integrale è esteso al trilatero $A'B'C$, cioè:

(5) $$\int_{a'}^{b'}(-\lambda^2uz_X+\lambda^2zu_X-uz)_{X=-\lambda^2}dY+\int_{B'C}(Xuz_X-Xzu_X-uz)dY- \\ -(uz_Y-zu_Y)dX+\int_{CA'}(Xuz_X-Xzu_X-uz)dY-(uz_Y-zu_Y)dX=0.$$

Il secondo integrale è fatto lungo la caratteristica $B'C$, di equazione $Y+2(-X)^{\frac{1}{2}}=b$; dunque:

$$\int_{B'C}(Xuz_X-Xzu_X-uz)dY-(uz_Y-zu_Y)dX= \\ =\int_{-\lambda^2}^{x}\left[(-X)^{\frac{1}{2}}\left(z\frac{du}{dX}-u\frac{dz}{dX}\right)-uz(-X)^{-\frac{1}{2}}\right]dX= \\ =\int_{-\lambda^2}^{x}(-X)^{\frac{1}{2}}z\left[2\frac{du}{dX}+\frac{3}{2X}u\right]dX-(-x)^{\frac{1}{2}}(uz)_C+\lambda(uz)_{B'},$$

dove l'ultima espressione è ottenuta dalla precedente integrando per parti il termine $(-X)^{\frac{1}{2}}u\frac{dz}{dX}$. Analogamente:

$$\int_{CA'}(Xuz_X-Xzu_X-uz)dY-(uz_Y-zu_Y)dX=$$
$$=\int_x^{-\lambda^2}\left[(-X)^{\frac{1}{2}}\left(u\frac{dz}{dX}-z\frac{du}{dX}\right)+(-X)^{-\frac{1}{2}}uz\right]dX=$$
$$=-\int_x^{-\lambda^2}(-X)^{\frac{1}{2}}z\left[2\frac{du}{dX}+\frac{3}{2X}u\right]dX+\lambda(uz)_{A'}-(-x)^{\frac{1}{2}}(uz)_C.$$

Se u è un integrale della (1), che lungo le caratteristiche CA' e CB' soddisfa la:

$$2\frac{du}{dX}+\frac{3}{2X}u=0,$$

cioè si riduce a:

$$u=k(-X)^{-\frac{3}{4}},$$

dove k è una costante, dalla (5) si ottiene la formula:

$$(6)\qquad 2(-x)^{\frac{1}{2}}(uz)_C=\lambda(uz)_{A'}+\lambda(uz)_{B'}+\int_{a'}^{b'}(-\lambda^2uz_X+\lambda^2zu_X-uz)_{X=-\lambda^2}dY.$$

Ora, posto $Xu=v$, la (1) si trasforma nella:

$$Xv_{XX}+v_{YY}=0,$$

cioè nella (A). Un integrale particolare di questa è (7):

$$v(X,\,Y;\,x,\,y)=D^{\frac{1}{2}}F\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2},\,1,\,\sigma\right),$$

dove:

$$(7)\qquad D=4[(-x)^{\frac{1}{2}}+(-X)^{\frac{1}{2}}]^2-(y-Y)^2=$$
$$=[y+2(-x)^{\frac{1}{2}}-Y+2(-X)^{\frac{1}{2}}][Y+2(-X)^{\frac{1}{2}}-y+2(-x)^{\frac{1}{2}}]=$$
$$=(b-A)(B-a),$$

in cui si è posto:

$$A=Y-2(-X)^{\frac{1}{2}},\qquad B=Y+2(-X)^{\frac{1}{2}};$$

A e B sono le ordinate delle intersezioni coll'asse Y delle caratteristiche per il punto variabile (X, Y), e a e b, date dalle (3), quelle delle intersezioni coll'asse Y

---

(7) Con uno dei cambiamenti di variabili dati nell'introduzione del presente lavoro (formule (2)), la (A) si muta nell'equazione di EULERO-POISSON (equazione (3) dell'introduzione); nei punti del trilatero $A'B'C$ è $X\neq 0$, e quindi si può eseguire il cambiamento di variabili indicato; l'integrale particolare $v(X, Y; x, y)$ è dato dal DARBOUX: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2e edit., p. 2, livre IV, chap. III (t. II, pp. 83 e seg.).

delle caratteristiche per il punto fisso (x, y); $F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)$ è la funzione ipergeometrica e σ è il birapporto dei quattro punti A, B, a, b, cioè:

$$\sigma = \frac{(a-A)(B-b)}{(b-A)(B-a)} = \frac{4[(-x)^{\frac{1}{2}} - (-X)^{\frac{1}{2}}]^2 - (y-Y)^2}{4[(-x)^{\frac{1}{2}} + (-X)^{\frac{1}{2}}]^2 - (y-Y)^2}; \tag{8}$$

$v(X, Y; x, y)$ è reale, finita e continua per:

$$D \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1. \tag{9}$$

Nel nostro caso, poichè per (X, Y) variabile nel trilatero ABC risulta:

$$a \leqslant A \leqslant B \leqslant b,$$

queste due condizioni sono certo soddisfatte (8); è $\sigma = 0$ per $A = a$ o per $B = b$, cioè sulle caratteristiche per il punto $C(x, y)$; è $\sigma = 1$ per $X = 0$. Si ha:

$$F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = 1, \tag{10}$$

$$F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{4}{\pi}. \tag{11}$$

Si ottiene dunque:

$$u(X, Y; x, y) = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{X} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right). \tag{12}$$

Si verifica subito che sulle caratteristiche CA e CB è:

$$u(X, Y; x, y) = -4(-x)^{\frac{1}{4}}(-X)^{-\frac{3}{4}}.$$

Nella formula (6) compare anche la $u_X(X, Y; x, y)$, di cui dovremo dunque studiare l'andamento. Per una nota formula sulle funzioni ipergeometriche:

$$\frac{dF\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)}{d\sigma} = \frac{1}{4} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right), \tag{13}$$

dove la $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right)$ è certo finita e continua per $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Con qualche riduzione si ottiene:

$$\sigma_X = \frac{8(-x)^{\frac{1}{2}}[4(X-x) - (y-Y)^2]}{(-X)^{\frac{1}{2}} D^2}.$$

---

(8) La condizione $\sigma \leqslant 1$ equivale alla:

$$(a-A)(B-b) \leqslant (b-A)(B-a); \qquad aB - AB - ab + Ab \leqslant bB - AB - ab + Aa;$$
$$0 \leqslant (B-A)(b-a),$$

certo soddisfatta.

Dunque:

$$(14)\qquad \frac{\partial F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)}{\partial X} = 2(-x)^{\frac{1}{2}}(-X)^{-\frac{1}{2}} D^{-2}[4(X-x)-(y-Y)^2] F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right).$$

Infine:

$$(15)\qquad \frac{\partial u(X, Y; x, y)}{\partial X} = 2[(-x)^{\frac{1}{2}} + (-X)^{\frac{1}{2}}](-X)^{-\frac{3}{2}} D^{-\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right) -$$
$$- X^{-2} D^{\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right) -$$
$$- 2(-X)^{-\frac{3}{2}} D^{-\frac{3}{2}} (-x)^{\frac{1}{2}} [4(X-x)-(y-Y)^2] F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right).$$

Tale funzione è reale, finita e continua per $D>0$, $X \neq 0$, cioè certamente per (X, Y) variabile nel trilatero ABC, tolto il segmento AB. Sostituendo a $u(X, Y; x, y)$ il suo valore nella formula (6) si ottiene la:

$$(16)\qquad z(x, y) = (-x)^{\frac{1}{4}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \frac{z(-\lambda^2, b') + z(-\lambda^2, a')}{2} + \frac{1}{8} \int_{a'}^{b'} (\lambda^2 u z_X - \lambda^2 z u_X + u z)_{X=-\lambda^2} dY,$$

che è appunto la relazione, necessaria per quanto segue, di cui si era parlato in principio.

