ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

LOTFI FARHANE

Espacements multivariés généralisés et recouvrements aléatoires

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 96, série *Probabilités et applications*, n° 9 (1991), p. 15-31

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1991__96_9_15_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESPACEMENTS MULTIVARIES GENERALISES

ET RECOUVREMENTS ALEATOIRES

LOTFI FARHANE

Résumé :

Soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d sur $\mathbb{R}^d$, admettant une densité f continue. Nous étudierons le comportement asymptotique presque sûr de l'espacement maximal Δ_n engendré par $x_1, \ldots, x_n$; nous ramenerons cette étude à un problème de recouvrements aléatoires.

Mots clés :

Espacements. Processus de Poisson. Recouvrement.

English title :

General multivariate spacings and random coverings

Abstract :

Let $x_1, x_2, \ldots$ be an i.i.d sequence of random variables defined on $\mathbb{R}^d$ with a continuous density f. We consider the maximal spacing Δ_n generated by $x_1, \ldots, x_n$; and our main goal is to study the asymptotic almost sure behavior of Δ_n, and this question is related to the study of a convering problem.

Key words :

Spacings. Poisson process. Coverings.

Introduction :

Les problèmes d'espacements ont inspiré plusieurs travaux et les résultats obtenus se limitent en majorité au cas uniforme. En 1984 P.Deheuvels a exploré le cas d'espacements issus de variables aléatoires admettant une fonction de répartition de classe $\mathcal{C}^1$, et a démontré, sous certaines hypothèses, des théorèmes limites pour l'espacement maximal. Nous essayons d'étendre ses résultats au cas multivarié.

Résultats :

Soit K un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $|\partial K| = 0$ et $|K| = 1$ où $|.|$ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

$x_1, x_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant une densité de probabilité f continue telle qu'il existe $x_0 \in K$ avec $0 < f(x_0) \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in K$.

A un ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$; on appelle espacement maximal d'ordre n qu'on note Δ_n :

$$\Delta_n = \text{Sup} \{ r / \ \exists x \in K \text{ avec } x + rA \subset K \setminus \{ x_1, x_2, \ldots x_n \} \}$$

$$\Delta_n \geq r \iff \exists x \in K \ ; \ x + rA \subset K \text{ et } x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \{ X_i - rA \}$$

Soit $K_r = \{ x / x + rA \subset K \}$, on a l'équivalence :

$\Delta_n \geq r$ ssi K n'est pas recouvert par $\{ X_i - rA \}_{i=1}^n$

On voit que l'étude de l'espacement maximal se ramène à un problème de recouvrements aléatoires.

Les résultats sont les suivants :

Théorème 1:

Soit A un ensemble convexe défini sur un espace de probabilité $(\Omega_A , \mathbb{A}_A , \mu)$ tel que l'évènement $x \in A$ soit mesurable pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^d$ et vérifiant :

$E|A| < \infty$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(r(A))^{d+\varepsilon} < \infty$ où $r(A) = \underset{x \in A}{\text{Sup}} |x|$

Pour $a > 0$, on considère les ensembles $aA + X_i$, $i \geq 1$

$$N_a = \text{Inf} \{ n / K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (aA + X_i) \}$$

$$u \in \mathbb{R} \ , \ \lambda(a) = \frac{1}{E|aA| f(x_0)} \left(\text{Log} \frac{|K|}{E|aA|} + d \ \text{Log Log} \frac{|K|}{E|aA|} + \text{Log } \alpha(A) + u \right)$$

On a que lorsque $a \to 0$

$$\exp - \frac{1}{f(x_0)^d} e^{-u} \leq P(Na < \lambda(a)) \leq \exp - e^{-u}$$

Théorème 2 :

$$\lim_{n \to \infty} \inf \frac{n\, f(x_0)\, \Delta_n^d - \text{Log } n}{\text{Log Log } n} \geq d-1 \qquad \text{p.s.}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup \frac{n\, f(x_0)\, \Delta_n^d - \text{Log } n}{\text{Log Log } n} \leq d+1 \qquad \text{p.s.}$$

Cet article est constitué de deux parties, la première est consacrée à un rappel de concepts géneraux sur les mesures aléatoires et les processus ponctuels, et la seconde aux démonstrations des résultats énoncés précédemment.

1) Mesure aléatoire, processus ponctuel :

Soit S un espace topologique localement compact, séparé et séparable.

θ désigne la σ algèbre engendrée par sa topologie de $\mathcal{B}$ la classe des ensembles relativement compacts de θ, F est la famille des fonctions $f : S \to [0,+\infty[$ θ mesurables.

On désigne par μ une mesure sur (S,θ) localement finie : $\mu(B) < \infty$; $\forall\ B \in \mathcal{B}$.

On note par $\mathfrak{m}$ l'ensemble des mesures localement finies et par $\mathfrak{n}$ l'ensemble des mesures μ localement finies telles que $\mu(B) \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}$.

M (resp. N) désigne la σ algèbre engendrée par les applications :

$\mu \to \mu(A)$ $A \in \theta$, $\mu \in \mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{n}$).

Définition :

On appelle mesure aléatoire (resp. processus ponctuel) sur S toute application mesurable d'un espace de probabilité (Ω,A,P) vers $(\mathfrak{m},M)$ (resp. $(\mathfrak{n},N)$.

Φ mesure aléatoire , on a que :

$\Phi : \omega \in \Omega \to \Phi_\omega$ une mesure sur S telle que :

$\forall\ A \in \theta$ $\omega \to \Phi_\omega(A)$ est A mesurable.

