ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

A. DERMOUNE

Une remarque sur le processus : $\alpha a(f) + \bar{\alpha} a^{+}(f) + \lambda a^{0}(f)$

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 96, série *Probabilités et applications*, n° 9 (1991), p. 69-72

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1991__96_9_69_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Une remarque sur le processus : $\alpha a(f) + \overline{\alpha} a^+(f) + \lambda a^0(f)$

A. DERMOUNE

Soit $H = L^2(E,\mu)$, où μ est une mesure positive et sans perdre de généralités on suppose que μ est bornée. L'espace de Fock symétrique sur H est noté par Fock(H), et si U désigne l'espace des fonctions indicatrices de E on note par $S(U)$ l'algèbre symétrique sur U, on obtient ainsi le triplet centré sur l'espace Fock(H) suivant :

$$S(U) \hookrightarrow \text{Fock}(H) \hookrightarrow \text{Pôl}(U) \tag{1}$$

où Pôl(U) désigne le dual algébrique de $S(U)$.

On peut donc appliquer la théorie de noyaux et de symboles des opérateurs linéaires de Fock(H) dont le domaine contient $S(U)$, [1], [2].

Soient maintenant λ un réel non nul, pour chaque f élément de U on considère l'opérateur :

$$X(f) = a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f) \tag{2}$$

où $a(f), a^+(f)$ et $a^0(f)$ désignent respectivement l'opérateur d'annihilation de création et de comptage .

On se propose de calculer la loi de $X(f)$ dans le cas où f est réelle, et plus précisément on va montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit $q(f)$ le processus de Poisson composé d'intensité $\frac{d\mu}{\lambda^2}$, on pose :*

$$M(f) = \lambda q(f)$$

alors dans l'état vide $\mathbb{1}$ de Fock(H) le processus $X(f)$ a la même loi que $M(f)$.

Preuve. Soit I l'isométrie de Fock($L^2(E, \frac{d\mu}{\lambda^2})$) dans $L^2(\Omega, \sigma(q(f), f \in U))$, [3], I associé au vecteur exponentielle e^z la variable aléatoire $\varepsilon(z)$ définie par :

$$\varepsilon(z)(\omega) = e^{-\int z(x)\frac{d\mu}{\lambda^2}(x)} \Pi_{i=1}^{n(\omega)}(1 + z(x_i)) \tag{3}$$

Pour chaque $g \in L^2(E, d\mu)$, et si on considère $q(g)$ comme opérateur de multiplication dans $L^2(\Omega, \sigma(q))$, alors par l'isométrie I on lui associe l'opérateur suivant :

$$I\, q(g) I^{-1} = Y(g). \tag{4}$$

Le noyau de $Y(g)$ est défini par :

$$\forall (z.z') \in U^2, \widetilde{Y}\,(g) \quad '(z, z') = < Y(g) e^{z'}, e^{z} > . \tag{5}$$

En utilisant (4) et (3) alors par un calcul directe on obtient :

$$\forall (z.z') \in U^2, \widetilde{Y}\,(g)(z, z') = e^{\int z(x) z'(x) \frac{d\mu(x)}{\lambda^2}} \left[\int g(x) z(x) \frac{d\mu(x)}{\lambda^2} + \int g(x) z'(x) \frac{d\mu(x)}{\lambda^2} + \int g(x) z(x) z'(x) \frac{d\mu(x)}{\lambda^2} \right] \tag{6}$$

Si $M(f) = \lambda q(f)$, alors on a :

$$E\,[M(f)\varepsilon(z)\varepsilon(z')] = \widetilde{Y}\,(\lambda f)(z, z') = e^{\int z(x) z'(x) \frac{d\mu(x)}{\lambda^2}} \left[\int f(x) z(x) \frac{d\mu(x)}{\lambda} + \int f(x) z'(x) \frac{d\mu}{\lambda} + \int f(x) z(x) x'(x) \frac{d\mu}{\lambda} \right] \tag{7}$$