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA I. - *Data una funzione* D^{II} $\nu(y)$, *definita per* $m \leq y \leq n$, *esiste uno e un solo integrale della* (A), *che è funzione* D^{II} *anche per* $x=0$, *e soddisfa le condizioni ai limiti:*

$$(17)\qquad z(0, y) = 0; \qquad z_x(0, y) = \nu(y) \qquad (m \leq y \leq n);$$

tale integrale è definito nel trilatero T limitato dal segmento MN dell'asse y (*dove M e N hanno ordinate m e n*) *e dagli archi di caratteristiche MR e NR* (fig. 1) *ed è dato dalla formula:*

$$(B)\qquad \boxed{z(x, y) = \frac{8x}{\pi} \int_0^1 \nu[Y(t)] t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt}$$

dove:

$$(18)\qquad Y(t) = a + (b-a)t = y - 2(-x)^{\frac{1}{2}} + 4(-x)^{\frac{1}{2}} t.$$

Se esiste una funzione $z(x, y)$, che soddisfa il teorema, dalla condizione $z(0, y) = 0$, segue che si può porre:

$$z(x, y) = xM(x, y),$$

dove $M(x, y)$ è finita e continua anche per $x=0$, cioè tale che in particolare

potrà trovarsi un numero positivo R in modo da aversi:

$$|M(x, y)| < R. \tag{19}$$

La $z(x, y)$, se esiste, soddisfa la relazione (16); nel secondo membro della (16) poniamo:

$$z(-\lambda^2, Y) = -\lambda^2 M(-\lambda^2, Y),$$

e per u e u_X sostituiamo le loro espressioni (12) e (15) in cui si faccia $X = -\lambda^2$. Si ottiene così:

$$\begin{aligned} z(x, y) = &-(-x)^{\frac{1}{4}}\lambda^{\frac{3}{2}}\frac{M(-\lambda^2, b') + M(-\lambda^2, a')}{2} + \\ &+\frac{1}{8}\int_{a'}^{b'}\Big\{-z_X(-\lambda^2, Y)D^{\frac{1}{2}}F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big) + \\ &+2\lambda D^{-\frac{1}{2}}[(-x)^{\frac{1}{2}} + \lambda]F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big)M(-\lambda^2, Y) + \\ &+2\lambda(-x)^{\frac{1}{2}}D^{-\frac{3}{2}}[4(\lambda^2 + x) + (y - Y)^2]F\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\Big)M(-\lambda^2, Y)\Big\}dY \end{aligned} \tag{20}$$

dove, tenendo conto delle (3) e (7), è:

$$D = (b + 2\lambda - Y)(2\lambda + Y - a). \tag{21}$$

Nel secondo membro della (20) facciamo tendere λ a zero; i termini integrati tendono a zero; così pure si vede subito che tendono a zero, per λ tendente a zero, i termini:

$$\lambda I_1 = \lambda\int_{a'}^{b'}(b + 2\lambda - Y)^{-\frac{1}{2}}(2\lambda + Y - a)^{-\frac{1}{2}}F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big)M(-\lambda^2, Y)dY$$

$$\lambda I_2 = \lambda\int_{a'}^{b'}(b + 2\lambda - Y)^{-\frac{3}{2}}(2\lambda + Y - a)^{-\frac{3}{2}}[4(\lambda^2 + x) + (y - Y)^2]F\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\Big)M(-\lambda^2, Y)dY.$$

Infatti si può determinare una quantità K tale che in tutto T sia:

$$F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big) < K, \qquad F\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\Big) < K;$$

inoltre per $a \leqslant Y \leqslant b$ risulta (9):

$$|4(\lambda^2 + x) + (y - Y)^2| < 4|x|,$$

---

(9) La funzione $\varphi(Y) = 4(\lambda^2 + x) + (Y - y)^2$ ha un minimo per $Y = y$; dunque $|\varphi(Y)|$ nell'intervallo $a \leqslant Y \leqslant b$ assume il massimo valore per $Y = y$, o per $Y = a$ o per $Y = b$; ma $|\varphi(y)| = 4|x| - 4\lambda^2$; $\varphi(a) = \varphi(b) = 4\lambda^2$, e poichè $\lambda^2 < |x|$, segue che:

$$|\varphi(Y)| < 4|x| \qquad \text{per } a \leqslant Y \leqslant b.$$

e tenendo presenti la (19) e le (4), si ottiene:

$$\lambda|I_1|<\lambda KR\int_{a+2\lambda}^{b-2\lambda}(b+2\lambda-Y)^{-\frac{1}{2}}(2\lambda+Y-a)^{-\frac{1}{2}}dY$$

$$\lambda|I_2|<4\lambda KR|x|\int_{a+2\lambda}^{b-2\lambda}(b+2\lambda-Y)^{-\frac{3}{2}}(2\lambda+Y-a)^{-\frac{3}{2}}dY,$$

e si è già dimostrato in un lavoro precedente ([10]) che le espressioni che compaiono a secondo membro tendono a zero. Allora:

$$z(x,y)=-\frac{1}{8}\lim_{\lambda\to 0}\int_{a+2\lambda}^{b-2\lambda}(b+2\lambda-Y)^{\frac{1}{2}}(2\lambda+Y-a)^{\frac{1}{2}}F\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,\sigma\right)z_X(-\lambda^2,Y)dY.$$

Per $\lambda=0$, è $\sigma=1$, come si verifica facilmente; tenendo conto della (11) si trova:

$$z(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_a^b(b-Y)^{\frac{1}{2}}(Y-a)^{\frac{1}{2}}\nu(Y)dY,$$

e, posto: $Y=a+(b-a)t$, ricordando che: $b-a=4(-x)^{\frac{1}{2}}$, si ottiene la formula cercata:

(B) $$z(x,y)=\frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu[Y(t)]dt,$$

dove $Y(t)$ è dato dalla (18).

La formula così trovata mostra che il valore di $z(x,y)$ in un punto C di T dipende dai valori, che assume $\nu(y)$ nei *soli* punti del segmento $a\leqslant y\leqslant b$ dell'asse y, avente per estremi i punti A e B in cui questo tocca la caratteristiche per il punto C (vedi fig. 1).

Se dunque esiste una funzione $z(x,y)$, che soddisfa il teorema, essa è data in T dalla formula (B), ed è quindi unica (se cioè $\nu(y)=0$ per $m\leqslant y\leqslant n$, è $z(x,y)=0$, in tutto T). Viceversa la funzione $z(x,y)$, data dalla formula (B), è D^{II} anche per $x=0$, è integrale della (A) e soddisfa le condizioni ai limiti (17).

Infatti si ha $z(0,y)=0$; inoltre:

$$z_x(x,y)=\frac{8}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu[Y(t)]dt+\frac{8}{\pi}(-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu'[Y(t)]dt$$

([10]) M. CIBRARIO: *Primi studii intorno alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-paraboliche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. LVI (1932), § 1, formule (3) e (6), in cui si ponga $\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$ e 2λ al posto di λ.

e per $x=0$:

$$z_x(0,y)=\frac{8}{\pi}\nu(y)\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\nu(y).$$

Così:

$$z_y(x,y)=\frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu'[Y(t)]dt$$

$$(22)\quad z_{xx}(x,y)=-\frac{12(-x)^{-\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu'[Y(t)]dt-$$
$$-\frac{8}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^2\nu''[Y(t)]dt.$$

$$z_{yy}(x,y)=\frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu''[Y(t)]dt.$$

Deve essere soddisfatta la (A), cioè, con qualche riduzione:

$$3(-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^1\nu'[Y(t)]t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)dt+8x\int_0^1\nu''[Y(t)]t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=0,$$

e una semplice integrazione per parti permette di verificare questa relazione.

Dimostriamo ancora che:

$$z_{xx}(0,y)=-\nu''(y).$$

Il primo integrale che compare in $z_{xx}(x,y)$ si può scrivere nella forma:

$$\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu'[a+(b-a)t]-\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\nu'[a+(b-a)t]dt=$$
$$=\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\{\nu'[a+(b-a)t]-\nu'[b-(b-a)t]\}dt=$$
$$=4(-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu''[y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}(t-2\vartheta t+\vartheta)]dt,$$

perchè:

$$\nu'[b-(b-a)t]-\nu'[a+(b-a)t]=$$
$$=\{b-a-2(b-a)t\}\nu''[a+(b-a)t+\vartheta(b-a)-2\vartheta(b-a)t]=$$
$$=-4(-x)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu''[y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}(t-2\vartheta t+\vartheta)],$$

dove ϑ è compreso tra zero e uno. Sostituendo nella (22) e facendo ivi $x=0$, si trova:

$$z_{xx}(0,y)=-\frac{48\nu''(y)}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)dt-\frac{8}{\pi}\nu''(y)\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^2dt=$$

$$= -\frac{64}{\pi}\nu''(y)\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)dt =$$

$$= -\frac{64}{\pi}\nu''(y)\left[\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt - \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt\right] = -\nu''(y).$$

È dunque soddisfatta, per $x=0$, l'equazione che si ottiene derivando la (A).

La formula (B) permette di dimostrare il seguente

TEOREMA II. - *Esiste uno e un solo integrale della* (A), *definito nel trilatero T, che è funzione* D^{II} *in esso, e che su uno dei due archi di caratteristiche, che limitano T, per esempio su MR* (vedi fig. 1), *si riduce ad una funzione* D^{IV} *assegnata* $f(y)$.