On notera par $\Phi(A)$ cette variable aléatoire.

On définit également la distribution d'une mesure aléatoire Φ par la mesure de probabilité $P\Phi^{-1}$ sur $(\mathfrak{m},M)$; $(P\Phi^{-1})(\mathfrak{m}) = P(\Phi^{-1}\,\mathfrak{m}) = P(\Phi \in \mathfrak{m})$, $\mathfrak{m} \in M$.

L'intensité $E\Phi$ de Φ est la fonction :

$$(E\Phi)B = E(\Phi B) = \int_{\Omega} \Phi_{\omega}(B)dP(\omega) \ , \quad B \in \mathcal{B}$$

On définit aussi la transformée de Laplace L_{Φ} de Φ par :

$$L\Phi(f) = E(e^{-\Phi f}) = \int_{\Omega} e^{-\Phi_{\omega} f} dP(\omega) \ , \quad f \in F$$

$$\left(\mu \in \mathcal{m} \ , f \in F \ , \ \mu f \text{ est l'intégrale } \int_S f(s)\, \mu(ds) \right)$$

Remarques :

1- L'intensité d'une mesure aléatoire est une mesure :

En effet : $(E\Phi)\varnothing = 0$; $(E\Phi)A \geq 0 \quad \forall A \in \theta$

$A_1,....,A_k,....$ une suite d'ensembles disjoints de θ telle que : $\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} A \in \theta$

On a $(E\Phi) \overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} A = \sum_{i=1}^{\infty} (E\Phi_i)A$;

En efet si on pose $f_n(\omega) = \Phi_{\omega} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{U}} A_i \right)$ alors $0 \leq f_n \leq f$ p.p. où

$f(\omega) = \Phi \left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} A_i \right)$ et le résultat découle de l'application du théorème de convergence monotone.

2) En posant pour $t > 0$ $K_t(A) = -\text{Log } E(e^{-\Phi At})$ $A \in \theta$

On obtient encore une mesure sur (S,θ)

3) Si on prend $f = t \, .1_B$ on obtient pour $t \geq 0$, $B \in \mathcal{B}$ $L_{\Phi}(f) = E(e^{-\Phi(B)t})$.

4) Pour $B_1,...,B_k \in \mathcal{B}$ et $t_i,...,t_k \in \mathbb{R}^+$

$$L_{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i \, 1_{B_i} \right) = E \exp\left(- \sum_{i=1}^{k} \Phi B_i \, t_i \right) = L_{\Phi_1 B,.....,\Phi_k B}(t_1,...,t_k)$$

la transformée de Laplace du vecteur aléatoire $(\Phi B_1,....,\Phi B_k)$.

Définition :

Une mesure aléatoire F est dite complètement aléatoire si pour toute suite finie d'ensembles disjoints $A_1,....,A_k$ les variables aléatoires $\Phi A_1,....,\Phi A_k$ sont indépendantes.

Remarque :

Si $B_1,...,B_n,...$ est une suite d'ensembles disjoints de B.

On a que : $$\Phi\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(B_i)$$

En effet : Comme les variables aléatoires $\Phi(B_n)$ sont indépendantes et positives, et en utilisant la convergence dominée appliquée à la suite de fonctions $f_n(\omega) = 1 - \exp\left(-\Phi_\omega\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right)t\right)$, $t > 0$

on a :

$$L_\Phi\left(t\, 1 \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) = E\left(\exp\left(-\Phi \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i t\right)\right) = E\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \Phi B_i\, t\right)\right) = \prod_{i=1}^{\infty} E\,(\exp\,(-\Phi B_i\, t))$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} L_\Phi(t\, 1_{B_i})$$

Processus de Poisson :

Soit $s \in S$ et considérons la mesure de Dirac δ_s : $\delta_s(A) = 1_A(S)$

$$(S,\theta) \rightarrow (\mathfrak{m},N)$$

L'application est mesurable

$$s \rightarrow \sigma_s$$

σ_s est un processus ponctuel sur S pour tout élément aléatoire s dans (S,θ) ; son intensité est :

$E\sigma_s = Ps^{-1} = \omega$ et sa transformée de Laplace est : $E\ \exp(-\sigma_s f) = E\, e^{-f(s)} = \omega\, e^{-f}$.

Considérons une suite d'éléments aléatoires de S : $X_1,....,X_N$ indépendants de même distribution ω et N une variable de Poisson de moyenne $a \geq 0$ et soit Φ un processus ponctuel de même distribution que $\delta_{X_1}+....+\delta_{X_N}$.

$A \in S$, on a la variable aléatoire : $\Phi(A) = \delta_{X_1}+....+\delta_{X_N}$.

Φ a pour intensité [E(N)] $\omega = a\omega$ et pour transformée de Laplace $E\, e^{-\Phi f} = E(\omega\, e^{-f})^N = \psi(\omega\, e^{-f})$ où ψ est la fonction génératrice d'une variable de Poisson de moyenne a :

$$\psi(s) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n s^n}{n!} = e^{-a(1-s)} \qquad s \in [0,1]$$

en posant $\lambda = a\omega$, $E\, e^{-\Phi f} = e^{-a(1-\omega\, e^{-f})} = e^{-\lambda(1-e^{-f})}$.

Comme $\omega(S) = 1$ on a : $E\, e^{-\Phi f} = e^{-a(1-\omega\, e^{-f})} = e^{-\lambda(1-e^{-f})}$.

