ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

A. DERMOUNE

Opérateurs d'échange et quelques applications des méthodes de noyaux

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 96, série *Probabilités et applications*, n° 9 (1991), p. 45-54

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1991__96_9_45_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OPERATEURS D'ECHANGE ET QUELQUES APPLICATIONS DES METHODES DE NOYAUX

A. DERMOUNE

Soit $H = L^2(T,dt)$ avec $T = [0,1]$, pour chaque entier d on désigne par Fock $(\overset{d}{\underset{j=1}{\oplus}} H)$ l'espace de Fock symétrique sur $\overset{d}{\underset{j=1}{\oplus}} H$. On peut donc construire toute une famille d'opérateurs de créations $a_o^j(t)$, d'annihilation $a_j^o(t)$, de nombre $a_j^j(t)$ et d'échange $a_j^i(t)$ pour $1 \leq i , j \leq d$, sur l'espace de Fock multiple Fock $(\overset{d}{\underset{j=1}{\oplus}} H)$.

On considère par exemple $d = 2$, et pour chaque $(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2$ on pose :

$$A_t^+ = \xi\, a_t^+ \otimes I + \overline{\eta}\, I \otimes a_t$$

$$A_t = \overline{\xi}\, a_t \otimes I + \eta\, I \otimes a_t^+ .$$

On se donne aussi une matrice $m = (m_{i,j})$ sur $\mathbb{C}^2$ hermitienne, et on se propose de calculer la loi du processus $X_t = A_t^+ + A_t + \sum_{i,j} m_{i,j}\, a_j^i(t)$ (cette question m'a été posée par Meyer P.A.) .

Le but du présent travail est de montrer que X_t est un P.A.I. (processus à accroissement indépendant dans l'état vide de Fock $(H \times H)$), d'expliciter les opérateurs d'échange à l'aide de noyau et symbole et de donner une nouvelle démonstration d'un résultat de Hudson-Parthasarathy concernant le processus $a_t^+ + a_t + c\, a_t^o$.

I. Rappels et définitions.

1. Triplet centré sur l'espace de Fock. Soit U l'espace des fonctions étagées sur T , pour chaque entier n , on désigne par $S_n(U \times U)$ l'espace des tensors symétriques d'ordre n sur $U \times U$ non complété, et $S(U \times U)$ la somme algébrique des espaces $S_n(U \times U)$.

On note aussi par $S_n(H \times H)$ l'espace des tensors symétriques d'ordre n complété, l'espace de Fock symétrique sur $H \times H$ est défini par :

$$\text{Fock}(H \times H) = \bigoplus_{n=o}^{+\infty} n! S_n(H \times H) \simeq \bigoplus_{n,m=o}^{\infty} n!m!\, S_n(H) \otimes S_m(H) .$$

où

$n!\, S_n(H \times H)$ signifie que le produit scalaire de $S_n(H \times H)$ est multiplié par n !

Si $\text{Pôl}(U \times U)$ est l'espace des séries formelles sur $U \times U$, alors on a le triplet suivant :

$$S(U \times U) \hookrightarrow \text{Fock}(H \times H) \hookrightarrow \text{Pôl}(U \times U) .$$

On peut donc appliquer la théorie de noyau et symbole pour les opérateurs linéaires de l'espace Fock $(H \times H)$ [BE.F.A. 66] ,[KR.P,RA. R. 78], [KR.P.86 + 88].

Si ϕ et ψ sont deux éléments de Fock $(H \times H)$, on notera par $<\phi , \psi>$ le produit scalaire dans $\text{Fock}(H \times H)$ antilinéaire en ϕ et linéaire en ψ , on notera aussi par (ϕ , ψ) la forme bilinéaire sur $\text{Fock}(H \times H)$ définie par :

$$(\phi , \psi) = <\overline{\phi} , \psi > .$$

Si $z = (z_1, z_2)$ est un élement de $U \times U$, on posera $z^{\otimes n} = z^n$ (resp. $z_1^{\otimes n} = z_1^n$)

2. Opérateurs de nombre et d'échange. Pour des raisons techniques, on va donner ici une présentation légèrement différente que celle de P.A.MEYER.

Soit $m = (m_{i,j})$ une matrice hermitienne de $\mathbb{C}^2$, qui définit comme suit un opérateur hermitien sur $H \times H$:

$$\forall f = (f_1, f_2) \in H \times H , \qquad Mf = \left(\sum_{j=1}^{2} m_{1,j} f_j , \sum_{j=1}^{2} m_{2,j} f_j \right) .$$

On peut donc par la seconde quantification définir un opérateur auto-adjoint $d\Gamma(M)$ sur $\text{Fock}(H \times H)$.