Le dernier terme est égal au noyau de $a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f)$ d'où on a :

$$E\,[M(f)\varepsilon(z)\varepsilon(z')] = < [a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f)]\, e^{z'/\lambda}, e^{z/\lambda} > \tag{8}$$

Si $\Gamma(U)$ désigne la transformation unitaire de $\mathrm{Fock}(L^2(E, \frac{d\mu}{\lambda^2}))$ dans $\mathrm{Fock}(L^2(E, \mu))$ définie par la seconde quantification de l'isométrie U suivante :

$$L^2(E, \frac{d\mu}{\lambda^2}) \ni \longrightarrow \lambda^{-1} f \in L^2(E, d\mu)$$

alors (8) devient :

$$E\,[M(f)\varepsilon(z)\varepsilon(z')] < \Gamma(U^{-1}) a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f) \Gamma(U) e^{z'}, e^{z} > \tag{9}$$

En utilisant (7) il vient :

$$Y(\lambda f) = \Gamma(U^{-1})a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f)\Gamma(U) \qquad (10)$$

Comme $\Gamma(U)\ \mathbb{1} = \mathbb{1}$ alors $a(f)+a^+(f)+\lambda a^0(f)$ a même loi dans l'état $\mathbb{1}$ que $M(f)$.

Application. Soient α un complexe non nul et λ un réel non nul, on pose :

$$X(f) = \alpha a(f) + \overline{\alpha} a^+(f) + \lambda a^0(f).$$

Soit $\Gamma(V)$ la transformation unitaire de Fock$(L^2(E,d\mu))$ dans Fock$(L^2(E,|\alpha|^2 d\mu))$ définie par la seconde quantification de l'isométrie V suivante :

$$L^2(E,d\mu) \ni f \longrightarrow \alpha^{-1} f \in L^2(E,|\alpha|^2 d\mu)$$

Le processus $\Gamma(V)\ [X(f)]$ à valeurs opérateurs de Fock$(L^2(E,|\alpha|^2 d\mu))$ a pour noyau :

$$< \Gamma(V)\ [X(f)]e^{z'}, e^z >= e^{|\alpha|^2 \int z(x)z'(x)d\mu(x)}\ [|\alpha|^2\{\int f(x)z(x)d\mu(x)$$

$$+ \int f(x)z'(x)d\mu(x) + \lambda \int f(x)z(x)z'(x)d\mu(x)\}]$$

d'où $\Gamma(V)\ [X(f)] = \underline{a}(f) + \underline{a}^+(f) + \lambda \underline{a}^0(f)$, avec $\underline{a}(f), \underline{a}^+(f)$ et $\underline{a}^0(f)$ sont respectivement les opérateur d'aninhilation de création et de comptage de Fock$(L^2(E,|\alpha|^2 d\mu))$.

En utilisant la proposition alors $\alpha a(f) + \overline{\alpha} a^+(f) + \lambda a^0(f)$ a même loi dans l'état vide $\mathbb{1}$ de Fock$(L^2(E,d\mu))$ que $\lambda q(f)$, où $q(f)$ est un processus de Poisson compensé d'intensité $\dfrac{|\alpha|^2 d\mu}{\lambda^2}$.

Dans le cas où $H = L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ on retrouve le résultat de Parthasarathy [4].

References

[1] Berezin F.A., *The method of second quantization.* Academic press, (1966)

[2] Krée P., Raccka R., *Kernel and Symbol in quantum field theory.* Ann. I.H.P., Section A, Vol. 28, numéro 1, pp. 41-73 (1978)

[3] Neveu J., *Processus aléatoire gaussien.* Cours de Montréal, (1968)

[4] Meyer P.A., *Eléments de probabilités quantiques.* Séminaire de probabilités XX.

A. DERMOUNE
Université du Mans
Route de Laval
B.P. 535
72017 LE MANS Cedex