Un processus ponctuel ayant une transformée de Laplace de cette forme est un processus de Poisson d'intensité λ.

Construction d'un processus de Poisson :

(S,θ,μ) $\mu \in \mathfrak{m}$

Cas 1 :

$\mu(s) = a < \infty$

$X_1,....,X_N$ sont des variables aléatoires indépendantes de même distribution donnée par la mesure $a^{-1}\,\mu$ et N une variable aléatoire de Poisson de paramètre a et indépendante des X_i

$A \in \theta$; $\Phi(A) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i} A$, on a alors :

$\Phi(\varnothing) = 0$ et

$$P(\Phi(A) = p) = P\left(\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i} A = p \right) = \frac{\mu(A)^p}{p!} e^{-\mu(A)}$$

$$t \in \mathbb{R}^+,\ L_\Phi(t\,1_A) = E\exp(-t\Phi(A)) = E\exp\left(-t \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i} A\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp - t.k\ P\left(\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i} A = k\right)$$

$$= \exp \mu(A)(e^{-t} - 1) = \exp \mu(e^{-t1_A} - 1).$$

On a également :

Si $A_1,...,A_k$ sont disjoints et $t_1,...,t_k \in \mathbb{R}^+$ alors

$$L_{\Phi(A_1),...,\Phi(A_k)}(t_1,...,t_k) = L_\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\, 1_{A_i} \right) = \exp\left\{ \mu\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} t_i\, 1_{A_i} \right) - 1 \right) \right\} \text{ or comme,}$$

$$\mu\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} t_i\, 1_{A_i} \right) - 1 \right) = \int_S \left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} t_i\, 1_{A_i}(s) \right) - 1 \right) d\mu(s) =$$

$$\int_S \sum_{i=1}^{k} 1_{A_i}(s)(e^{-t_i} - 1)\, d\mu(s) = \sum_{i=1}^{k} \int_S 1_{A_i}(s)(e^{-t_i} - 1) d\mu(s) = \sum_{i=1}^{k} \mu(e^{-t_i 1_{A_i}} - 1) \quad \text{alors :}$$

$$L_\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\, 1_{A_i} \right) = \exp \sum_{i=1}^{k} \mu(e^{-t_i 1_{A_i}} - 1) = \prod_{i=1}^{k} \exp \mu(e^{-t_i 1_{A_i}} - 1) = \prod_{i=1}^{k} L_\Phi(t_i\, 1_{A_i}) =$$

$\prod_{i=1}^{k} L_{\Phi(A_i)}(t_i)$ d'où $\Phi(A_1),...,\Phi(A_k)$ sont indépendants.

Cas 2

$\mu(S) = \infty$

$S = U_i S_i$ et les ensembles S_i sont disjoints, bornés et considérons les mesures : $\mu_i = \mu S_i$ restrictions de la mesure μ aux ensembles S_i : $\mu S_i(A) = \mu (A \cap S_i)$.

Il existe alors sur S_i un processus de poisson d'intensité μ_i et on considèree le processus $\Phi = \sum_i \Phi_i$ où les Φ_i sont indépendants.

Remarque :

1) Si f est une fonction mesurable positive définie sur $\theta^n \times \Pi$ pour tout processus de Poisson Φ d'intensité μ on peut écrire la somme $\sum \{ f(\varphi_1,....,\varphi_n , \Phi) ; \varphi_1,....,\varphi_n$ des éléments distincts de $\Phi \}$ qu'on note $\sum_{\Phi}' f(\varphi_1,...,\varphi_n ; \Phi)$ et son espérance est donnée par la formule :

$$E \sum_{\Phi}' f(\varphi_1,....,\varphi_n ; \Phi) = \int .... \int E f(\omega_1,....,\omega_n ; \Phi \cup \{\omega_i\}_1^n) d\mu (\omega_1)....d\mu (\omega_n).$$

2) Une fonction f d'un processus de Poisson à valeurs réelles est croissante si $f(\Phi) \geq f(\Phi')$ pour chaque deux réalisations Φ et Φ' telle que $\Phi - \Phi'$ est une mesure positive.

3) Si f et g sont deux fonctions positives, mesurables et croissantes d'un processus de Poisson Φ alors $E(f(\Phi) g(\Phi)) \geq Ef(\Phi) Eg(\Phi)$ en particulier si E_1 et E_2 sont deux évènements croissants alors on a : $P(E_1 \text{ et } E_2) \geq P(E_1) P(E_2)$.

Conclusion :

Un processus de Poisson Φ est un processus ponctuel qui est égal à $\sum \delta_{X_i}$ pour une suite $X_1,...,X_i,....$ d'éléments aléatoires de S ; par suite on peut identifier Φ avec l'ensemble $\{X_i\}$ et un processus de Poisson peut être considéré comme un sous ensemble dénombrable aléatoire de S et on écrira $\Phi U\{\alpha\}$ pour désigner $\Phi + \delta_\alpha$. Plus généralement si μ est une mesure σ finie sur un espace mesurable (S,θ) alors il existe un unique processus de Poisson Φ d'intensité μ à savoir :

* Si $A \in \theta$, $\Phi(A)$ a une distribution de Poisson de moyenne $\mu(A)$ si $\mu(A) < \infty$ et $\Phi(A) = \infty$ p.s. si $\mu(A) = \infty$.

* * Si $A_1,....,A_n$ sont disjoints alors les variables $\Phi(A_1),...,\Phi(A_n)$ sont indépendantes.