2.1. Noyau et symbole de $d\Gamma(M)$.

D'après la théorie de noyau [BE.F.A. 66] , [KR.P,RA.R. 78] ,[KR.P., 86+88] , le noyau de $d\Gamma(M)$ est la série formelle $\widetilde{d\Gamma(M)}$ définie sur $U \times U$ comme suit , pour tout

$z = (z_1, z_2)$, $z' = (z'_1, z'_2)$ éléments de $U \times U$, on a :

(1) $\widetilde{d\Gamma(M)}(z,z') = \sum_{m,n=o}^{+\infty} \frac{(d\Gamma(M) z'^m, z^n)}{m!n!}$.

Si $e^{i\lambda M}$ désigne le groupe unitaire sur $H \times H$ engendré par M , alors le groupe unitaire $\Gamma(e^{i\lambda M})$ engendré par $d\Gamma(M)$ est défini par :

(2) $\Gamma(e^{i\lambda M})e^z = e^{(e^{i\lambda M}z)}$, où e^z est le vecteur exponentiel de Fock $(H \times H)$.

En combinant (1) et (2) on obtient :

(3) $\begin{cases} \widetilde{d\Gamma(M)}(z,z') = [\sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j} z_i . z'_j] e^{z.z'} \\ z.z' = z_1.z'_1 + z_2.z'_2 \text{ , avec } z_1.z'_1 = \int_T z_1(t) z'_1(t) dt, \ \forall (z_1, z'_1) \in U^2 . \end{cases}$

3. Processus d'opérateurs de nombre et d'échange. Pour chaque $t \in T$, on pose :

$$H_t = L^2([0,t]),\ H^t = L^2([t,1]) ,\ z_t = ((z_1)_t, (z_2)_t) \text{ avec } (z_i)_t = z_i\, 1_{[o,t]}$$

et $z^t = (z_1^t, z_2^t)$ avec $z_i^t = z_i\, 1_{[t,1]}$.

On considère la restriction de M à $H_t \times H_t$, on construit comme précédemment l'opérateur auto-adjoint qu'on note aussi par $d\Gamma(M)$ sur $Fock(H_t \times H_t)$. Par tensorisation on définit l'opérateur $M_t = d\Gamma(M) \otimes I^t$ sur $Fock(H \times H)$, où I^t désigne l'opérateur d'identité de Fock $(H^t \times H^t)$.

On obtient ainsi le processus d'opérateurs adapté $t \to M_t$ dont le noyau est donné par :

(1) $\forall (z,z') \in U^2 \times U^2$, $\widetilde{M}(t,z,z') = \widetilde{M}(t, z_t, z'_t) e^{z^t . z'^t} = \sum_{i,j=1}^{2} (z_i)_t . (z'_j)_t m_{i,j} e^{z.z'}$.

Donc le symbole est égal à :

(2) $\forall (z,z') \in U^2 \times U^2$, $M(t,z,z') = \sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j} (z_i)_t . (z'_j)_t$.

Pour chaque couple d'entiers $(i,j) \in \{1,2\}^2$ on définit le processus $a_j^i(t)$ dont le symbole est donné par :

(3) $a_j^i(t,z,z') = (z_i)_t . (z'_j)_t$.

Alors il est facile de voir que $M_t = \sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j}\, a_j^i(t)$.

Nous remarquons que

(4) $a_1^1(t) = a_t^o \otimes I$, $a_2^2(t) = I \otimes a_t^o$.

où

a_t^o est le processus de nombre sur Fock(H).

Il est donc naturel d'appeler $a_i^i(t)$ processus de nombre et d'appeler $a_j^i(t)$ pour $i \neq j$ le processus d'échange. Dans l'appendice nous donnerons les formes explicites des opérateurs $a_j^i(t)$, ainsi que leurs commutateurs.