Non è restrittivo supporre che il punto M coincida coll'origine; se $f(0)=n$, $f'(0)=m$, e se $z(x,y)$ è D^{II} anche per $x=0$, deve essere:

$$z(0,y)=my+n;$$

sostituendo a $z(x,y)$ e a $f(y)$ rispettivamente le funzioni:

$$z(x,y)-my-n, \qquad f(y)-my-n,$$

ci si riduce alle ipotesi:

$$z(0,y)=0, \qquad f(0)=f'(0)=0.$$

L'equazione dell'arco MR di caratteristica è:

$$y-2(-x)^{\frac{1}{2}}=0; \qquad x=-\frac{y^2}{4}.$$

Se esiste una funzione $z(x,y)$ che soddisfa il teorema, essa si può mettere nella forma (B), ed esiste una funzione D^{II}, $\nu(y)$, che soddisfa la:

$$z\left(-\frac{y^2}{4},y\right)=f(y)=-\frac{2y^2}{\pi}\int_0^1 \nu(2yt)t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$\left(0\leqslant y\leqslant\frac{l}{2}\right.$, se l è la lunghezza del segmento $\left.MN\right)$.

Posto: $2y=Y$; $Yt=u$, si ottiene:

$$f\left(\frac{Y}{2}\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^Y u^{\frac{1}{2}}(Y-u)^{\frac{1}{2}}\nu(u)du \qquad (0\leqslant Y\leqslant l). \tag{23}$$

Prendiamo come incognita:

$$Z(u)=\int_0^u \nu(u)u^{\frac{1}{2}}du.$$

Integrando per parti si ha l'equazione di ABEL:

$$f\left(\frac{Y}{2}\right)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^Y \frac{Z(u)}{(Y-u)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Colla formula di ABEL risulta:

$$Z(Y)=-2\int_0^Y \frac{f'\left(\frac{u}{2}\right)}{(Y-u)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

cioè integrando per parti:

$$Z(Y)=-2\int_0^Y (Y-u)^{\frac{1}{2}} f''\left(\frac{u}{2}\right)du,$$

e derivando rispetto a Y, e poi ponendo $u=Yt$:

$$\nu(Y)Y^{\frac{1}{2}}=-\int_0^Y \frac{f''\left(\frac{u}{2}\right)}{(Y-u)^{\frac{1}{2}}}\,du=-Y^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{f''\left(\frac{Yt}{2}\right)}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,dt,$$

cioè:

$$\nu(Y)=-\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} f''\left(\frac{Yt}{2}\right)dt \qquad (0\leq Y\leq l). \tag{24}$$

È così determinata, in modo unico, la funzione $\nu(Y)$, certo D^{II}, perchè f è funzione D^{IV}; la $\nu(Y)$ risolve l'equazione integrale (23), e l'integrale della (A), definito nel trilatero T, che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0,y)=0, \qquad z_x(0,y)=\nu(y),$$

sull'arco di caratteristica MR si riduce a $f(y)$, cioè soddisfa il teorema.

Il teorema ora dimostrato ammette una generalizzazione immediata. La funzione $f(y)$ sia assegnata, oltre che sull'arco MR di caratteristica, anche sull'arco MS, e il punto S abbia ordinata $-\frac{m}{2}$ (vedi fig. 1); $f(y)$ sia dunque definita per $-\frac{m}{2}\leq y\leq\frac{l}{2}$; per il teorema precedente la funzione $\nu(y)$ è determinata nei punti del segmento: $-m\leq y\leq l$ (LN nella figura 1), è ivi funzione D^{II}, e, come si vede facilmente, è data dalla formula (24). Per il Teorema I in tutto il trilatero limitato dal segmento LN dell'asse y e dagli archi di caratteristiche LT e NT per i suoi estremi è individuato l'integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0,y)=0, \qquad z_x(0,y)=\nu(y),$$

e che dunque assume valori dati sui due archi di caratteristiche MR ed MS, archi che appartengono ad una stessa parabola. Dunque:

TEOREMA III. - *In un trilatero, limitato da un segmento dell'asse y e dagli archi di caratteristiche per i suoi estremi, esiste ed è unico l'inte-*

grale della (A), *che è funzione* D^{II} *nel trilatero stesso e che si riduce ad una funzione* D^{IV} *assegnata* $f(y)$ *sulla parte interna al trilatero di una qualsiasi delle parabole caratteristiche che lo attraversano.*

§ 2.

Lemma. - *Se* δ *è un dominio posto nel semipiano* $x \geqslant 0$ (*e del cui contorno* σ *può dunque far parte un segmento dell'asse* y), *e* $z(x, y)$ *è un integrale della* (A), *funzione* D^{II} *in* δ (*e su* σ) *e nullo su* σ, $z(x, y)$ *è nullo in tutto* δ.

Dall'identità:

$$z(xz_{xx}+z_{yy})=\frac{\partial}{\partial x}\left(xzz_x-\frac{z^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(zz_y)-xz_x^2-z_y^2$$

e dall'ipotesi che $z(x, y)$ è un integrale della (A) in δ, segue:

$$\iint_\delta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xzz_x-\frac{1}{2}z^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}(zz_y)\right]dxdy=\iint_\delta(xz_x^2+z_y^2)dxdy,$$

cioè:

$$\int_\sigma\left(xzz_x-\frac{1}{2}z^2\right)dy-zz_ydx=\iint_\delta(xz_x^2+z_y^2)dxdy,$$

ed essendo per ipotesi $z(x, y)=0$ su σ, segue:

$$\iint_\delta(xz_x^2+z_y^2)dxdy=0,$$

e questo è possibile solo se: $z_x=z_y=0$ in tutto δ, e quindi $z=0$ in tutto δ.

Si dimostra subito allora il:

TEOREMA IV. - *Se* τ *è un dominio di contorno* γ, *posto nel semipiano* $x \geqslant 0$, *e se* $z(x, y)$ *è un integrale della* (A), *che è funzione* D^{II} *nei punti interni a* τ *ed è continua su* γ, *la* $z(x, y)$ *ha il suo massimo e il suo minimo valore in punti di* γ; *se quindi* $z(x, y)$ *è nulla su* γ, $z(x, y)$ *è pure nulla in tutto* τ ([11]).

Il Teorema IV vale non solo per la (A), ma per qualsiasi equazione che sia soddisfatta da una costante arbitraria, e per cui si possa dimostrare il Lemma.

Se D è un dominio, limitato nel semipiano $x \geqslant 0$ da una curva γ terminata a due punti M e N dell'asse y e nel semipiano $x \leqslant 0$ dagli archi di caratteristiche MR e NR (vedi fig. 1), un integrale $z(x, y)$ della (A) nullo su γ e su MN e funzione D^{II} nei punti interni a D, è nullo nel dominio C limitato da γ e da MN; allora $z_x(0, y)=0$ nei punti del segmento MN e per il Teorema I del § 1 $z(x, y)$ è nullo in tutto il trilatero MNR. È dunque dimostrato il teorema fondamentale di unicità:

([11]) Per la dimostrazione vedi, per esempio, TRICOMI, l. c., p. 182, nota (1).

TEOREMA V. - *Esiste al più un integrale della* (A), *che è definito nel dominio D, è funzione* D^{II} *nei punti interni a D e assume valori dati su* γ.

Dobbiamo ora passare ai teoremi di esistenza, corrispondenti ai Teoremi IV e V di unicità.

TEOREMA VI. - *Se* δ *è un dominio di contorno* σ [12], *appartenente al semipiano* $x>0$ (*senza punti a comune coll'asse* y) *esiste un integrale della* (A), $z(x,y)$, *funzione* D^{II} *nei punti interni a* δ *e che si riduce ad una funzione continua data ad arbitrio su* σ.

La (A) col cambiamento di variabili:

$$X=2x^{\frac{1}{2}}, \qquad Y=y, \qquad (x>0), \tag{1}$$

diviene:

$$z_{XX}+z_{YY}-\frac{z_X}{X}=0. \tag{2}$$

Posto

$$z(X,Y)=\bar{z}(X,Y)X^{\frac{1}{2}},$$

si ha l'equazione:

$$\bar{z}_{XX}+\bar{z}_{YY}-\frac{3}{4X^2}\bar{z}=0. \tag{3}$$

Il cambiamento di variabili (1) muta il dominio δ e la curva σ in un dominio δ_1 e in una curva σ_1 interni al semipiano $X>0$. Se $G(X,Y;\xi,\eta)$ è l'ordinaria funzione di GREEN per il contorno σ_1, posto:

$$\int_{\sigma_1}\bar{z}\frac{dG}{dn}ds=A(X,Y), \tag{4}$$

dove $A(X,Y)$ è una funzione armonica, nota, che assume i valori dati su σ_1, la $\bar{z}(X,Y)$ soddisfa l'equazione integrale:

$$2\pi\bar{z}(X,Y)=A(X,Y)-\frac{3}{4}\iint_{\delta_1}G(X,Y;\xi,\eta)\frac{\bar{z}(\xi,\eta)}{\xi^2}d\xi d\eta. \tag{5}$$

In δ_1: $\xi\neq 0$; alla (5) si può dunque applicare la teoria di FREDHOLM [13], se $-\frac{3}{8\pi}$ non è un parametro del nucleo stesso, caso da escludersi perchè se $-\frac{3}{8\pi}$ fosse un parametro del nucleo, l'equazione ottenuta dalla (5), facendo in essa $A=0$ avrebbe delle soluzioni non nulle; ora questo è assurdo perchè se $\bar{z}(X,Y)$ è nullo su σ_1, è certo nulla la funzione $A(X,Y)$, e, per il teorema di unicità deve essere in tutto δ_1: $\bar{z}(X,Y)=0$. Consideriamo ora il dominio C limitato dall'asse y e da una curva γ, posta nel semipiano $x\geqslant 0$ e avente gli estremi M e N sull'asse y; siano $x=x(t)$, $y=y(t)$ le equazioni parametriche di γ. Allora:

---

[12] Qui e nel seguito si suppone che tutti i contorni considerati siano tali che ad essi possano applicarsi le formule fondamentali della teoria delle funzioni armoniche.