II. Preuve du théorème 1 :

Le théorème est équivalent à :

$$\exp - \frac{1}{f(x_0)^d} e^{-u} \leq P(\lambda(a) \text{ ensembles recouvrent K}) \leq \exp -e^{-u}$$

On remplace le nombre fixe d'ensembles de recouvrement par un nombre aléatoire M avec M ~ Poisson ($\lambda(a)$).

Soit $\theta_{\lambda,a}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda\mu_a .f(x)dx$ dans $\Omega_A \times \mathbb{R}^d$.

$\theta_{\lambda,a}$ consiste en M éléments indépendants (A_1^a , X_i) ayant chacun la distribution $\mu_a.f(x)\,dx$, on note par abus :

$\theta_{\lambda,a} = \{ A^a + x \,/\, (A^a,x) \in \theta_{\lambda,a} \}$ une famille de M ensembles de recouvrement.

Le nombre d'ensembles qui rencontrent K a une distribution de Poisson de moyenne

$$m = \int_{\Omega_A} \int_{\mathbb{R}^d} I((A^a + x) \cap K \neq \varnothing)\ \lambda\mu_a.f(x)dx$$

$\lambda f(x_0) E \mid K - aA \mid \leq m \leq \lambda E \mid K - aA \mid$

On rappelle les définitions introduites dans [4]:

ω désigne la mesure de Hausdorff en dimension (d-1)

A est un ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^d$; $A_1,...,A_d$ de même distribution que A.

$D_v^\delta(x) = \{ y \,/\, |y-x| < \delta \text{ et } (v \mid y - x) < 0 \}$.

* u vecteur unitaire est normal à A en x si $x \in \partial A$ et $A \subset \{ y \,/\, (y-x \mid u) \leq 0 \}$.

* $v \neq 0$ est un vecteur spécial pour $A_1,...,A_n$ en x si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \partial A_i$ et s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$D_v^\delta(x) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

* $v \neq 0$ est un vecteur admissible si pour $0 < \lambda < \infty$; $a = 1, \theta = \theta_{\lambda,a}$ on a :

1) $k = 1 ;...; d-1$

$P(\exists B_1,...,B_k \in \theta$ et x/v est spécial pour $\{B_i\}_{i=1}^k$ en $x) = 0$

2- $P(\exists B_1,...,B_d \in \theta$ et x,x' distincts $/v$ est spécial pour $\{B_i\}_{i=1}^d$ en x et x' $) = 0$

3- $P(\exists \{B_i\}_{i=1}^d$ et $\{B'_i\}_{i=1}^d ; \{B_i\} \neq \{B'_i\}$ et x,x' avec $(v \mid x-x') = 0 /v$ est spécial pour $\{B_i\}_{i=1}^d$ en x et pour $\{B'_i\}_{i=1}^d$ en $x') = 0$

On désigne par $\tilde{\omega}$ la mesure $|\text{Dét}(u_i(y_i))_{i=1}^d| \, d\omega(y_1).....d\omega(y_d)$ sur ∂A_1 x...x ∂A_d avec $u_i(y_i)$ normal a A_i en y_i.

$C(u_1^k)$ désigne le cône fermé engendré par $u_1,...,u_k$ et $C^0(u_1^k)$ son intérieur.

$\theta' = \{ B / B \in \theta \text{ et } 0 \notin B \}$, le processus de Poisson de tous les ensembles ne contenant pas 0.

$D_v^\delta = D_v^\delta(0)$ on définit alors :

$$\beta_+(A_1,...,A_d ; v ; \lambda ; \delta) = \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} \left[P(\theta \text{ recouvre } D_v^\delta)\right]^{-1} I(v \in C(u_1^d(y_1^d))) \, d\tilde{\omega}$$

$$\beta_-(A_1,...,A_d ; v ; \lambda ; \delta) = \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} I(c \in C^0(u_1^d(y_1^d))) P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } D_v^\delta) d\tilde{\omega}$$

Si $A_1^0 \neq \emptyset;...; A_d^0 \neq \emptyset$ et $\beta_+ = \beta_- = 0$ s'il existe $i / 1 \leq i \leq d$ et $A_i^0 = \emptyset$

$$\alpha_+(A ; v ; \lambda ; \delta) = \frac{1}{d!} (E|A|)^{1-d} E\beta_+$$

$$\alpha_-(A ; v ; \lambda ; \delta) = \frac{1}{d!} (E|A|)^{1-d} E\beta_-$$

$$\gamma(\lambda, A) = \lambda^d (E|A|)^{d-1} e^{-\lambda f(x_0) E|A|}$$

Lemme 1 :

Pour $\delta < 1/2$ et $P(2r(A) \geq \delta) = 0$

θ un processus de Poisson d'intensité $\lambda\mu.f(x)dx$ sur $\Omega_A \times (\mathbb{R} \times T^{d-1})$

Pour $t \geq 0$; C_t est le cylindre $[0;t[\times T^{d-1}$

$$C_t = \{ (s,x') \in \mathbb{R} \times T^{d-1} / 0 \leq s < t \}$$

On note $\tau = \tau(\theta) = \text{Inf} \{ s \geq 0 / (s,x') \notin \cup \theta \}$; on a alors :

$$\exp - \gamma \alpha_+ (t+\delta) \leq \exp - \gamma \alpha_+ P(\tau \geq 0) \leq P(\tau \geq t) \leq \exp - \gamma \alpha_- f(x_0)^d \exp(-e^{f(x_0)} E|A|) t.$$

Preuve du Lemme 1 :

On a l'équivalence $\tau \geq \tau \Leftrightarrow C_t$ est recouvert par θ.