4. Loi du processus $X_t = A_t^+ + A_t + \sum_{i,j} m_{i,j}\, a_j^i(t)$.

Soit (ξ,η) un couple de nombres complexes, on pose :

$$(1) \quad \begin{cases} A_t^+ = \xi\, a_t^+ \otimes I + \bar{\eta}\, I \otimes a_t \\ A_t = \bar{\xi}\, a_t \otimes I + \eta\, I \otimes a_t^+ \end{cases} .$$

On pose comme dans [ME. P.A. 89] :

$$(2) \quad \begin{cases} a_o^1(t) = a_t^+ \otimes I \ , \quad a_1^o(t) = a(t) \otimes I \\ a_o^2(t) = I \otimes a^+(t) \ , \quad a_2^o(t) = I \otimes a(t) \end{cases} .$$

Avec ceci le processus $X_t = A_t^+ + A_t + \sum m_{i,j}\, a_j^i(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(3) \qquad X_t = \xi\, a_o^1(t) + \bar{\eta}\, a_2^o(t) + \bar{\xi}\, a_1^o(t) + \eta\, a_o^2(t) + \sum_{i,j} m_{i,j}\, a_j^i(t) .$$

Nous prenons maintenant une base orthonormée (V_1,V_2) de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de M.. Si (e_1,e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^2$, alors on note par (α_j^i) les coefficients de (V_1,V_2) dans la base (e_1,e_2), c'est-à-dire

$$(4) \qquad V_1 = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^1\, e_j \ , \ V_2 = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^2\, e_j$$

Dans cette nouvelle base et si on note par $H^j = L^2(T,V_j)$, alors on a :

$$(5) \qquad H \times H \simeq H^1 \times H^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Fock}(H \times H) \simeq \mathrm{Fock}(H^1 \times H^2) .$$

On notera aussi par U^j l'espace $U \otimes V_j$, et on a ainsi :

$$U \times U \simeq U^1 \times U^2 .$$

4.1. Expression de X_t dans $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$.

Il est clair que si on note par (λ_1,λ_2) les valeurs propres de M associées respectivement aux vecteurs propres (V_1,V_2) alors le processus M_t dans $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$ s'exprime ainsi :

$$(1) \qquad M_t = \sum_{j=1}^2 \lambda_j\, a_{\sim j}^j(t)$$

$\underset{\sim}{a}^j_j(t)$ est le processus d'opérateurs sur $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$ dont le symbole est donné par $\forall (z_1,z_2)\ ,\ (z_1',z_2') \in U^1 \times U^2$,

$$(2)\begin{cases} \underset{\sim}{a}^j_j(t,(z_1,z_2),(z_1',z_2')) = (z_j)_t . (z_j')_t \\ \text{où} \\ z_j . z_j' = \langle \bar{z}_j, z_j' \rangle_{H^j} \text{ , avec } \langle\ ,\ \rangle_{H^j} \text{ désigne le produit scalaire} \end{cases}$$

dans H^j .

Si $(\underset{\sim}{a}^o(t))_j$ désigne le processus de nombre dans $\mathrm{Fock}(H^j)$, alors $\underset{\sim}{a}^1_1(t) = (\underset{\sim}{a}^o(t))_1 \otimes I^2$, $\underset{\sim}{a}^2_2(t) = I^1 \otimes (\underset{\sim}{a}^o(t))_2$, où I^j désigne l'opérateur identité de $\mathrm{Fock}(H^j)$.

Il reste donc à exprimer les processus $a^i_o(t)$ et $a^o_i(t)$ dans $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$, il suffit pour cela d'exprimer $a^o_1(t)$ et $a^o_2(t)$ dans $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$.

Soit $z = z_1 V_1 + z_2 V_2$ un vecteur de $H^1 \times H^2$, en utilisant les coordonnées de V_1, V_2 dans la base canonique (e_1,e_2) , il vient que :

$$(3)\quad z = \sum_{j=1}^{2} \alpha^j_1 z_j\, e_1 + \sum_{j=1}^{2} \alpha^j_2 z_j\, e_2 .$$

Avec ceci on a :

$$(4)\quad a^o_i(t) e^z = \Big(\sum_{j=1}^{2} \alpha^j_i \int_o^t z_j(s)ds \Big) e^z .$$

Si on pose :

$$(5)\begin{cases} \underset{\sim}{a}^o_1(t) = (a(t))_1 \otimes I^2 \ ,\ \underset{\sim}{a}^o_2(t) = I^1 \otimes (a(t))_2 \\ \text{où} \\ (a(t))_j \text{ désigne le processus d'annihilation sur } \mathrm{Fock}(H^j) , \end{cases}$$

alors $a^o_i(t) = \sum_{j=1}^{1} \alpha^j_i \underset{\sim}{a}^o_j(t)$.