[13] GOURSAT: *Cours d'Analyse*. T. III^e, Chap. XXXIII, pp. 524-527.

TEOREMA VII. - *In tutto il dominio C esiste un integrale della* (A), *che è funzione* D^{II} *all'interno di C, è nullo sul segmento MN e si riduce su* γ *ad una funzione continua assegnata ad arbitrio* $f(t)$, *colla sola condizione che sia:* $f(t)=x(t)\varphi(t)$, *dove* $\varphi(t)$ *è finita e continua anche nei punti M e N* (14); *all'interno di C tale integrale è funzione analitica di x, y.*

Nella dimostrazione di questo teorema ci serviremo di un metodo molto semplice dovuto al prof. ASCOLI (15).

Osserviamo, in primo luogo, che non è restrittivo supporre che i valori dati su γ di $f(t)$ (e di $\varphi(t)$) siano non negativi, perchè se ciò non avviene la $f(t)$ (o la $\varphi(t)$) si può considerare come differenza di due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ non negative, e l'integrale $z(x, y)$ cercato si ottiene come differenza di due che assumono su γ rispettivamente i valori $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Sia dunque: $0 \leq f(t) \leq M$, dove M è una costante positiva; per il Teorema IV l'integrale $z(x, y)$, se esiste, soddisfa la diseguaglianza:

$$0 \leq z(x, y) \leq M. \tag{6}$$

Si considerino i dominii C_h limitati da γ e dalle rette r_h di equazioni $x=h$, e si determinino le funzioni $z(x, y; h)$, che in C_h soddisfano la (A), su γ si riducono a $f(t)$ e sono nulle sulla $x=h$, funzioni certo esistenti per il Teorema V. Dico che esiste il

$$\lim_{h \to 0} z(x, y; h);$$

Se $h_1 > h_2$ in C_{h_1} sono definite sia la $z(x, y; h_1)$ che la $z(x, y; h_2)$; su γ le due funzioni sono eguali, sulla retta $x=h_1$ è: $z(x, y; h_1)=0$, mentre: $z(x, y; h_2) \geqslant 0$, perchè, per quanto si è visto, per tutte le funzioni $z(x, y; h)$ vale la:

$$0 \leq z(x, y; h) \leq M.$$

Allora su tutto il contorno del dominio C_h la differenza: $z(x, y; h_2) - z(x, y; h_1)$ è positiva o nulla, e perciò in tutto C_h:

$$M \geqslant z(x, y; h_2) \geqslant z(x, y; h_1).$$

La $z(x, y; h)$ per h tendente a zero non decresce, ma resta limitata; esiste dunque il:

$$\lim_{h \to 0} z(x, y; h) = z(x, y).$$

Si tratta ora di provare che la $z(x, y)$, così ottenuta, soddisfa la (A) (all'interno del dominio C) e le condizioni ai limiti imposte. Sia δ un dominio tutto

---

(14) Se la $f(t)$ non fosse nulla nei punti M e N, basterebbe costruire la funzione lineare $my+n$, che nei punti M e N assume i valori $f(M)$ e $f(N)$, poi prendere come incognita la $z(x, y) - my - n$ e sostituire a $f(y)$ la $f(y) - my - n$ per ridursi al caso studiato nel teorema.

(15) ASCOLI, l. c., pp. 76-81.

interno a C, senza punti a comune coll'asse y, e sia σ il suo contorno; si considerino quei valori h corrispondenti a dominii C_h, contenenti δ all'interno. Col cambiamento di variabili (1) e la posizione:

$$z(X, Y; h) = X^{\frac{1}{2}} \bar{z}(X, Y; h),$$

la (A) si trasforma nella (3). Allora le $\bar{z}(X, Y; h)$ soddisfano la:

$$(7) \qquad 2\pi \bar{z}(X, Y; h) = \int_{\sigma} \bar{z}(\xi, \eta; h) \frac{dG(X, Y; \xi, \eta)}{dn} ds - \\ - \frac{3}{4} \iint_{\delta} G(X, Y; \xi, \eta) \frac{\bar{z}(\xi, \eta; h)}{\xi^2} d\xi d\eta,$$

dove $G(X, Y; \xi, \eta)$ è l'ordinaria funzione di GREEN per il dominio δ. Per h tendente a zero le $\bar{z}(X, Y; h)$ tendono alla:

$$\bar{z}(X, Y) = X^{-\frac{1}{2}} z(X, Y).$$

La $\bar{z}(X, Y)$ è dunque integrabile nel senso di LEBESGUE, e quindi soddisfa la (7), dove gli integrali vanno intesi nel senso di LEBESGUE (16). Ne segue che la $\bar{z}(X, Y)$ soddisfa la (3) nelle coordinate X, Y, che la $z(X, Y)$ soddisfa la (2) e che quindi nelle coordinate x, y soddisfa la (A).

Poichè all'interno di C la (A) è di tipo ellittico, la z è funzione analitica di x, y per una proprietà generale delle equazioni lineari di tipo ellittico (17).

La dimostrazione che la funzione $z(x, y)$, così costruita, assume i valori dati su γ è identica a quella data dal prof. ASCOLI nel suo lavoro (18), al quale rimandiamo il lettore.

Per dimostrare che:

$$\lim_{x \to 0} z(x, y) = 0,$$

consideriamo le funzioni:

$$u(x, y; h) = \frac{z(x, y; h)}{x},$$

definite ognuna nel relativo dominio C_h; esse soddisfano l'equazione trasformata della (A):

$$(8) \qquad x u_{xx} + u_{yy} + 2u_x = 0,$$

---

(16) Vedi, per esempio, DE LA VALLÉE-POUSSIN: *Intégrales de Lebesgue.* Parte prima, cap. III, p. 44.

(17) Vedi PICARD: *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre*, etc. Journal de l'École Polytéchnique, pp. 89-105 e Comptes Rendus, CXI, pp. 487-492. Vedi, anche, PICARD: *Sur les équations linéaires aux dériveés partielles et la généralisation du problème de Dirichlet.* Acta Math., t. 25, 1902, pp. 121-137 (vedi, per questo p. 131).

(18) ASCOLI, l. c., p. 79; non riportiamo qui la dimostrazione, che si potrebbe ripetere parola per parola.

sono nulle sulla retta $x=h$, e sulla curva γ assumono i valori $\varphi(t)$. Poichè per la (8) si può dimostrare il Lemma enunciato al principio del presente paragrafo ([19]), e la (8) è soddisfatta da una qualsiasi costante, per un integrale u della (8) vale il Teorema III; la u è dunque estremata al contorno e quindi limitata; ma

$$z(x, y\,;\, h)=xu(x, y\,;\, h).$$

Dunque esiste una quantità positiva μ tale che:

$$0\leqslant z(x, y\,;\, h)\leqslant x\mu,$$

e per h tendente a zero:

$$0\leqslant z(x, y)\leqslant x\mu, \qquad \text{da cui } \lim_{x\to 0} z(x, y)=0.$$

Se si pone $z(0, y)=0$, la $z(x, y)$ risulta continua anche per $x=0$.

Bisognerebbe ora dimostrare che l'integrale $z(x, y)$ è determinato non solo nel dominio C, ma anche nel trilatero T (limitato dal segmento MN e dagli archi MR e NR di caratteristiche, vedi fig. 1), cioè in tutto D; per dimostrare l'esistenza di $z(x, y)$ in T basterebbe provare che nei punti del segmento MN la $z_x(0, y)$ esiste ed è funzione D^{II}, e applicare poi il Teorema del § 1; tale dimostrazione è piuttosto laboriosa, e non potrà essere fatta che in seguito, alla fine del § 4, dopo avere nel § 3 introdotte certe soluzioni particolari della (A). Qui ci limitiamo a dimostrare ancora che in un dominio δ, limitato da una curva σ, vale il teorema di HARNACK:

TEOREMA VIII. - *Se una serie di soluzioni della* (A)

$$\sum_n z_n(x, y) \tag{9}$$

converge uniformemente su σ e se le soluzioni stesse sono nulle sulla eventuale parte che σ ha in comune coll'asse y, la serie converge uniformemente in δ e ivi rappresenta una soluzione della (A).

Che la serie converga uniformemente all'interno di σ segue senz'altro dal fatto che il massimo di una somma del tipo:

$$|z_{n+1}+z_{n+2}+\ldots.+z_{n+p}|$$

è raggiunto sul contorno di σ.