On remplace A par un ouvert aléatoire A^0 et soit θ^0 le processus de Poisson correspondant, on a : $\cup \theta^0 = (\cup \theta)^0$

θ^0 recouvre $C_t^0 \Leftrightarrow \theta$ recouvre C_t^0.

Pour $\varepsilon > 0$; $P(C_t^0 \text{ recouvert}) \le P(C_{t-\varepsilon} \text{ recouvert}) = P(\tau \ge t-\varepsilon)$

$P(C_t^0 \text{ recouvert}) = P(\tau \ge t) = P(C_t \text{ recouvert})$.

T^{d-1} étant compact on a que $\tau = t \Leftrightarrow C_1$ recouvert par θ.

Le point (t,x') n'est pas recouvert, on suppose que $e = (1; 0;...; 0)$ est admissible et considérons les ensembles $B_1,...,B_k$ de θ tels que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \partial B_i$

Si $t > 0$; e est spécial pour $B_1,..,B_d$ en x, comme il est supposé admissible, alors $k = d$

d'où l'équivalence :

$\tau = t \Leftrightarrow \exists\, x = (t,x')$ et $B_1,...,B_d \in \theta$ / $x \in \bigcap_{i=1}^{d} \partial B_i$; e est spécial pour $B_1,...,B_d$ en x et

$x \notin U\theta$ et θ revouvre C_t.

Soit g une fonction mesurable sur $[0,\infty[$ avec $g(0) = 0$, on définit alors :

$$\psi(B_1,..,B_d;\theta) = \begin{cases} g(t).I\ (\theta \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta) \text{ ; s'il existe un point } x = (t,x') \in \bigcap_{i=1}^{d} \partial B_i \\ \text{tel que e est spécial pour } B_1,...,B_d \text{ en x et } t > 0 \\ 0 \quad \text{autrement.} \end{cases}$$

$$d!\, Eg(\tau) = \int ... \int E\psi(A_1+x_1;.., A_d+x_d; \theta \cup \{A+x\}_{i=1}^{d}\, \lambda^d \prod_{i=1}^{d} f(x_i)dx_1...dx_d\, d\mu(A_1)...d\mu(A_d)$$

$$\text{On définit } \psi(A_1,...,A_d) = \int ... \int E\psi(A_1 + x_1,...,A_d + x_d ; \theta \cup \{A_i + x_i\}_{i=1}^{d} \prod_{i=1}^{d} f(x_i)dx_1....dx_d.$$

$Eg(\tau) = \frac{1}{d!}\, \lambda^d\, E\psi(A_1;...,A_d)$; $A_i : 1 \le i \le d$, indépendants de distribution μ.

$\psi(A_1,...,A_d) = 0$, sauf s'il existe $x \in \mathbb{R} \times T^{d-1}$ et $y_i \in \partial A_i$; $1 \le i \le d$ tel que $x = x_i + y_i$.

On effectue pour la suite un changement de variable :

$$\Gamma : (\mathbb{R} \times T^{d-1}) \times \partial A_1 \times ... \times \partial A_d \longrightarrow (R^d)^d$$

$$(x,y_1,.....,y_d) \longrightarrow (x-y_1,....,x-y_d)$$

Cette transformation est lipschitzienne ($\text{Lip}\ \Gamma \le (2d)^{1/2}$) donc (théorème de Rademacher) presque partout différentiable et dont le jacobien est égal à :

$|\, \text{Dét}\, (u_i(y_i))_{i=1}^{d}\, |$ avec $u_i(y_i)$ est normal à A_i en y_i

on a que :

$$\psi(A_1,..,A_d) = \int_0^\infty \int_{T^{d-1}} \int_{\partial A_1} .. \int_{\partial A_d} E(g(t)P(\theta U\{A_i + x-y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta))\, I(\text{e spécial}$$

pour $\{A_i + x-y_i\}_{i=1}^d$ en x) $\prod_{i=1}^d f(x-y_i)dt\, dx'\, d\tilde{\omega}$

$$\Phi(A_1,...,A_d) = \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} P(\theta U \{A_i + x-y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta)\, I(\text{e spécial pour}$$

$\{A_i - y_i\}_{i=1}^d$ en 0) $d\tilde{\omega}$

$$\psi(A_1,...,A_d) = \int_0^\infty \int_{T^{d-1}} g(t)\Phi(x,A_1,...,A_d) \prod_{i=1}^d f(x-y_i)dt\, dx'$$

$\Phi(x,A_1,...,A_d)$ indépendante de x' et on la note $\Phi(t, A_1,...,A_d)$

$$E\, g(\tau) = \frac{1}{d!}\lambda^d \int_0^\infty g(t)\, E\Phi(t,A_1,...,A_d)\, Z(t)dt \text{ où : } Z(t) = \int_{T^{d-1}} \prod_{i=1}^d f(x-y_i)dx'$$

g étant quelconque avec g(0) = 0

τ est absolument continue de densité $\varphi(t) = \frac{1}{d!}\lambda^d E\Phi(t,A_1,...,A_d)\, Z(t)$

Pour la suite on va estimer Φ

$x = (t,x')$; $A_1,..., A_d$; $y_1,...,y_d$ tels que e est spécial pour $\{A_i + x_i\}_{i=1}^d$ en 0

$\theta'_x = \theta \setminus \{ b / x \in B \}$ on enlève de θ les ensembles recouvrant x.