On notera par $\underset{\sim}{a}^j_o(t)$ le processus adjoint de $\underset{\sim}{a}^o_j(t)$

Finalement X_t s'exprime dans $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$ comme suit :

$$(6)\quad X_t = \bar{\xi} \sum_{j=1}^{2} \alpha^j_1 \underset{\sim}{a}^o_j + \xi \sum \bar{\alpha}^j_1 \underset{\sim}{a}^j_o + \bar{\eta} \sum_{j=2}^{2} \alpha^j_2 \underset{\sim}{a}^o_j + \eta \sum_{j=1}^{2} \bar{\alpha}^j_2 \underset{\sim}{a}^j_o + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \underset{\sim}{a}^j_j(t)$$

et si on pose :

$$(7)\quad \omega = \xi\, e_i + \eta\, e_2 ,$$

alors X_t est la somme de deux processus $q_1(t) + q_2(t)$, où

$$(8)\begin{cases} q_1(t) = \bar{\omega} . v_1 \underset{\sim}{a}^o_1(t) + \omega . \bar{v}_1 \underset{\sim}{a}^1_o(t) + \lambda_1 \underset{\sim}{a}^1_1(t) \\ q_2(t) = \bar{\omega} . v_2 \underset{\sim}{a}^o_2(t) + \omega . \bar{v}_2 \underset{\sim}{a}^2_o(t) + \lambda_2 \underset{\sim}{a}^2_2(t) . \end{cases}$$

Il est donc clair sachant un résultat de Hudson-Parthasarathy[ME.P.A.86] que X_t est un P.A.I. si on désigne par M_t^1 et M_t^2 deux processus de Poisson compensés et indépendants d'intensités respectives $|\bar{\omega}.v_1|^2$ et $|\bar{\omega}.v_2|^2$ et de longueurs de saut égales respectivement à λ_1 et λ_2 , et si on désigne par B_t^1 et B_t^2 deux mouvements browniens indépendants d'intensités respectives $\frac{|\bar{\omega}.v_1|^2}{2}$ et $\frac{|\bar{\omega}.v_2|^2}{2}$, alors on a le résultat suivant :

PROPOSITION. - Soit $m = (m_{i,j})$ une matrice hermitienne de $\mathbb{C}^2$, et soit (v_1,v_2) une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de m associés respectivement aux valeurs propres (λ_1,λ_2) . Alors le processus d'opérateurs :

$$X_t = \xi\, a_t^+ \otimes I + \bar{\eta}\, I \otimes a_t + \bar{\xi}\, a_t \otimes I + \eta\, I \otimes a_t^+ + \sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j}\, a_j^i(t)$$

a pour loi dans l'état $11 \otimes 11$ de $\mathrm{Fock}(H \times H)$:

a/ Si m est non-dégénérée alors X_t a la même loi que $M_t^1 + M_t^2$.

b/ Si m est dégénérée et non nulle, on suppose par exemple que λ_2 est nulle, alors X_t a la même loi que $M_t^1 + B_t^2$.

c/ On suppose que $m \equiv 0$, alors X_t a la même loi que $B_t^1 + B_t^2$.

En plus la loi de X_t est indépendante de la base (v_1,v_2) .

Remarquer que les résultats de ce paragraphe se prolongent sans difficultés à $\mathbb{C}^d$ pour tout $d \geq 2$.

II. Appendice : Dans cette partie on va donner une nouvelle démonstration (qui est déjà faite dans [DE.A. 89] dans un cadre plus général) de ce résultat de Hudson-Parthasarathy, nous donnerons aussi des résultats concernant les opérateurs d'échange.

1. On considère le processus $q_t = \bar{\alpha}\, a_t^+ + \alpha\, a_t + \lambda\, a_t^o$, le noyau de q_t est égal à :

$$(1)\quad \tilde{q}(t,z,z') = [\bar{\alpha} \int_0^t z(s)ds + \alpha \int_0^t z'(s)ds + \lambda \int_0^t z(s)z'(s)ds]e^{z.z'}$$

et pour simplifier on prend $\alpha = 1$.

Soit maintenant (M_t) une martingale solution de l'équation de structure suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} d[M,M]_t = \lambda\, dM_t + dt \,. \\ M_o = 0 \,. \end{cases}$$

Il est bien connu qu'une telle martingale est un processus de Poisson compensé d'intensité 1 et de longueur de saut égale à λ , voir par exemple M.Emery [EM.M.89]. L'isométrie de P.A.Meyer, [ME.P.A. 76] définie par les intégrales stochastiques multiples par rapport à (M_t) donne une isométrie surjective I de Fock(H) dans $L^2(\Omega,\sigma(M_t,t \in T))$.