([19]) Dalla:

$$u(xu_{xx}+u_{yy}+2u_x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xuu_x+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)-xu_x^2-u_y^2,$$

segue che un integrale della (8) nullo sul contorno σ di un dominio δ posto nel semipiano $x\geqslant 0$ soddisfa la:

$$\iint_\delta (xu_x^2+u_y^2)dxdy=0,$$

da cui $u=u_x=u_y=0$ in tutto δ.

Si consideri un dominio $\bar{\delta}$, di contorno $\bar{\sigma}$, tutto interno a δ, si passi a coordinate X, Y, e si ponga

$$\bar{z}_n(X, Y) = X^{\frac{1}{2}} z_n(X, Y);$$

allora vale la (vedi sopra):

$$2\pi \bar{z}_n(X, Y) = \int_{\bar{\sigma}_1} \bar{z}_n \frac{dG}{dn}\, ds - \frac{3}{4} \iint_{\bar{\delta}_1} G \frac{\bar{z}_n(\xi, \eta)}{\xi^2}\, d\xi d\eta.$$

Segue dunque, poichè la serie (9) converge uniformemente:

$$2\pi \sum_n \bar{z}_n(X, Y) = \int_{\bar{\sigma}_1} \sum_n \bar{z}_n \frac{dG}{dn}\, ds - \frac{3}{4} \iint_{\bar{\delta}_1} \left[G(X, Y; \xi, \eta) \frac{1}{\xi^2} \sum_n \bar{z}_n(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta.$$

La

$$\sum_n \bar{z}_n(X, Y) = \bar{z}(X, Y)$$

soddisfa la (3); dunque la:

$$X^{-\frac{1}{2}} \bar{z}(X, Y) = X^{-\frac{1}{2}} \sum_n \bar{z}_n(X, Y) = \sum_n X^{-\frac{1}{2}} \bar{z}_n(X, Y) = \sum_n z_n(X, Y)$$

soddisfa la (2) nelle coordinate X, Y, e la:

$$z(x, y) = \sum_n z_n(x, y)$$

soddisfa la (A) in ogni dominio $\bar{\delta}$ interno a δ.

§ 3.

Introduciamo qui delle nuove variabili ϱ e φ legate alle x, y dalle relazioni:

(1) $$x = \frac{\varrho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{4}, \qquad y = \varrho \cos \varphi \quad (^{20}),$$

cioè:

(1′) $$\varrho = \sqrt{4x + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{y},$$

e cerchiamo degli integrali particolari della (A) della forma:

(2) $$z(x, y) = R(\varrho) T(\varphi),$$

integrali che ci serviranno, nel paragrafo che segue, a dimostrare il teorema di esistenza più generale per la (A). Col cambiamento di variabili (1), la (A) diviene:

$$\varrho^2 z_{\varrho\varrho} + z_{\varphi\varphi} - \operatorname{cotg} \varphi\, z_\varphi = 0,$$

---

(20) Questo cambiamento di variabili è ottenuto ponendo prima: $X = 2x^{\frac{1}{2}}$; $Y = y$ e poi passando nel piano X, Y a coordinate polari: $X = \varrho \operatorname{sen} \varphi$, $Y = \varrho \cos \varphi$.

e se z ha la forma particolare (2):

$$\varrho^2 R'' T + RT'' - \operatorname{cotg}\varphi RT' = 0,$$

da cui:

$$\frac{\varrho^2 R''}{R} = \frac{T' \operatorname{cotg}\varphi - T''}{T} = k,$$

dove k è una costante arbitraria, che porremo nella forma $\lambda(\lambda-1)$. Si hanno così le due equazioni:

$$\varrho^2 R'' - \lambda(\lambda-1)R = 0 \tag{3}$$

$$T'' - \operatorname{cotg}\varphi T' + \lambda(\lambda-1)T = 0. \tag{4}$$

L'equazione (3) ammette soluzioni particolari della forma: $R=\varrho^\lambda$ (e $R=\varrho^{1-\lambda}$, la quale seconda soluzione non ci servirà nel seguito).

La (4) posto $\tau=\cos\varphi$ diviene:

$$(1-\tau^2)\frac{d^2T}{d\tau^2} + \lambda(\lambda-1)T = 0. \tag{5}$$

Se:

$$T(\tau) = (1-\tau^2)S(\tau),$$

la $S(\tau)$ soddisfa l'equazione:

$$(1-\tau^2)\frac{d^2S}{d\tau^2} - 4\tau\frac{dS}{d\tau} + (\lambda-2)(\lambda+1)S = 0.$$

Supposto λ intero questa equazione ammette come integrale la funzione sferica generalizzata, che si suole indicare con $C^{\frac{3}{2}}_{\lambda-2}(\tau)$ ([21]).

Si hanno dunque le soluzioni particolari della (5):

$$T(\tau) = (1-\tau^2)C^{\frac{3}{2}}_{\lambda-2}(\tau) = \operatorname{sen}^2\varphi\, C^{\frac{3}{2}}_{\lambda-2}(\cos\varphi);$$

e ponendo $\lambda-2=n$ si hanno le soluzioni particolari della (A):

$$z_n = \varrho^{n+2}\operatorname{sen}^2\varphi\, C^{\frac{3}{2}}_n(\cos\varphi). \tag{6}$$

([21]) Vedi, per esempio, l'articolo di A. WANGERIN-A. LAMBERT: *Fonctions sphériques* in Encycl. des sciences mathém., II, 5 (28) e l'articolo seguente (28 a) di P. APPELL-A. LAMBERT: *Généralisations diverses des fonctions sphériques*. Le formule che occorrono nel seguito sono quasi tutte riportate da TRICOMI, l. c., pp. 172-175. Nei lavori citati sono date formule per le funzioni sferiche generalizzate $C^\nu_n(\tau)$; qui $\nu=\frac{3}{2}$. Una trattazione completa di tali funzioni e di altre più generali si trova in NIELS NIELSEN: *Théorie des fonctions métasphériques*. Gauthier-Villars, Paris, 1911. NIELSEN indica le $C^\nu_n(\tau)$ con $P^{\nu,n}(\tau)$. Vedi pure APPELL-KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques. Polynomes d'Hermite*. Paris, Gauthier-Villars, 1926. Note I, pp. 389-391 (le $C^{(\nu)}_n(\tau)$ sono ivi indicate con $V^{(s)}_n(\tau)$). Le $C^{\frac{3}{2}}_n(\tau)$ sono le derivate delle ordinarie funzioni sferiche, cioè dei polinomi di LEGENDRE.

Le soluzioni particolari (6) della (A) sono polinomi in x, y; infatti dalla formula ([22]):

$$(7) \qquad C_n^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{3}{2}+n-s\right)}{s!\,(n-2s)!}\, 2^{n-2s} (\cos\varphi)^{n-2s}$$

dove $m=\frac{n}{2}$ o $m=\frac{n-1}{2}$, secondo che n è pari o dispari, si trae:

$$\varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{3}{2}+n-s\right)}{s!\,(n-2s)!}\, 2^{n-2s} \varrho^{2s} (\varrho\cos\varphi)^{n-2s}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{3}{2}+n-s\right)}{s!\,(n-2s)!}\, 2^{n-2s} (4x+y^2)^s y^{n-2s}.$$

Porremo:

$$(8) \qquad \varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi) = P_n(x, y),$$

dove le $P_n(x,y)$ sono polinomi di grado n, e avremo le soluzioni particolari della (A):

$$(9) \qquad z_n(x, y) = x P_n(x, y),$$

che, come polinomii, soddisfano la (A) in tutto il piano, mentre il primo membro della (8) è definito solo per $x \geqslant 0$, poichè le ϱ e φ sono definite dalla (1') per $x \geqslant 0$. È noto che:

$$(10) \qquad |C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)| \leqslant C_n^{\frac{3}{2}}(1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dunque per $x \geqslant 0$ le $P_n(x, y)$ soddisfano la disuguaglianza:

$$(11) \qquad |P_n(x, y)| \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{2} \varrho^n.$$

Per $x=0$, è $\varrho=|y|$, $\varphi=0$ per $y>0$, $\varphi=\pi$ per $y<0$; per $\varphi=0$ è $\tau=1$ e $C_n^{\frac{3}{2}}(1)$ è dato dalla (10); per $\varphi=\pi$ è $\tau=-1$ ed è noto che:

$$C_n^{\frac{3}{2}}(-1) = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dunque:

$$(12) \qquad P_n(0, y) = \left[\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x}\right]_{x=0} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} y^n.$$

Nel semipiano $x \leqslant 0$ le $z_n(x, y)$, come soluzioni della (A), sono date dalla formula (B) del § 1:

$$(13) \qquad z_n(x, y) = \frac{4}{\pi}(n+1)(n+2) x \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} [Y(t)]^n dt,$$

([22]) NIELSEN, l. c., chap. VII, § XXXI, p. 94, form. (5).

dove:

$$Y(t)=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}t.$$

Si ha dunque:

$$(14)\qquad P_n(x,y)=\frac{4(n+1)(n+2)}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}[Y(t)]^n dt=$$

$$=\frac{4(n+1)(n+2)}{\pi}\Big[y^n\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt-$$

$$-2^2\binom{n}{2}y^{n-2}x\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^2dt+$$

$$+2^4\binom{n}{4}y^{n-4}x^2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^4dt-\ldots.$$

$$+(-1)^r2^{2r}\binom{n}{2r}y^{n-2r}x^r\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^{2r}dt+\ldots.\Big],$$

come si vede facilmente, tenendo conto che:

$$\int_0^1(2t-1)^{2r+1}t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=0.$$

Per $0\leqslant t\leqslant 1$ è:

$$|Y(t)|\leqslant|y|+2|x|^{\frac{1}{2}};$$

si trova così la diseguaglianza valida in tutto il piano, e anche per x e y complessi:

$$(15)\qquad |P_n(x,y)|\leqslant\frac{(n+1)(n+2)}{2}(|y|+2|x|^{\frac{1}{2}})^n.$$

§ 4.