Distribution de θ'_x = Distribution de θ sachant que $x \notin U\theta$.

Le nombre d'ensembles $B \in \theta$ avec $x \in B$ a une distribution de Poisson de moyenne :

$$m' = \int I(x \in A+y)\, \lambda f(y)\, d\mu(A)\, dy.$$

$P(x \in U\theta) = e^{-m}$ avec $\lambda f(x_0)\, E|A| \le m' \le \lambda E|A|$

on a également $E|A| \left(-f(x_0) - \frac{e^{f(x_0)}}{\lambda} \right) \le -E|A|$ d'où :

$$e^{-\lambda f(x_0) E|A|} \exp(-e^{f(x_0) E|A|}) \le P(x \notin U\theta) \le e^{-\lambda f(x_0) E|A|}$$

$P(\theta \cup\{A_i+x- y_i\}$recouvre C_t et $x \notin \cup \theta) = P(\theta \cup\{A_i+x- y_i\}$ recouvre $C_t / x \notin \cup \theta)P(x \notin \cup \theta) =$

$P(\theta'_x \cup\{A_i+x- y_i\}$ recouvre $C_t)$ $P(x \notin \cup \theta)$

$D = D^{\delta}_{\theta}(x)$ et $D^{\delta}_{\theta} = D^{\delta}_{\theta}(0)$ $\quad E = C_t \backslash D$ et $\theta^* = \theta_x' \cup \{ A_i + x-y_i \}$

$P(\theta^*$recouvre $C_t) \geq P(\theta^*$recouvre E U D) $\geq P(\theta^*$recouvre E) $P(\theta^*$recouvre D).

Comme aucun ensemble $A_i+x- y_i$ et aucun ensemble $B \in \theta$ avec $B \in \theta$ ne rencontre E ; on a que :

$(\theta^*$recouvre E) $\Leftrightarrow$ $(\theta'_x$ recouvre E) $\Leftrightarrow (\theta^*$recouvre E) d'où

$P(\theta^*$recouvre $C_t) \geq P(\theta$ recouvre E) $P(\theta^*$recouvre D) $\geq P(\theta$ recouvre $C_t)$ $P(\theta^*$recouvre D)

de même :

$P(\theta$ recouvre $C_t) \geq P(\theta$ recouvre E) $P(\theta$ recouvre D) $= P(\theta^*$recouvre E) $P(\theta$ recouvre D) $\geq$

$P(\theta^*$recouvre $C_t) \geq P(\theta$ recouvre D)

$P(\tau \geq t)$ $P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^{d}$ recouvre $D^{\delta}_{\theta}) \leq$ $P(\theta^*$ recouvre $C_t) \leq P(\tau \geq t)$ $P(\theta$ recouvre $D^{\delta}_{\theta})$.

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) = \int_{\partial A_1} \cdots \int_{\partial A_d} P(\theta \cup \{A_i + x-y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta)\, I(\text{e spécial}$$

pour $(A_i - y_i)_{i=1}^{d}$ en 0 $)d\tilde{\omega}$.

Comme on a l'équivalence :

e est spécial pour $(A_i - y_i)$ en $0 \Leftrightarrow e \in C(u_1^d(y_1^d))$; alors :

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) = \int_{\partial A_1} \cdots \int_{\partial A_d} P(\theta'_x \cup \{A_i + x-y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } C_t)\, P(x \notin U\theta)$$

$$I(e \in \text{Cone}\ (u_1^d(y_1^d)))d\tilde{\omega}$$

$$= \int_{\partial A_1} \cdots \int_{\partial A_d} P(\theta \cup \{A_i + x-y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta.$$

$$I(e \text{ spécial pour } (A_i - y_i)_{i=1}^{d} \text{ en } 0)\, d\tilde{\omega}.$$

Comme on a l'équivalence :
e est spécial pour $(A_i - y_i)_{i=1}^d$ en $0 \Leftrightarrow e \in C(u_1^d(y_1^d))$; alors

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) = \int_{\partial A_1} .... \int_{\partial A_d} P(\theta' \cup \{A_i + x - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } C_t).$$

$$I(e \in C(u_1^d(y_1^d))\, d\tilde{\omega}$$

$$= \int_{\partial A_1} .... \int_{\partial A_d} P(\theta^* \text{ recouvre } C_t)\, P(x \notin U\, \theta).$$

$$I(e \in C(u_1^d(y_1^d))\, d\tilde{\omega}$$

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) \geq \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} P(\tau \geq t)\, [\, P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } D_e^\delta)\,]^{-1}.$$

$$e^{-\lambda f(x_0)\, E|A|}\, I(e \in C(u_1^d(y_1^d)))\, d\tilde{\omega}$$

$$\leq e^{-\lambda f(x_0)\, E|A|}\, \beta_+(A_1,...,A_d,e)\, P(t \geq t)$$

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) \geq \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} P(\tau \geq t)\; P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } D_e^\delta).$$

$$e^{-\lambda f(x_0)\, E|A|}\, \exp(-e^{f(x_0)} E|A|).$$

$$I\,(e \in C(u_1^d(y_1^d)))\, d\tilde{\omega}$$

$$\geq e^{-\lambda f(x_0)\, E|A|}\, \exp(-e^{f(x_0)} E|A|)\; \beta_-(A_1,...,A_d,e).\, P(\tau \geq t).$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{d!}\, \lambda^d\, E\, \Phi(t,A_1,...,A_d)\, Z(t)$$