Pour tout z élément de U , $I(e^z)$ est la valeur terminale de la martingale exponentielle $\varepsilon(z)_t$, c'est-à-dire

$$(3)\quad \varepsilon(z)(t) = 1 + \int_o^t z(s)\ \varepsilon(z)(s-)dM_s = I(e^{z_t}) .$$

Soit maintenant Y_t l'opérateur linéaire de Fock(H) associé à M_t par l'isométrie I , c'est-à-dire

$$(4)\quad Y_t = I^{-1} M_t I$$

où

M_t est vu comme opérateur de multiplication dans $L^2(\Omega,\sigma(M_t,\ t \in T))$.

Le noyau de Y_t est donné par :

$$\tilde{Y}(t,z,z') = (Y_t e^{z'},e^z) = E[\,M_t I(e^{z'_t})\ I(e^{z_t})]\ e^{\int_t^1 z(s)z'(s)ds} .$$

Nous posons $J(t) = E[M_t\ I(e^{z'_t})I(e^{z_t})]$, alors en appliquant la formule de Itô pour le produit des trois martingales $M_t\ I(e^{z_t})\ I(e^{z'_t})$ et en utilisant (2) et (3) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dJ(t)}{dt} = z(t)z'(t)J(t) + [z(t) + z'(t) + \lambda z(t)z'(t)]\ e^{z_t . z'_t} \\ J(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction J(t) est la solution de cette équation linéaire avec second membre, qui est donc égale à :

$$J(t) = \int_o^t z(s) + z'(s) + \lambda z(s)z'(s)ds\ e^{z_t . z'_t} .$$

Finalement $\tilde{Y}(t,z,z') = \int_o^t z(s) + z'(s) + \lambda z(s)z'(s)ds\ e^{z.z'}$, d'où $X_t = Y_t$.

2. Formes explicites des opérateurs $a^i_j(t)$.

D'après la formule (3) du paragraphe I.3, le noyau de $a^i_j(t)$ est égal à :

$$\tilde{a}^i_j(t,z,z') = (a^i_j(t)e^{z'},e^z) = [\,(z_i)_t \cdot (z'_j)_t\,]\ e^{z.z'} .$$

On obtient en identifiant les deux derniers termes le résultat suivant :

(1) PROPOSITION. - Pour tout $z = (z_1, z_2) \in U^2$ et pour tout couple d'entiers (m,n) on a :

$$a_1^2(t)[z_1^m \otimes z_2^n] = m\, z_1^{m-1} \otimes a^+((z_1)_t) z_2^n$$

$$a_2^1(t)[z_1^m \otimes z_2^n] = n\, a^+((z_2)_t) z_1^m \otimes z_2^{n-1} .$$

2.1. Prolongement par continuité des opérateurs d'échange à la somme algébrique

$$\mathcal{F} = \sum_{m,n} S_m(H) \otimes S_n(H) .$$

Une conséquence de la proposition (1) est le résultat suivant :

$$\forall (z_1,z_2) \in U^2 , \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 , \quad \forall t \in T , \text{ on a :}$$

$$(1) \qquad \begin{aligned} \| a_1^2(t)\, z_1^m \otimes z_2^n \| &\leq \sqrt{n+1}\, \| z_1^m \otimes z_2^n \| \\ \| a_2^1(t)\, z_1^m \otimes z_2^n \| &\leq \sqrt{m+1}\, \| z_1^m \otimes z_2^n \| . \end{aligned}$$

Il en résulte que $a_j^i(t)$ se prolonge par continuité à $S_m(H) \otimes S_n(H)$, plus précisément si on pose :

$$\underline{s} = (s_1, \ldots, s_{m-1}) \in T^{m-1} , \quad \underline{t} = (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in T^{n+1} \quad \text{et}$$
$$\underline{t}^{k+1} = (t_1, \ldots, t_k, t_{k+2}, \ldots, t_{n+1}) \in T^n ,$$

alors on a : $\forall f_{m,n} \in S_m(H) \otimes S_n(H)$,

$$(2) \qquad [a_1^2(t) f_{m,n}](\underline{s},\underline{t}) = \frac{m}{n+1} \sum_{k=o}^{n} f_{m,n}(\underline{s}, t_{k+1}, \underline{t}^{k+1}) 1_{(o,t)}(t_{k+1}) .$$