Consideriamo le parabole di equazione:

$$4x+(y-y_0)^2=k,\qquad (k \text{ costante}).$$

Tali parabole, aventi per asse la retta $y=y_0$, colla concavità rivolta dalla parte delle x negative, saranno dette *curve normali* per la (A). Se $k=0$, le curve normali sono le caratteristiche della (A) nel semipiano iperbolico.

Supposto $k>0$, sia σ una di tali curve normali; allora:

TEOREMA IX. - *Nell'area D* (vedi fig. 2) *limitata dall'arco c di σ posto nel semipiano* $x\geqslant 0$, *e dagli archi MR e NR di caratteristiche uscenti dagli estremi M e N di c esiste ed è unico l'integrale* $z(x,y)$, *che su c assume valori dati mediante una funzione della forma:* $x\varphi(y)$, *dove* $\varphi(y)$

è finita e continua nei punti di c, estremi inclusi, e che è nullo sull'asse y; la $z(x,y)$ è funzione analitica nei punti interni a D.

Non è restrittivo supporre $y_0=0$ e $k=1$ ([23]); si può dunque considerare la curva normale:

(1) $$4x+y^2=1.$$

Le formule (1) del § 3, posto $\tau=\cos\varphi$, si possono scrivere:

(2) $$x=\frac{\varrho^2(1-\tau^2)}{4}, \qquad y=\varrho\tau, \qquad (-1\leq\tau\leq 1).$$

Le (2) definiscono un cambiamento di variabili, che muta la (1) nella:

$$\varrho^2=1,$$

e, in generale, le curve normali di equazioni:

$$4x+y^2=k$$

nelle $\varrho=\sqrt{k}$, per $k>0$.

Allora lungo c è:

$$x\varphi(y)=\frac{1-\tau^2}{4}\varphi(\tau),$$

dove $\varphi(\tau)$ è finita e continua per $-1\leq\tau\leq 1$; esiste una quantità positiva μ, tale che:

(3) $$|\varphi(\tau)|\leq\mu, \qquad \text{per } -1\leq\tau\leq 1.$$

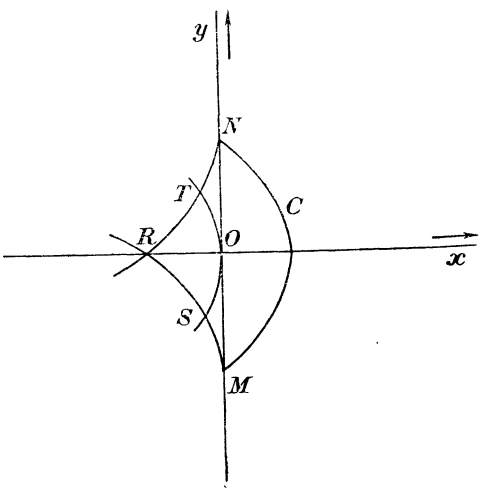

Fig. 2.

È noto che una tale funzione $\varphi(\tau)$ si può sviluppare in serie di funzioni $C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)$:

(4) $$\varphi(\tau)=\sum_n c_n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau),$$

dove la serie converge uniformemente per $-1\leq\tau\leq 1$, ed è:

(5) $$c_n=\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\,C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)(1-\tau^2)\,d\tau.$$

Tenuto conto della (10) del § 3 e della (3) del presente paragrafo, si trova:

(6) $$|c_n|\leq\frac{2n+3}{3}\mu.$$

([23]) Il cambiamento di variabili:

$$x=kX; \qquad y=k^{\frac{1}{2}}Y+y_0$$

non muta la (A) e riduce l'equazione $4x+(y-y_0)^2=k$ alla forma $4X+Y^2=1$.

Formiamo la serie:

$$(7) \qquad \sum_n c_n \varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau) = \sum_n c_n P_n(x, y), \qquad (0 \leq \varrho \leq 1\,;\ -1 \leq \tau \leq 1),$$

dove le $P_n(x, y)$ sono i polinomi definiti dalla (8) del § 3. Per la (11) del § 3 e per la (6) precedente, i termini della serie (8) non superano in valore assoluto i termini della serie:

$$\frac{\mu}{6} \sum (2n+3)(n+1)(n+2)\varrho^n,$$

che converge uniformemente per $0 \leq \varrho \leq \delta$ $(\delta < 1)$.

La serie (7) converge dunque uniformemente per $0 \leq \varrho < 1$, $-1 \leq \tau \leq 1$; converge pure uniformemente per $\varrho = 1$, $-1 \leq \tau \leq 1$, perchè per $\varrho = 1$ la serie (7) si riduce alla (4), uniformemente convergente per ipotesi. Dunque la serie (7) converge uniformemente all'interno e sul contorno del dominio C limitato dall'arco c di curva normale e dal segmento MN dell'asse y. Allora la funzione:

$$(8) \qquad z(x, y) = x \sum_n P_n(x, y),$$

che è uguale in C a una serie uniformemente convergente di integrali della (A) è un integrale della (A) per il Teorema VIII del § 2; la $z(x, y)$ è nulla sull'asse y; sulla curva c, lungo cui $\varrho = 1$, si riduce a:

$$\frac{1-\tau^2}{4} \sum c_n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau) = \frac{1-\tau^2}{4} \varphi(\tau) = x\varphi(y),$$

Si è così ridimostrato, in un caso particolare, il Teorema VII del § 2, col vantaggio che qui si è data dell'integrale $z(x, y)$ una espressione esplicita, che ci servirà nello studio delle derivate di z per $x = 0$.

Per una proprietà generale delle equazioni di tipo ellittico ([24]) la $z(x, y)$ è analitica e soddisfa dunque il teorema, almeno nella parte C del dominio D, posta nel semipiano $x \geqslant 0$. Si tratta di dimostrare che la funzione $z(x, y)$ definita dalla (8) soddisfa il teorema in tutto il dominio D.

Tenuto conto della (12) del § 3 si trova:

$$(9) \qquad z_x(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{z(x, y)}{x} = \sum_n c_n P_n(0, y) = \sum_n c_n (n+1)(n+2) y^n = \nu(y).$$

La $z_x(0, y)$ è dunque rappresentata da una serie di potenze $\nu(y)$, il cui raggio di convergenza è almeno uno, ed è una funzione analitica di y, almeno per $|y| < 1$; la serie converge anche per $y = \pm 1$, poichè:

$$\begin{cases} \nu(1) = \frac{1}{2} \sum_n c_n (n+1)(n+2) = \varphi(1) \\ \nu(-1) = \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n c_n (n+1)(n+2) = \varphi(-1). \end{cases}$$

La serie (9) converge dunque uniformemente per $-1 \leq y \leq 1$.

([24]) PICARD, l. c.

Per il Teorema I del § 1 nel trilatero T posto nel semipiano iperbolico e limitato dal segmento $-1 \leqslant y \leqslant 1$ e dagli archi MR e NR di caratteristiche per gli estremi di questo (vedi fig. 2) è determinato l'integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0, y)=0, \qquad z_x(0, y)=\nu(y), \qquad (-1 \leqslant y \leqslant 1);$$

esso è dato dalla formula (B) del § 1, cioè:

$$(10) \qquad z(x, y)=\frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu[Y(t)]dt=$$

$$=\frac{4x}{\pi}\sum_n c_n(n+1)(n+2)\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}[Y(t)]^n dt=x\sum_n c_n P_n(x, y),$$

dove si è posto:

$$Y(t)=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}t,$$

e si è tenuto conto della formula (14) del § 3.

La $z(x, y)$ è così definita in tutto D; dobbiamo ancora dimostrare che le sue derivate seconde sono continue per $x=0$ e che $z(x, y)$ è funzione analitica anche per $x \leqslant 0$; $z(x, y)$ deve dunque potersi definire, quando x, y variano in un conveniente dominio complesso ([25]).