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{d!}\, \lambda^d\, e^{-\lambda f(x_0) E|A|}\, P(\tau \geq t)\, E\, \beta_+(A_1,...,A_d,e) \leq \alpha_+(A,e,\lambda,\delta)\, \gamma(A,\lambda)\, P(\tau \geq t)$$

$$\varphi(t) \geq \frac{1}{d!}\, \lambda^d\, f(x_0)^d\, e^{-\lambda f(x_0)\, E|A|}\, \exp(-e^{-f(x_0)} E|A|)\, P(\tau \geq t)\, E\, \beta_-(A_1,...,A_d,e)$$

$$\geq f(x_0)^d\, \exp(-e^{f(x_0)} E|A|)\, \alpha_-(A,e,\lambda,\delta)\, \gamma(A,\lambda)\, P(\tau \geq t).$$

Le lemme se trouve démontré en notant que pour $t > 0$ les fonctions
$h_1(t) = P(\tau \geq t) \exp[f(x_0)^d \exp(-e^{f(x_0)} E|A|)\gamma\, \alpha_- t]$ et $h_2(t) = P(\tau \geq t)\, e^{\gamma \alpha_+ t}$ sont respectivement

décroissante et croissante et aussi que les ensembles $[0,\varepsilon[\times T^{d-1}$ et $[\, s+\varepsilon,\, s+2\varepsilon\, [\times T^{d-1}$ sont recouverts indépendamment avec la même probabilité $P(t \geq \varepsilon)$ on fera tendre ensuite ε vers 0.

Lemme 2:

Si e est admissible, $2r(A) < s$ et Q est un cube de $\mathbb{R}^d$ de côté s ; $s > \delta$ alors :

$$\exp -\gamma \alpha_+ (s+\delta)^d \leq P(\theta \text{ recouvre } Q) \leq \exp - \gamma \alpha_- f(x_0)^d \exp(-e^{f(x_0)} E|A| s^d$$

Preuve du lemme 2 :

Les transformations : $s \to as$; $\delta \to a\delta$; $A \to aA$ conservent :

$P(\theta \text{ recouvre } Q)$; α_+ ; α_- et transforment λ en $a^{-d}\lambda$ et γ en $\gamma(a^{-d}\lambda, aA) = a^{-d}\gamma(\lambda, A)$, donc il suffit de prouver le lemme pour un s particulier on prendra $s = 1/2$.

C_1 est décomposé en 2^d cubes de côté $1/2$, chacun est recouvert (par le processus θ sur $\mathbb{R} \times T^{d-1}$) avec la même probabilité que Q.

$$P(\tau \geq t) = P(C_1 \text{ recouvert}) \geq P(Q \text{ recouvert})^{2^d}$$

Ensuite on prendra $s+ \delta = 1$.

Comme $Q \subset C_{1-\delta}$ alors :

$$P(Q \text{ recouvert}) \geq P(C_{1-\delta} \text{ recouvert}) = P(\tau = 1- \delta) \geq \exp -\gamma\alpha_+ .$$

Lemme 3 :

K borné de $\mathbb{R}^d$; $n_1,...,n_d$ des entiers ; $\mathfrak{F}_s$ est l'ensemble des cubes $\{ x \,/\, n_i\, s \leq x \leq (n_i+1)\, ; s$ $i = 1,...,d \}$.

$n_s = \#\{ Q \in \mathfrak{F}_s ; Q \subset K \}$ et $m_s = \#\{ Q \in \mathfrak{F}_s ; Q \cap \partial K \neq \varnothing \}$.

On a :

$$\exp - \gamma\alpha_+ (n_s + m_s)(s + \delta)^d \leq P(\theta \text{ recouvre } K) \leq \exp - \gamma \alpha\, f(x_0)^d\, n_s(s-\delta)^d \exp -e^{f(x_0)}\, E\,|\,A\,|$$

Preuve du Lemme 3:

Soit Q_i le cube de même centre que Q_i et de côté $s-\delta$.

Les événements $\{ \theta$ recouvre tout $Q_i \}$ sont indépendants .

$$P(\theta \text{ recouvre } K) \leq P(\theta \text{ recouvre tout } Q_i) = \prod_{i=1}^{n_s} P(\theta \text{ recouvre } Q_i) \leq$$

$$\exp - \gamma \alpha - f(x_0)^d\, n_s(s - \delta)^d \exp - e^{f(x_0)} E|A|$$

d'autre part $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_s+m_s}$

$P(\theta \text{ recouvre tout } K) \geq P(\theta \text{ recouvre tout } Q_i \ , \ 1 \leq i \leq n_s + m_s)$

$$\geq \prod_{i=1}^{n_s+m_s} P(\theta \text{ recouvre } Q)$$

$$\geq \exp - \gamma\alpha_+ (n_s + m_s)(s + \delta)^d$$

La preuve du théorème 1 est achevée par le fait que :

$$\gamma(aA,\lambda) \longrightarrow \frac{1}{f(x_0)} \frac{1}{|K|} \frac{1}{\alpha} e^{-u} \ [\, a \longrightarrow 0 \,]$$

$\bigcup_{i=1}^{n_s} Q_i \subset K \subset \bigcup_{i=1}^{n_s+m_s} Q_i$ d'où $n_s s^d \leq |K| \leq (n_s + m_s) s^d$

aussi on a que $\bigcup_{i=n_s+1}^{n_s+m_s} Q_i \subset \{ x \setminus d(x,\partial K) \leq \sqrt{d}\ s \}$ d'où

$m_s s^d \leq |\{ x / d(x,\partial K) \leq \sqrt{d}\ s \}| \longrightarrow |\partial K| = 0 \ (s \longrightarrow 0)$ par conséquent

$m_s s^d \longrightarrow 0$ et $n_s s^d \longrightarrow |K|$

$m_s (s - \delta)^d \longrightarrow |K|$ et $(n_s + m_s)(s - \delta)^d \longrightarrow |K|$ lorsque $s \longrightarrow 0$

Preuve du théorème 2:

$\Delta_n < r$ ssi K_r est recouvert par $\{ X_i - rA \}_{i=1}^n$.