De même si on pose :

$$\underline{v} = (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in T^{n-1} , \quad \underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{m+1}) \in T^{m+1}$$
$$\underline{u}^{k+1} = (u_1, \ldots, u_k, u_{k+2}, \ldots, u_{m+1}) \in T^m ,$$

alors on a

$$(3) \qquad [a_2^1(t) f_{m,n}](\underline{u},\underline{v}) = \frac{n}{m+1} \sum_{k=o}^{m} f_{m,n}(\underline{u}^{k+1}, u_{k+1}, \underline{v}) 1_{[o,t]}(u_{k+1}) .$$

Nous remarquons que si $a_j^i(t)^*$ désigne l'adjoint formel de $a_j^i(t)$, alors on a pour $i \neq j$, $(a_j^i(t))^* = a_i^j(t)$.

(4) Remarques. a/ Pour chaque couple d'entiers (i,j) appartenant à $\{1,2\}\times\{1,2\}$, on définit l'opérateur linéaire τ_j^i de Fock $(H \times H)$ par :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad , \quad \forall f_{m,n} \in S_m(H)) \otimes S_n(H) \ ,$$

$$\tau_1^2(f_{m,n})(\underline{t},\underline{s}) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} f_{m,n}(\underline{t}, s_{k+1}, \underline{s}^{k+1})$$

où

$$\underline{t} \in T^{m-1} \quad , \quad \underline{s} \in T^{n+1}$$

respectivement

$$\tau_2^1(f_{m,n})\ (\underline{u},\underline{v}) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=o}^{m} f_{m,n}(\underline{u}^{k+1}, u_{k+1}, \underline{v})$$

où

$$\underline{u} \in T^{m+1} \quad , \quad \underline{v} \in T^{n-1} \ .$$

Ainsi il est clair que τ_1^2 (resp. τ_2^1) envoie $S_m(H) \otimes S_n(H)$ dans $S_{m-1}(H) \otimes S_n(H)$ (resp. dans $S_{m+1}(H) \otimes S_{n-1}(H)$) , en plus on a les relations suivantes :

$$a_2^1(t) = \tau_2^1[I \otimes a_t^o] \quad , \quad a_1^2 = \tau_1^2[a_t^o \otimes I] \ .$$

Ces formules explicites nous permettent par exemple de calculer les commutateurs $[a_j^i(t_1),\ a_\ell^k(t_2)]$, des opérateurs $a_j^i(t_1)$ et $a_\ell^k(t_2)$. Ils sont donnés par $\forall (i,j) \in \{0,1,2\}^2$, $\forall (k,\ell) \in \{0,1,2\}^2$:

$$[a_j^i(t_1),\ a^k(t_2)] = \delta_j^{'k}\, a_\ell^i(t_1 \wedge t_2) - \delta_i^{'\ell}\, a_j^k(t_1 \wedge t_2)$$

où

$$a_o^o(t) = t \ , \ \delta_j^{'k} = \delta_j^k \ \text{ si } \ (j,k) \neq (0,0) \ \text{ et } \ \delta_o^{'o} = 0 \ .$$

Les symboles $\delta_j^{!k}$ sont appelés symboles d'Evans par P.A.MEYER.

b/ Les résultats de cette partie s'étendent sans difficulté aux opérateurs d'échange de l'espace de Fock multiple $\mathrm{Fock}(\bigoplus_{j=1}^{d} H)$ pour d quelconque.

R E F E R E N C E S

[BE.F.A 66] BEREZIN F.A. . - The method of second quantization. Academic Press, 1966.

[DE.A. 189] DERMOUNE A. . - Quelques interactions entre le calcul stochastique et les probabilités non commutatives, Manuscrit 1989.

[EM.M. 89] EMERY M. - On the Azema martingale , à paraître.

[KR.P., RA. R. 78] KRÉE P. , RACZKA R. - Kernel and symbol in quantum field theory. Ann. Inst. H.Poincaré, section A, vol. 28, n° 1, pp. 41-73, 1978.

[KR.P. 88] KRÉE P. - Dim. Free stochastic calculus in the distribution sens, à paraître.

[ME.P.A. 76]MEYER P.A. - I.s.m. par rapport à certaines martingales. Séminaire de probabilité, X, pp. 325-331.

[ME.P.A. 86] MEYER P.A. - Eléments de probabilités quantiques. Séminaire de probabilité, XX.

[ME.P.A. 89] MEYER P.A. - Probabilités non commutatives sur l'espace de Fock, à paraître, 1989.