La diseguaglianza (15) del § 3 vale comunque siano x, y, reali o complessi; se δ è un numero qualsiasi, minore di uno, consideriamo i valori, reali o complessi, di x, y per cui:

$$(11) \qquad |y|+2|x|^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta.$$

Se x, y sono reali, questa diseguaglianza è soddisfatta all'interno e sul contorno dell'area limitata dagli archi delle caratteristiche:

$$y-2(-x)^{\frac{1}{2}}=-\delta, \qquad y+2(-x)^{\frac{1}{2}}=\delta,$$

compresi tra l'asse y e il loro punto d'incontro, e dai loro simmetrici rispetto all'asse y. Comunque siano x, y, reali o complessi, purchè sia soddisfatta la (11), segue dunque, tenuto conto della diseguaglianza (15) del § 3 e della (6) del presente paragrafo:

$$|z(x, y)| \leqslant \frac{1}{6}\mu|x|\sum_n (2n+3)(n+1)(n+2)\delta^n.$$

Si è così determinato un dominio complesso, in cui converge uniformemente la serie (8), che dunque ivi rappresenta una funzione analitica di x, y e può es-

---

([25]) Posto $x=x_1+ix_2$; $y=y_1+iy_2$, tale dominio si rappresenterà in un dominio conveniente nello spazio a quattro dimensioni, in cui le x_1, x_2, y_1, y_2 sono coordinate cartesiane.

sere derivata termine a termine quante volte si vuole; a tale dominio appartiene la retta $y=0$, lungo cui le derivate di $z(x, y)$ di qualsiasi ordine sono finite e continue. In tutto D la serie (8) rappresenta una stessa funzione analitica di x, y che soddisfa il teorema.

Nella dimostrazione si è supposta $\varphi(\tau)$ continua anche per $\tau=\pm 1$; per la validità del Teorema IX basta però che esista una quantità positiva μ tale che sia:

$$|\varphi(\tau)|<\mu, \qquad \text{per } -1\leqslant\tau\leqslant 1$$

e che la $\varphi(\tau)$ ammetta lo sviluppo in serie (4) uniformemente convergente per $-1<\tau<1$. In queste ipotesi non si può più assicurare la convergenza per $\tau=\pm 1$ della serie (9), che rappresenta $\nu(y)$; segue però che:

$$|\nu(y)|<\mu, \qquad (-1\leqslant y\leqslant 1),$$

e questa condizione è sufficiente per poter esprimere $z(x, y)$ sugli archi di caratteristiche, che limitano T, mediante la formula (B) del § 1.

Si è nelle condizioni precedenti, per esempio, se $\varphi(\tau)$ è analitica per $|\tau|<1$, e non si sa nulla del comportamento di $\varphi(\tau)$ per $\tau=\pm 1$. Infatti una tale funzione per $-1<\tau<1$ si può sviluppare certamente in una serie uniformemente convergente di funzioni $C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)$ ([26]) e i coefficienti c_n dello sviluppo sono dati dalla (5) ([27]).

Questa osservazione ci permette di completare la dimostrazione del teorema generale di esistenza lasciata sospesa nel § 3, Teorema VII.

Se γ è una curva posta nel semipiano $x\geqslant 0$, avente gli estremi M e N sull'asse y (vedi fig. 1), di equazioni parametriche: $x=x(t)$, $y=y(t)$, si trova che:

([26]) Vedi NIELSEN, l. c., pp. 136-137.

([27]) Per $-1<\tau<1$ è $\varphi(\tau)=\sum_n c_n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)$; non possiamo integrare per serie nell'intero intervallo $-1\leqslant\tau\leqslant 1$, in modo da ricavare per le c_n la loro espressione (5), perchè nei punti $\tau=\pm 1$ non sappiamo come si comporti la serie. Però la formula (5) in questo caso si può dimostrare come segue. Sia:

$$F(\tau)=\int_0^\tau \varphi(\tau)d\tau.$$

La $F(\tau)$ è continua anche per $\tau=\pm 1$; sarà allora:

$$F(\tau)=\sum_n a_n C_n^{\frac{1}{2}}(\tau),$$

dove le $C_n^{\frac{1}{2}}(\tau)$ sono le ordinarie funzioni sferiche. Per $-1<\tau<1$ è:

$$F'(\tau)=\varphi(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{dC_n^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n C_{n-1}^{\frac{3}{2}}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} C_n^{\frac{3}{2}}(\tau),$$

TEOREMA X. - *In tutto il dominio D, limitato da γ e dagli archi di caratteristiche MR e NR per i suoi estremi esiste uno e un solo integrale della* (A), *che è funzione analitica nei punti interni a D, è continua sul contorno di D, è nulla sul segmento MN dell'asse y, e su γ si riduce ad una funzione continua assegnata ad arbitrio: $f(t)=x(t)\varphi(t)$, dove $\varphi(t)$ è finita e continua anche nei punti M e N di γ* ([28]).

Nel Teorema VII si era dimostrata l'esistenza della funzione $z(x, y)$ che soddisfa il teorema nel dominio C compreso tra γ e l'asse y; se:

$$|\varphi(t)|<\mu, \tag{12}$$

si era visto che in tutto C è:

$$\left|\frac{z(x, y)}{x}\right|<\mu \quad ([29]), \tag{13}$$

e che la funzione $z(x, y)$ è analitica nei punti interni a C. Si tratta ora di dimostrare che nei punti del segmento MN $(m<y<n)$ la $z_x(0, y)=\nu(y)$ esiste ed è fun-

---

perchè:

$$\frac{dC_n^{\nu}(\tau)}{d\tau}=2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(\tau).$$

Deve essere dunque $c_n=a_{n+1}$; è noto che:

$$(*)\quad a_{n+1}=\frac{2n+3}{2}\int_{-1}^{1}F(\tau)C_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau=\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}F(\tau)\left[2\tau\frac{dC_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}-(1-\tau^2)\frac{d^2C_n^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau^2}\right]d\tau,$$

in cui si è sostituito a $C_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)$ il suo valore tratto dall'equazione differenziale delle funzioni sferiche. Ora:

$$2\tau\frac{dC_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}-(1-\tau^2)\frac{d^2C_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left[-(1-\tau^2)\frac{dC_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}\right]=-\frac{d}{d\tau}[(1-\tau^2)C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)].$$

Sostituendo nella (*) e integrando per parti si trova:

$$c_n=a_{n+1}=\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)(1-\tau^2)C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)d\tau,$$

che è la (5).

([28]) Le osservazioni precedenti ci permettono di supporre la curva γ qualsiasi, realizzando, rispetto al Teorema V, p. 42, del lavoro precedente (M. CIBRARIO: *Alcuni teoremi di esistenza e di unicità per l'equazione* $xz_{xx}+z_{yy}=0$, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 68, 1932, pp. 35-44), il progresso essenziale di aver tolta l'ipotesi che γ finisca con due archetti finiti di curva normale.

([29]) Nella dimostrazione del Teorema VII si era supposta $\varphi(t)\geqslant 0$, e quindi $\frac{z(x, y)}{x}\geqslant 0$; ma la diseguaglianza (13) vale comunque sia il segno di $\varphi(t)$.

zione D^{II}; sia P un punto interno al segmento MN, di coordinate $0, y_0$ $(m<y_0<n)$; si potrà determinare una quantità positiva h, tale che l'arco c della curva normale:

$$4x+(y-y_0)^2=h^2,$$

corrispondente a $x\geqslant 0$, sia interno a C; nei punti di c si può porre:

$$z(x,y)=x\psi(y), \qquad (y_0-h<y<y_0+h),$$

dove è:

$$|\psi(y)|<\mu;$$

$\psi(y)$ è funzione analitica di y per $y_0-h<y<y_0+h$, mentre per $y=y_0\pm h$ (cioè nelle intersezioni di c coll'asse y) si sa solo che $\psi(y)$ resta limitata. Al dominio compreso tra c e l'asse y si può allora applicare il Teorema IX, che prova l'esistenza e l'analiticità della funzione $\nu(y)$ per $y_0-h<y<y_0+h$. Dunque in ogni punto y $(m<y<n)$ la $\nu(y)$ esiste ed è funzione analitica; poichè:

$$\nu(y)=\lim_{x\to 0}\frac{z(x,y)}{x},$$

dalla (13) segue:

(13′) $$|\nu(y)|<\mu, \qquad (m\leqslant y\leqslant n).$$

Agli estremi del segmento MN si sa solo che la $\nu(y)$ resta finita; però la $\nu(y)$ può non tendere ad alcun limite per $y=m$ o per $y=n$. Poichè $\nu(y)$ resta finita anche per $y=m$ e per $y=n$, si può applicare la formula (B) del § 1; la $z(x,y)$ è così definita all'interno e sul contorno del trilatero T, limitato dal segmento MN dell'asse y e dalle caratteristiche MR e NR per i suoi estremi. Dalla formula (B) e dalla (13′) segue che anche in T vale la (13). La $z(x,y)$ è funzione analitica nei punti interni a T, e, per quanto si è visto nella dimostrazione del Teorema IX, anche nei punti del segmento MN, estremi esclusi; $z(x,y)$ è dunque funzione analitica in tutti i punti interni a D.