On remplace le nombre fixe n de variables X_i pour un nombre aléatoire N_t où N_t est un processus de Poisson d'intensité 1 indépendant de $X_1 , X_2 , \ldots\ldots$

$N_t \sim$ Poisson (t) ; $\{ X_i \}_{i=1}^{N_t}$ est un processus de Poisson d'intensité $t.f(x_0)$.

On note $\Delta_t = \Delta_{N_t}$ et $V_t = V_{N_t} = (\Delta_t)^d$.

Comme $\frac{N_t}{t} \rightarrow 1$ p.s. et $\left(\frac{N_t}{t} - 1\right) \text{Log } t \rightarrow 0$ p.s. le théorème 2 est équivalent à :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{tf(x_0)\, V_t - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \geq d\text{-}1 \quad \text{p.s.}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{tf(x_0)\, V_t - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \leq d\text{+}1 \quad \text{p.s.}$$

D'après le théorème 1

$\gamma(aA,\lambda) = \lambda^d (E\,|aA|)^{d-1} e^{-\lambda f(x_0) E|aA|}$

$\gamma(r,t) = t^d (r^d)^{d-1} e^{-tf(x_0) r^d} = t \times (tr^d)^{d-1} e^{-f(x_0) tr^d}$

On pose $w = tr^d$ d'où $\gamma(r,t) = t w^{d-1} e^{-f(x_0)\, w}$

$\Delta_t < r \Leftrightarrow \Delta_t^d < r^d \Leftrightarrow tV(t) < w$ or on a

$\exp - \gamma\alpha_+ \leq P(\Delta_t < r) \leq \exp - \gamma\alpha_- f(x_0)^d \exp - e^{-f(x_0) r^d}$ $\alpha_+ (tr^d) , \alpha_- (tr^d) \rightarrow \alpha$

Pour $t_k = \exp(k)^{1/2}$ on pose $w_k = \dfrac{\text{Log } t_k + c \text{ Log Log } t_k}{f(x_0)}$ avec $c < d-1$ quelconque fixé

$\gamma_k = t_k w_k^{d-1} e^{-w_k f(x_0)} \sim f(x_0) (\text{Log } t_k)^{d-1-c} \quad k \to \infty$

$P(t_k V(t_k) < w_k) \leq \exp -\gamma_k \alpha_- f(x_0)^d \exp - e^{f(x_0)} \dfrac{w_k}{t_k} = 0 \ (\exp - \dfrac{\gamma_k}{2} \alpha_- f(x_0)^d)$

D'après le lemme de Borel Cantelli :

$P(t_k v(t_k) < w_k \text{ i.0.}) = 0.$

Supposons $t_k v(t_k) \geq w_k$.

$t_{k-1} \leq t \leq t_k$; et pour t et k suffisamment grands

$tf(x_0) V(t) - \text{Log } t \geq t_{k-1} f(x_0) V(t_k) - \text{Log } t_k \geq \dfrac{t_{k-1}}{t_k} w f(x_0) - \text{Log } t_k \geq$

$\left(1 - \dfrac{1}{2(k)^{1/2}}\right)(\text{Log } t_k + c \text{ Log Log } t_k) - \text{Log } t_k \geq c \text{ Log Log } t - \dfrac{1}{2} - c \dfrac{\text{Log } (k)^{1/2}}{2 (k)^{1/2} \text{ Log Log } t}$

$\dfrac{tf(x_0) V(t) - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \geq c - \dfrac{1}{2 \text{ Log Log } t} - \dfrac{c \text{ Log } (k)^{1/2}}{2\gamma k \text{ Log Log } t}$

D'où $\lim \inf \dfrac{tf(x_0) V(t) - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \geq d-1$

La seconde partie est démontrée de la même manière :

En choisissant $c > d+1$ fixé

$P(t_k V(t_k) w_k) < 1 - \exp(-\gamma_k \alpha_+) < \gamma_k \alpha_+ = \rho \left(\dfrac{1}{f(x_0)^{d-1}} k^{(d-i-e)/2}\right)$

d'où $P(t_k v(t_k) \geq w_k \text{ i.0.}) = 0.$

REFERENCES :

[1] **P.DEHEUVELS :** Strong limit theorems for maximal spacings from a general univariate distribution. Annals of probability. Vol.12-n°4. (1984)

[2] **L.FARHANE :** Lois limites fortes pour le k-ième espacement maximal. C.R.A.S. PARIS t.308 série I. (1989)

[3] **H.FEDERER :** Geometric measure theory. Springer.Berlin. (1969)

[4] **S.JANSON :** Random coverings. Acta Mathematica. (1986)

[5] **O.KALLENBERG:** Random measures. Academic Press. London. (1976)

[6] **E.M.STEIN :** Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton. (1970)

L.S.T.A. Univ. Paris VI. Place Jussieu
Tour n°45. 3ème Etage 75006 PARIS.

Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5019 Monastir
TUNISIE.