Da quanto si è dimostrato segue che un integrale della (A) definito in un dominio D, attraversato dall'asse y, è necessariamente una funzione analitica di x, y almeno nella parte di D corrispondente a $x\geqslant 0$ e nel trilatero (o nei trilateri) posto nel semipiano $x\leqslant 0$ e limitato dagli archi di caratteristiche uscenti dagli estremi del segmento (o dei segmenti) comuni all'asse y e al dominio D.

Risulta anche che, se un integrale $z(x,y)$ della (A) è definito in un dominio posto nel semipiano $x\geqslant 0$ e del cui contorno fanno parte uno o più segmenti dell'asse y, è nullo su di essi ed è funzione D^{II} all'interno del dominio stesso, è funzione D^{II} (anzi analitica) anche nei trilateri posti nel semipiano $x\leqslant 0$ e limitati rispettivamente da uno di quei segmenti e dalle caratteristiche per i suoi estremi.

Si è visto nella dimostrazione dei Teoremi VII e X che se sull'arco di curva γ è:

$$\left|\frac{z(x,y)}{x}\right|<\mu,$$

la stessa relazione vale in tutto il dominio D, contorno incluso.

Se dunque su γ è data una serie uniformemente convergente di integrali della (A):

$$\sum_n z_n(x, y),$$

dove:

$$z_n(x, y) = x u_n(x, y),$$

e le $u_n(x, y)$ sono finite e continue anche per $x=0$, tale serie converge uniformemente in tutto D; in C (cioè nella parte di D compresa tra l'arco di curva γ e l'asse y) la serie:

$$\sum_n z_n(x, y)$$

rappresenta un integrale $z(x, y)$ della (A) per il Teorema VIII.

In D converge pure uniformemente la serie:

$$\sum_n u_n(x, y)$$

e posto:

$$\nu_n(y) = \left[\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x}\right]_{x=0}; \qquad \nu(y) = \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right]_{x=0},$$

è:

$$\sum_n u_n(0, y) = \sum_n \nu_n(y) = \nu(y).$$

Nel trilatero T per la formula (B) del § 1 è:

$$z(x, y) = \frac{8x}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \sum_n \nu_n[Y(t)]dt =$$

$$= \sum_n \frac{8x}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \nu_n[Y(t)]dt = \sum_n z_n(x, y),$$

dove:

$$Y(t) = y - 2(-x)^{\frac{1}{2}} + 4(-x)^{\frac{1}{2}} t,$$

e la serie $\sum_n z_n(x, y)$ rappresenta in T l'integrale $z(x, y)$ della (A). Dunque per l'intero dominio D vale il teorema di HARNACK:

TEOREMA XI. - *Se una serie di integrali della* (A), *nulli sull'asse y, converge uniformemente su un arco di curva γ, terminato a due punti M e N dell'asse y, la serie stessa converge uniformemente in tutto il dominio D, compreso tra γ e gli archi di caratteristiche per i suoi estremi e ivi rappresenta un integrale della* (A).

Ricorderemo ancora alcuni risultati, di notevole interesse, che si possono dedurre dal Teorema IX.

TEOREMA XII. - *All'interno del dominio D limitato da un arco c di curva normale, posto nel semipiano $x \geqslant 0$* (vedi fig. 2), *arco che si può supporre di equazione $4x+y^2=1$, e dagli archi MR e NR di caratteristiche*

per i suoi estremi, esiste ed è unico l'integrale della (A), *che è nullo sull'asse y e inoltre soddisfa una delle seguenti condizioni ai limiti:*

1°) (14) $z_x(0,y)=\nu(y), \qquad (-1<y<1), \qquad$ dove $\nu(y)=\sum_n a_n y^n$ [30],

e la serie converge per $|y|<1$. *Se* $\sum|a_n|$ *converge, allora* $z(x,y)$ *è definita ed è continua anche sul contorno di D.*

2°) *Sugli archi di caratteristiche OT, OS, interni a E e uscenti dal punto O, medio del segmento MN, si riduce ad una funzione (necessariamente analitica) assegnata*

(15) $$f(y)=\sum_{n=2}^{\infty} b_n y^n,$$

dove la serie converge per $|y|<\frac{1}{2}$ *ed è* $f(0)=f'(0)=0$. *Se converge* $\sum\frac{n(n-1)|b_n|}{2^{n-2}}$ *la* $z(x,y)$ *è definita ed è continua anche sul contorno di D.*

3°) *Sull'arco MR, per esempio, si riduce ad una funzione assegnata* $f(y)$ $(-1\leq y\leq 0)$ *che è analitica per* $\left|y+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$, *è* D^{II} *anche per* $y=0$ *e* $y=-1$, *e soddisfa le condizioni* $f(-1)=f'(-1)=0$.

L'integrale $z(x,y)$ *è in ogni caso funzione analitica di x, y nei punti interni a D.*

1°) Posto:

$$c_n=\frac{2a_n}{(n+1)(n+2)},$$

è:

$$\nu(y)=\frac{1}{2}\sum_n (n+1)(n+2)c_n y^n,$$

e la serie:

(16) $$z(x,y)=x\sum_n c_n P_n(x,y),$$

converge uniformemente all'interno di D e rappresenta ivi un integrale della (A) che soddisfa le condizioni ai limiti (14); infatti per $x\geq 0$ la serie (16) si può scrivere:

$$x\sum_n c_n\varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau), \qquad (-1\leq\tau\leq 1,\ 0\leq\varrho<1),$$

i cui termini in valore assoluto sono minori dei termini della serie:

$$x\sum_n|a_n|\varrho^n,$$

convergente per $\varrho<1$, mentre che per $x\leq 0$ la $z(x,y)$ è data dalla formula (10) (vedi sopra la dimostrazione del Teorema IX). Assicurata la convergenza della serie (16), la dimostrazione del presente teorema è del tutto analoga a quella del precedente Teorema IX.

---

[30] L'analiticità della funzione $\nu(y)$, per ciò che si è detto sopra, è una condizione necessaria.

Se $\sum |a_n|$ converge, la serie (16) converge anche sul contorno di D. Si è così risolto il problema di CAUCHY anche nel semipiano ellittico.

2°) Si ricordi il Teorema III del § 1 e la formula (24) del § 1, che dà $\nu(y)$ in funzione di $f(y)$; sostituendo in tale formula per $f(y)$ la sua espressione tratta dalla (15) si trova:

$$\nu(y) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)b_n}{2^{n-2}} y^{n-2} \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\, dt = \sum_{n=2}^{\infty} a_n y^{n-2}, \tag{17}$$

dove:

$$a_n = -\frac{n(n-1)b_n}{2^{n-2}} \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\, dt = -\frac{n(n-1)(n-2)b_n}{2^{n-3}} \int_0^1 t^{n-3}(1-t)^{\frac{1}{2}}\, dt. \tag{18}$$

Si ha:

$$|a_n| < \frac{n(n-1)|b_n|}{2^{n-3}}.$$

I termini della serie (18) in valore assoluto sono dunque minori di:

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|b_n| \left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-2},$$

che per ipotesi converge per $\frac{|y|}{2} < \frac{1}{2}$, $|y| < 1$; la serie di potenze (17) ha dunque il raggio di convergenza eguale ad uno, almeno. Si è così ricondotti al caso 1° e si può determinare la funzione $z(x, y)$, che soddisfa il teorema nei punti interni a D. Se poi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)|b_n|}{2^{n-3}}$$

converge, converge pure $\sum |a_n|$ e la funzione $z(x, y)$ è definita ed è continua anche sul contorno di D.

3°) Si ricordi il Teorema II del § 1 e si tenga conto che la formula (24) del § 1 era ottenuta nell'ipotesi che il punto M coincidesse coll'origine, mentre qui il punto M ha ordinata -1. La formula (24) diviene:

$$\nu(y) = -\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} f''\left[\frac{(y+1)t}{2} - 1\right] dt, \qquad (-1 \leqslant y \leqslant 1). \tag{19}$$

Poichè $f(y)$ e quindi $f''(y)$ sono analitiche per $\left|y + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, dalla formula (19) segue che $\nu(y)$ è funzione analitica regolare per $|y| < 1$, e che quindi si può porre:

$$\nu(y) = \sum_n a_n y^n,$$

dove la serie converge per $|y| < 1$ e inoltre per $y = \pm 1$, perchè $\nu(1)$ e $\nu(-1)$ sono determinate dalla (19). Si ricade così nel caso 1°.

Poichè $\nu(y)$ è determinata dalla (19) per $-1 \leqslant y \leqslant 1$, la formula (B) del § 1 permette di calcolare $z(x, y)$ anche sugli archi di caratteristiche, che limitano il trilatero T.